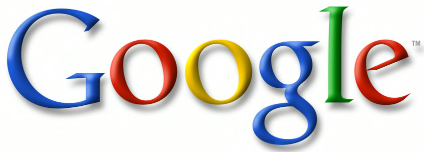


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

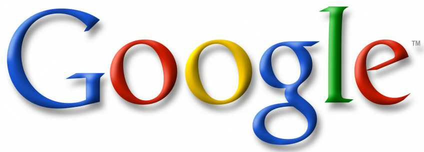
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907108 6

PAA
Journal

JOURNAL

DE PHYSIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

JOURNAL

DE PHYSIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

- 16700 -



JOURNAL
DE PHYSIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DU MICA;

PAR M. E. BOUTY (1).

I. — Études des condensateurs étalons.

1. Pour étudier le résidu d'un condensateur, il est indispensable de se placer dans des conditions d'une extrême simplicité. Je supposerai :

1° Qu'un condensateur dont les deux armatures étaient en communication depuis un temps illimité est placé, à un moment donné, dans le circuit d'une pile impolarisable et que la résistance totale de la pile et du circuit métallique est négligeable;

2° Qu'un condensateur chargé, pendant un temps illimité, par une pile constante, est fermé sur lui-même, à un moment donné, par un circuit métallique de résistance négligeable.

Je me propose de déterminer, dans les deux cas, la variation de la charge du condensateur à une époque arbitrairement choisie. Si, comme je l'ai établi (2), la lame diélectrique ne livre passage à aucun courant, toute l'électricité reçue par le condensateur pen-

---

(1) Extrait d'un Mémoire plus étendu publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XXIV, p. 391.

(2) Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 288; 1890.

- 16700 -



JOURNAL

DE PHYSIQUE

THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DU MICA;

PAR M. E. BOUTY (1).

I. — Études des condensateurs étalons.

1. Pour étudier le résidu d'un condensateur, il est indispensable de se placer dans des conditions d'une extrême simplicité. Je supposerai :

1° Qu'un condensateur dont les deux armatures étaient en communication depuis un temps illimité est placé, à un moment donné, dans le circuit d'une pile impolarisable et que la résistance totale de la pile et du circuit métallique est négligeable;

2° Qu'un condensateur chargé, pendant un temps illimité, par une pile constante, est fermé sur lui-même, à un moment donné, par un circuit métallique de résistance négligeable.

Je me propose de déterminer, dans les deux cas, la variation de la charge du condensateur à une époque arbitrairement choisie. Si, comme je l'ai établi (2), la lame diélectrique ne livre passage à aucun courant, toute l'électricité reçue par le condensateur pen-

---

(1) Extrait d'un Mémoire plus étendu publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XXIV, p. 391.

(2) Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 288; 1890.

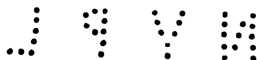
dant la charge, *quelque longue que puisse être la durée de celle-ci,* doit être restituée pendant la décharge, si le circuit du condensateur est fermé pendant un temps suffisant. Dans les deux cas que j'ai étudiés, le *résidu total* doit avoir la même valeur.

2. Les méthodes que j'ai employées reviennent à mesurer de très petites charges emmagasinées dans un condensateur de grande capacité. Je me suis servi, pour cela, de l'électromètre capillaire de M. Lippmann. Après avoir bien mouillé le tube de l'électromètre dans toute l'étendue du champ de vision par l'oscillation de la colonne mercurielle, on décharge le condensateur sur l'électromètre et on observe sur l'échelle du micromètre la position finale du mercure. On vérifie sans peine que, dans les limites du champ de vision, le déplacement n du mercure est exactement proportionnel à la différence de potentiel initiale δy à laquelle se trouve chargé le condensateur, et l'on détermine le coefficient de proportionnalité. Dans mes expériences, δy était toujours inférieur à $0^{da},015$; la précision des mesures, constante dans tout l'intervalle où j'ai opéré, peut être évaluée à $\frac{1}{50}$.

3. *Étude de la charge d'un condensateur.* — Soit A le condensateur étudié. La méthode comporte l'emploi d'un condensateur B auxiliaire, que l'on doit choisir le plus parfait possible au point de vue de l'isolement. Les condensateurs A et B sont disposés en cascade sur le circuit d'une pile impolarisable de force électromotrice E; je suppose d'abord le circuit ouvert en I; les deux armatures de B sont réunies par une dérivation m sans résistance (*fig.* 1). L'expérience se divise en trois phases :

1° Au temps 0 on ferme le circuit en I et le condensateur A se charge directement; les deux armatures de B demeurent au même potentiel.

2° Au temps θ la dérivation m est supprimée et, pendant un temps t, A ne peut plus recevoir de charge supplémentaire que par l'intermédiaire de B. Soit C la capacité de A *considérée comme fonction du temps,* X la différence de potentiel variable de ses armatures, y la différence de potentiel des armatures de B. Nous supposons toujours y assez petit pour qu'on puisse faire abstrac-



tion des fuites d'électricité dont B pourrait être le siège, et aussi du résidu formé sur B. *Nous considérons donc la capacité de* B *comme invariable* et nous la prenons égale à 1. Dans ces conditions, on doit avoir à chaque instant

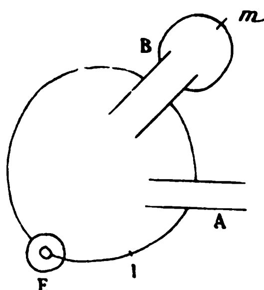
$$X + y = E, \tag{1}$$

$$d(CX) = dy, \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$\delta C = \frac{C+1}{E-y}\delta y. \tag{3}$$

Fig. 1.



D'ailleurs, au degré d'approximation que comportent les mesures, et eu égard à la petitesse de y, on peut se borner à écrire

$$\delta C = \frac{C+1}{E}\delta y \tag{3 bis}$$

et étendre cette formule à la durée entière t de cette seconde partie de l'expérience.

3° Au temps $\theta + t$ le circuit de la pile est de nouveau interrompu en I et l'on décharge B sur l'électromètre. On lit le déplacement n du mercure, on en conclut δy à l'aide du coefficient de proportionnalité ci-dessus déterminé et, par suite, δC ou, enfin, l'accroissement normal $E\delta C$ qu'aurait pris dans l'intervalle t la charge du condensateur A supposé seul dans le circuit de la pile E.

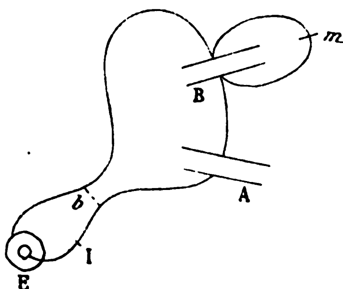
4. *Étude de la décharge.* — Le condensateur A est d'abord chargé pendant un temps très long; le condensateur B demeure

fermé sur lui-même en m (*fig.* 2). On interrompt le courant en I, et aussitôt, à un instant que nous prendrons pour origine, on ferme le circuit des condensateurs en b.

1° Pendant un temps θ, le condensateur A se décharge librement; les deux armatures de B demeurent au même potentiel.

2° Au bout du temps θ, la dérivation m est supprimée et le résidu rendu libre sur A se partage désormais entre les condensateurs A et B, proportionnellement à leurs capacités C et 1.

Fig. 2.



3° Au temps $t + \theta$, on sépare les deux condensateurs en b et on décharge B sur l'électromètre. On lit le déplacement n du mercure; on en conclut la différence de potentiel $\delta y'$ à laquelle se trouvait chargé B, ou sa charge $\delta y'$. On en déduit la charge totale $(1 + C)\delta y'$ rendue libre sur A entre θ et $\theta + t$. Il y a lieu de remarquer que, dans cette expérience, le condensateur B se trouve chargé non plus dans le même sens que A, comme dans les expériences du paragraphe précédent, mais en sens inverse.

5. *Comparaison des courants de charge et de décharge.* — Les durées t et θ que j'ai employées pour les expériences de charge ont varié de 0″,001 à 4000″. Au-dessus de 5″ et parfois même de 2″, les interruptions et commutations nécessaires étaient effectuées à la main; mais, pour les petites durées, on a eu recours à un pendule de torsion qui les réalisait automatiquement à l'aide de contacts à mercure (¹).

(¹) Voir *Ann. de Chim. et de Phys., loc. cit.*

Voici maintenant les lois que l'expérience m'a révélées :

Première loi. — *La charge absorbée entre θ et $\theta + t$ par un condensateur qui ne fuit pas et qui s'est longuement reposé est identique au résidu rendu libre entre θ et $\theta + t$ sur le même condensateur, précédemment chargé pendant un temps indéfini et par la même pile.*

Deuxième loi. — *La charge absorbée ou résiduelle est rigoureusement proportionnelle à la force électromotrice de la pile de charge.*

Troisième loi. — *Les charges résiduelles au sein d'un même condensateur ne sont pas proportionnelles aux capacités.*

D'après la formule (3 *bis*), pour rendre comparables les observations relatives aux subdivisions 0, 1; 0, 2; 0,5 du condensateur principal A et à ce condensateur A tout entier (le condensateur auxiliaire B, de 1 microfarad, demeurant toujours en entier dans le circuit), il faut multiplier les nombres n lus directement au micromètre par les facteurs $1 + C$ correspondants, c'est-à-dire, respectivement, par 1,1; 1,2; 1,5; 2.

On trouve ainsi que les résidus des diverses subdivisions d'un excellent microfarad de M. Carpentier sont proportionnels aux nombres suivants :

Subdivisions du microfarad Carpentier.		Résidus.
	0,1	0,104
	$0{,}2_1$	0,220
	$0{,}2_2$	0,301
	0,5	0,375
Total..	1,0	1,000

Pour un condensateur L. Clark Muirhead on a de même :

Subdivisions du microfarad L.-Clark.		Résidus.
	0,1	0,088
	0,2	0,173
	0,3	0,363
	0,4	0,373
Total..	1,0	1,000

Du défaut de proportionnalité que nous venons de constater, il résulte que *les subdivisions d'un condensateur commercial en mica ne peuvent, en général, être considérées comme proportionnelles à leurs valeurs nominales que pour une seule durée de charge ou de décharge.*

Quatrième loi. — *Le résidu d'un condensateur qui ne fuit pas est égal à la somme des résidus de ses subdivisions.*

La vérification de cette loi établit que, dans les condensateurs commerciaux, la réaction des charges d'une subdivision sur les charges d'une autre subdivision est toujours négligeable.

6. *Expression empirique du résidu.* — Les résidus entre θ et $\theta + t$ du microfarad Carpentier et de ses subdivisions, pour toutes les valeurs des variables, à partir de $0^s,001$, sont suffisamment bien représentés par une formule unique, à laquelle il ne faut, d'ailleurs, attribuer qu'une valeur purement empirique

$$[R]_{\theta}^{\theta+t} = A[(t+\theta)^c - \theta^c]. \tag{4}$$

L'exposant c a pour valeur 0,09; le coefficient A change d'une subdivision du condensateur à une autre et n'est pas proportionnel à la capacité (troisième loi).

Il résulte de là que le résidu total entre θ et t, inaccessible à toute mesure directe, a pour expression empirique

$$R = A t^c. \tag{5}$$

Le résidu ainsi calculé, comparé à la charge principale, n'en est jamais qu'une fraction assez petite qu'il nous reste à déterminer.

A cet effet, on charge le microfarad étudié A pendant un temps très long, à une différence de potentiel connue $\delta y = 0^{da},005$ par exemple, et on le décharge directement sur l'électromètre. D'après la première loi, si l'observation de l'équilibre a lieu au bout de vingt-cinq secondes par exemple, la déviation n, lue sur l'électromètre, mesurera (à l'aide des mêmes unités arbitraires qui ont servi jusqu'ici à exprimer le résidu) la charge prise par le microfarad longtemps reposé, puis chargé pendant vingt-cinq secondes. Si l'on en retranche la valeur du résidu calculé par la formule (5)

pour la même différence de potentiel ∂y, et pour une durée de vingt-cinq secondes, on aura rapporté fictivement la charge à une durée nulle, et on pourra la rapporter de même à une durée t quelconque.

J'ai pris pour unité la charge acquise par le microfarad au bout d'une seconde, et c'est à cette unité que j'ai définitivement comparé les résidus R.

En prenant pour unité de temps la seconde, j'ai trouvé pour le coefficient A la valeur 0,0336

$$R = 0,0336\,t^{0,09}.$$

De cette formule on déduit le Tableau suivant :

t.	R.
s 0,001	0,0180
0,01	0,0222
0,1	0,0273
1	0,0336
10	0,0412
100	0,0507
1000	0,0624

En général, quand la durée de charge est multipliée par 1000, le résidu se trouve multiplié seulement par 1,862. La charge M_0 rapportée fictivement à une durée de charge nulle est les 0,966 de la charge totale au bout d'une seconde.

9. *Effet de la résistance du circuit.* — Les formules relatives au résidu ne sont applicables aux courtes durées qu'à la condition expresse d'employer comme pile de charge une pile impolarisable de résistance très faible, et d'opérer toujours en court circuit.

Si l'on introduit dans le circuit de deux grands éléments Daniell une résistance métallique un peu considérable, on obtient pour les résidus $[R]_\theta^{\theta+t}$ des nombres trop forts, et cette circonstance se présente pour des valeurs de la résistance d'autant plus petites que θ est lui-même plus court.

Ainsi une résistance de 6000 ohms s'est trouvée excessive pour $\theta = 0^s,033$; une résistance de 4000 ohms pour $\theta = 0^s,0255$, une résistance de 2000 ohms pour $\theta = 0^s,0179$.

En employant deux petits éléments Gouy (étalons Gouy ordi-

naires), dont la résistance est assez considérable, on n'a pu obtenir aucune mesure acceptable pour des valeurs de θ inférieures à $\frac{1}{30}$ de seconde.

Il suit de là que l'on doit absolument proscrire l'emploi des condensateurs étalons avec de courtes durées de charge et des circuits résistants. *es mesures obtenues dans de telles conditions peuvent être dénuées de toute signification physique.*

II. — Constante diélectrique du mica.

M. Carpentier, ayant bien voulu mettre à ma disposition les lames de mica qu'il emploie pour la construction de ses étalons, j'ai entrepris l'étude directe de ces lames, afin de rechercher, s'il est possible, de caractériser complètement leurs propriétés diélectriques à l'aide d'un ou de plusieurs coefficients. Je n'ai pas admis *a priori* l'existence d'une constante diélectrique; j'ai armé des lames de mica de diverses épaisseurs prises dans un même paquet et parfois extraites par clivage d'une même lame épaisse, et j'ai soumis chacune d'elles à une étude analogue à celle des condensateurs étalons, à l'aide des mêmes appareils et par des méthodes aussi voisines que possible de celles que j'avais employées précédemment.

1. *Méthodes de mesure.* — Ce qui distingue les expériences actuelles, c'est la petitesse de la capacité C par rapport à la capacité du microfarad auxiliaire B, que nous prendrons toujours pour unité.

Nous disposons la lame et le condensateur en cascade sur le circuit d'une pile constante, de force électromotrice E, et nous fermons le circuit pendant un temps t. Soit alors X la différence de potentiel des armatures de la lame, y celle des armatures du microfarad, on a

$$X + y = E, \tag{1}$$

$$CX = y, \tag{2}$$

d'où

$$C = \frac{y}{E - y} \tag{3}$$

C étant très petit par rapport à l'unité, y est très petit par rapport à E; au degré d'approximation des expériences, on peut, en général, remplacer (3) par

$$C = \frac{y}{E}. \tag{3 bis}$$

Pour mesurer C, il suffit donc de décharger le microfarad sur l'électromètre. On lit le déplacement n du mercure, et, par le coefficient de proportionnalité, on en conclut la valeur de la différence de potentiel y, et par suite C.

2. *Mesure de la constante diélectrique.* — L'étude des étalons a établi que la variation de capacité entre $0^s,01$ et 1^s ne dépasse pas en moyenne ([1]) les

$$0,0336 - 0,0273 = 0,0063$$

de la capacité évaluée au bout d'une seconde; il y avait donc lieu de chercher si, dans les mêmes limites et au même degré d'approximation, on peut attribuer au mica une constante diélectrique invariable, c'est-à-dire s'il est possible de représenter la capacité de lames de surface utile S et d'épaisseur e quelconque par la formule

$$C = \frac{kS}{4\pi e}, \tag{4}$$

avec une valeur constante de k. L'épaisseur des lames étudiées était toujours inférieure à $0^{cm},01$, leur surface supérieure à 50^{cq}, par suite, $\frac{S}{e}$ supérieur à 5000; dans ces conditions, il est inutile de recourir à l'artifice de l'anneau de garde, et l'on a le droit d'appliquer la formule (4) en prenant pour S la totalité de la surface armée.

Les lames sont argentées par le procédé Martin; on enlève l'argent sur les bords à l'aide d'acide azotique et, par des lavages et des dessiccations répétés, on débarrasse le plus possible la surface mise à nu de toute trace d'électrolytes. Enfin on vernit les bords à la gomme laque et l'on dessèche à 140°.

([1]) *Voir* le Tableau de la p. 11.

J'ai d'abord constaté, conformément aux prévisions, que, pour une même lame et pour toutes les durées de fermeture de $0^s,1$ à 1^s, on obtient une déviation identique de l'électromètre. Par exemple, pour une lame dont l'épaisseur était de $50^\mu,75$ et la surface armée de $66^{cq},41$ chargée par un élément Daniell, cette déviation avait pour valeur moyenne $n = 32,33$, d'où l'on déduit pour la capacité de cette lame, évaluée en microfarads, $0^{mf},00917$, ou, en valeur électrostatique,

$$C = 0,00917.10^{-16}.9.10^{20} = 8,253.10^3;$$

on a donc, d'après la formule (4),

$$k = \frac{4\pi Ce}{S} = \frac{12,566.8,253.10^3.0,0050,75}{66,41} = 7,91.$$

Des mesures analogues réalisées sur des lames d'épaisseur variant de $14^\mu,75$ à 89^μ ont donné :

S.	e.	k.
cq 49,50	μ 14,75	7,91
65,34	29,09	8,00
65,11	34,88	
66,41	50,75	7,61
64,15	89,00	8,09
Moyenne		7,98

Le mica auquel se rapportent ces mesures est une *muscovite* parfaitement incolore et transparente fournie par M. Carpentier. Dans une direction normale aux plans de clivage, *ce mica possède une constante diélectrique bien déterminée* pour laquelle nous adopterons le nombre 8.

On remarquera que ce nombre est plus de trois fois supérieur au carré de l'indice moyen du mica, et que, d'après ce qui précède, la constante diélectrique du mica, évaluée ici pour une durée de $\frac{1}{10}$ de seconde environ, ne diminuerait que de moins du $\frac{1}{30}$ de sa valeur, si on la rapportait fictivement à une durée nulle.

3. *Application à la construction des étalons.* — Les lames de mica employées à la construction des étalons sont armées de feuilles d'étain que l'on fait adhérer sur leurs deux faces par une couche

mince de vernis à la gomme laque. En opérant ainsi dans mes premiers essais, je me suis aperçu qu'il était impossible d'arriver à des valeurs concordantes de la constante diélectrique; la capacité paraissait parfois presque indépendante de l'épaisseur, et la constante k calculée était d'autant plus grande que l'épaisseur était elle-même plus considérable.

Au reste les lames ainsi préparées augmentent de capacité quand on les charge de poids ou qu'on les serre dans une presse à vis.

Aucun de ces effets ne s'observe sur les lames argentées.

Il est aisé de se rendre compte, *a posteriori*, de cette différence de propriétés. L'argenture est directement et parfaitement adhérente : l'étain, après la dessiccation à 140°, n'adhère pas au mica, mais bien à des granules de gomme laque, laissant entre eux une couche d'air irrégulière. S'il y a, en outre, des soufflures, c'est-à-dire des portions sans adhérence, la pression les fera disparaître ou du moins les diminuera, et l'on doit s'attendre à une forte augmentation temporaire et à une certaine augmentation permanente de la capacité; mais les granules de gomme laque résistent à la compression, et les armatures demeurent à une distance sensible du mica. Admettons, pour chacune des couches d'air, une épaisseur moyenne de 5^{μ} seulement; puisque la constante diélectrique du mica est 8, l'ensemble des deux couches équivaut électriquement à une épaisseur 80^{μ} de mica, et sa présence suffira à réduire au tiers la constante diélectrique apparente d'une lame de mica d'épaisseur égale à 40^{μ}.

Pour justifier pleinement ces conclusions, j'ai fait les expériences suivantes :

1° On prépare un cadre en paraffine, on y colle une lame de mica que l'on fait adhérer sur les bords en passant un fer chaud sur la face opposée. On obtient ainsi une petite cuve à fond de mica que l'on fait flotter sur du mercure bien sec et que l'on remplit de mercure; en d'autres termes, on réalise un condensateur en mica à armatures de mercure et sans interposition d'air.

La valeur moyenne ainsi obtenue pour k se confond, à $\frac{1}{16}$ près, avec la valeur vraie de la constante diélectrique.

2° On peut aussi conserver les armatures d'étain et rétablir la

continuité entre l'étain et le mica par un liquide faiblement électrolytique, eau distillée, alcool absolu, qui se comportera ici comme un conducteur parfait.

Pour une des lames que j'ai étudiées (épaisseur $52^{\mu},7$) la moyenne des valeurs de k avec interposition d'électrolyte s'est trouvée de 8,06 et, sans interposition, de 2,25.

Il faut conclure de là que, dans la construction des étalons de capacité montés à l'étain, on emploie beaucoup plus de mica qu'il n'est nécessaire, ce qui augmente, sans profit pour leurs qualités électriques, leur prix de revient, leur volume et leur poids ([1]).

4. *Étude des résidus.* — L'étude des résidus peut être réalisée, pour une lame unique, par les méthodes qui ont été appliquées aux condensateurs étalons (p. 6 à 8); mais les quantités d'électricité à mesurer étant, en général, de l'ordre du $\frac{1}{100}$ de celles auxquelles on avait affaire précédemment, il sera nécessaire de multiplier le nombre des éléments de charge. Dès lors les expériences deviennent très délicates par l'importance relative des charges parasites qui peuvent se développer sur le microfarad auxiliaire en vertu, soit de résidus antérieurs, soit de fuites même très minimes ayant pour siège les commutateurs et interrupteurs.

Nous supposerons que l'on a affaire à une lame A récemment préparée, non encore vernie et imparfaitement desséchée. Le courant de charge C entre θ et $\theta + t$, pour des valeurs de θ supérieures à quelques secondes, est presque uniforme, c'est-à-dire que la charge recueillie par le condensateur auxiliaire B est presque proportionnelle à t.

De plus, le courant de décharge D, entre θ et $\theta + t$, transporte une quantité d'électricité qui, bien que considérable pour un résidu, se montre toujours très inférieure à la précédente, par exemple de deux à dix fois plus faible. A ces caractères et principalement *à l'inégalité des courants de charge et de décharge,*

([1]) M. Carpentier a mis à l'étude la construction industrielle d'étalons en mica argenté. J'ai présenté à la Société de Physique (séance du 20 novembre 1891) deux des nouveaux condensateurs. Le plus récemment construit a pour capacité 1 microfarad et ne pèse que 150^{gr}. Il est enfermé dans une boîte plate (cuivre et ébonite) de 12^{cm} de côté et de 3^{cm} d'épaisseur.

on doit juger que les bords de la lame A sont le siège d'une fuite continue d'électricité, que la couche superficielle du mica est conductrice à la manière des électrolytes.

Tout ce qui modifie l'état de la couche superficielle modifie aussi le courant de charge C et, à un moindre degré, le courant de décharge D.

A mesure que la dessiccation de la lame A fait des progrès, C diminue rapidement, D plus lentement, et tous deux se rapprochent de l'égalité. L'égalité approchée de C et de D se maintient d'ailleurs, pour une même lame, dans des limites où le résidu, devenu très faible, peut encore varier au moins du simple au double.

Quand cette égalité est obtenue, on peut être certain que la formule empirique

$$[R]_{\theta}^{\theta+t} = A[(t+\theta)^c - \theta^c], \tag{5}$$

établie (p. 10) pour le résidu des condensateurs étalons, est applicable avec des valeurs variables de A et, en général, avec $c = 0,09$.

En général, on peut arriver à réduire le résidu, évalué entre 2° et 300° à la $\frac{1}{80}$ partie de la charge environ.

Toutefois, aucun caractère *certain* ne garantit que le résidu que l'on observe est bien le plus petit possible, et je n'ai pu fixer à cet égard aucun coefficient définitif.

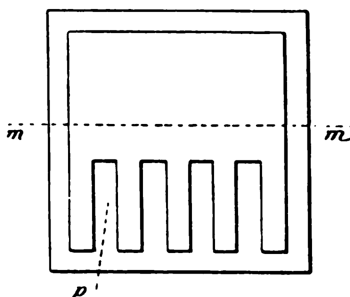
5. *Origine du résidu.* — D'après la manière dont on réduit les résidus, *par des opérations qui n'intéressent que les bords libres des condensateurs,* on pourrait penser que le résidu, à toutes ses phases, est aussi purement superficiel; qu'il a pour unique origine la présence de matières électrolytiques étrangères dans la couche la plus extérieure du mica. L'expérience suivante, entre autres analogues, ne paraît guère compatible avec cette hypothèse.

Une lame de mica est amenée par tâtonnements à un minimum relatif de résidu dont on détermine la valeur proportionnelle. On enlève ensuite l'argenture par places, comme l'indique la *fig.* 3, ce qui a pour double effet de diminuer la capacité et d'augmenter l'importance relative des bords : le résidu proportionnel reste du même ordre.

D'un coup de ciseau on sépare la lame en deux suivant *mm* et

chacune des deux lames, après enlèvement de l'argenture le long de *mm*, peut encore être ramenée à un résidu du même ordre. On peut fendre la seconde lame suivant les lignes *p* sans modifier le résultat.

Fig. 3.



Il est donc vraisemblable que les très faibles résidus appartiennent, au moins partiellement, à la masse du mica, et constituent *une sorte d'élasticité électrique résiduelle,* comme je l'ai indiqué dans un Mémoire antérieur [1].

6. *Effet de la température.* — Il était particulièrement intéressant de savoir ce que deviennent la constante diélectrique et le résidu quand on fait varier la température dans des limites très larges.

La lame à étudier est supportée par des cales en porcelaine, dans une petite étuve en cuivre de Wiesnegg, à double parois, chauffée par deux forts becs Bunsen et munie d'un régulateur. Un thermomètre de Baudin en verre recuit, dont le réservoir est au niveau de la lame, indique la température, qui peut être maintenue sensiblement fixe à un point quelconque entre 100° et 400°. Des fils de platine appuyés sur les deux faces de la lame et protégés par des tuyaux de pipe établissent la communication des armatures avec le circuit extérieur.

De 100° à 300° on ne rencontre pas de difficultés bien graves; mais, au delà de 300°, l'argenture est rapidement attaquée au contact de l'air; elle se transforme en une couche translucide, blan-

[1] *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 288.

châtre, insoluble dans l'eau, dont la production modifie absolument les propriétés superficielles du mica; au reste, la lame est ainsi promptement désarmée, ce qui met fin à l'expérience.

Pour aller plus loin, j'ai dû protéger l'argenture par une couche de cuivre électrolytique, ce qui atténue les inconvénients sans toutefois les supprimer. J'ai pu ainsi pousser les mesures jusqu'au voisinage de 400°.

Nous distinguerons les résultats relatifs à la conductibilité superficielle, aux résidus et à la constante diélectrique.

a. Conductibilité électrique. — De 15° à 200° environ, on constate l'égalité à peu près parfaite des courants C et D de charge et de décharge. Au delà, cette égalité ne subsiste pas, c'est-à-dire que le condensateur fuit et que la lame est devenue conductrice, soit par sa surface, soit à travers son épaisseur, soit à la fois des deux manières.

Il est difficile de se prononcer sur l'existence d'une conductibilité propre du mica (à travers sa masse) au-dessous de 400°; mais on peut être certain que, dans ces limites, la conductibilité superficielle est largement prépondérante. Voici, en effet, ce que l'on observe :

Au-dessus de 200°, la conductibilité résultante à une température fixe donnée croît assez rapidement avec le temps de chauffe, ce qui révèle un changement d'état dont il reste à déterminer le siège. Or, si on laisse refroidir la lame, elle demeure conductrice à la température ordinaire; mais il suffit de laver les bords au pinceau, avec de l'alcool, puis de dessécher quelques minutes à 140° pour rendre à la lame ses propriétés primitives. L'altération du mica est donc purement superficielle.

Rappelons d'ailleurs qu'au-dessus de 300° l'argenture est attaquée et l'altération superficielle devient manifeste. En même temps, la conductibilité croît dans un rapport énorme. Si l'on retarde l'altération de l'argenture par le cuivrage, la conductibilité fait aussi des progrès moins rapides. Cette altération et cette conductibilité paraissent absolument corrélatives.

b. Résidus. — De 0° à 200°, c'est-à-dire tant que les courants de charge et de décharge sont égaux, la valeur du résidu est nette-

ment déterminée. Quand cette égalité cesse d'avoir lieu et que la lame conduit superficiellement, le courant de charge C est supérieur, le courant de décharge D inférieur au résidu R que l'on observerait si l'on pouvait supprimer la conductibilité et que nous nommerons *le résidu vrai,* car, si une partie de C fuit par les bords de la lame et ne contribue pas à former R, une partie de R fuit aussi par les bords pendant l'intervalle où la lame met ce résidu en liberté, et ne se retrouve pas dans D.

Mais, d'après ce que nous savons de la marche du résidu, on peut prévoir, et l'expérience confirme, que le rapport $\frac{C-D}{R}$ des quantités d'électricité *conduite superficiellement* et *absorbée* tend rapidement vers zéro avec la durée t de la charge. La moyenne $\frac{C+D}{2}$ représentera donc le résidu avec une approximation d'autant plus grande que la durée t sera elle-même plus petite. De 200° à 300°, on obtient sans peine la valeur du résidu même par des contacts effectués à la main. Au delà, il devient nécessaire d'avoir recours à des observations pendulaires.

En résumé, on trouve qu'à toute température le résidu vrai R est représenté par une formule empirique

$$[R]_{\theta}^{\theta+t} = A[(t+\theta)^c - \theta^c],$$

analogue à celle qui convient à la température ordinaire; mais, tandis qu'*à froid* la valeur de c la plus convenable est, en général, 0,09, on a toujours, au-dessus de 100°, $c = 0,4$ (¹).

Malgré l'analogie des formules empiriques, la marche générale du résidu est très différente à la température ordinaire et aux températures supérieures à 100°. On s'en convaincra par l'examen du Tableau suivant, dans lequel on a pris pour unité la valeur du résidu formé au bout de $0^s,001$:

(¹) On n'a pas réalisé de mesures pour les températures comprises entre la température ordinaire et 100°.

	R.	
t.	$c = 0{,}09$.	$c = 4$.
0,001 s	1	1
0,01	1,230	2,512
0,1	1,513	6,310
1	1,862	15,85
10	2,291	39,81
100	2,819	180,00
1000	3,417	251,2
$t = 2^s$, $t + \theta = 300^s$	1,244	134,3

Par exemple, si l'on a mesuré le résidu entre 2^s et 300^s et si l'on veut en déduire le résidu formé au bout de $0^s,001$, il faut, dans le premier cas, diviser par 1,237 et, dans le second, par 134,3. Cette remarque est importante au point de vue de la recherche de la constante diélectrique; elle établit que, malgré la grandeur que possèdent à haute température les résidus à longue période, la charge totale pour une durée voisine du millième de seconde diffère toujours fort peu de la charge limite rapportée fictivement à une durée nulle.

De 15° à 380°, le résidu (évalué entre 2^s et 300^s), peut se trouver multiplié par plus de 600.

c. Constante diélectrique. — D'après ce qui précède, la mesure de la constante diélectrique, rapportée fictivement à une durée nulle, ne présente pas de difficultés graves, même au voisinage de 400°.

En bornant l'approximation à $\frac{1}{50}$, il suffira de mesurer la charge de la lame pour les contacts les plus courts que l'on peut produire à la main jusque vers 200°, et pour des contacts de l'ordre du 200e au 500e de seconde réalisés à l'aide du pendule jusqu'à 300. La lecture faite à l'électromètre ne diffère pas de celle que l'on obtient pour les très courtes charges, à la température ordinaire. De 15° à 300°, la constante diélectrique ne varie donc pas de la $\frac{1}{50}$ partie de sa valeur.

De 300° à 400° il est nécessaire de faire, pour une même température, une série d'observations pendulaires, pour des durées variant par exemple de $0^s,005$ à $0^s,15$. Le résultat de ces observations se représente en fonction du temps t par une formule empi-

rique

$$C = B + A t^{0,4}.$$

La limite B, calculée pour une durée nulle, se confond, au degré d'approximation des mesures, avec la charge à courte durée et à la température ordinaire.

7. *Conclusions générales.* — Ainsi, par ces expériences, *la constante diélectrique du mica rapportée fictivement à une durée nulle* se révèle à nous comme un élément d'une remarquable fixité. Dans des limites où la surface altérée du mica devient nettement conductrice, où le résidu récupérable augmente jusqu'à atteindre plusieurs centaines de fois sa valeur initiale, cette constante conserve sa valeur à $\frac{1}{50}$ près. La constante diélectrique appartient donc au groupe de propriétés spécifiques que la température altère peu, comme la densité, comme l'indice de réfraction auquel la théorie de Maxwell la rattache.

En ce qui concerne la relation de Maxwell $k = n^2$, il ressort de l'ensemble de ce travail qu'elle ne s'applique pas au mica. On objectera qu'elle se vérifierait peut-être pour des durées très inférieures au millième de seconde. Mais alors comment expliquer le double fait expérimental de l'invariabilité de *k tel que je l'ai mesuré* et de l'énorme variation du résidu avec la température, dans les mêmes limites?

Il serait plus logique d'imaginer que le mica n'est pas un diélectrique homogène à la manière des liquides purs; par exemple qu'il est constitué par des lamelles diélectriques parallèles aux plans de clivage, séparées par des lamelles électrolytiques; ou encore que des globules électrolytiques sont irrégulièrement disséminés dans sa masse. Il me paraît encore plus sage d'accepter purement et simplement les faits et d'en réserver l'explication jusqu'à ce que des expériences analogues aux précédentes aient été réalisées pour un nombre suffisant de substances.

Je me propose d'étendre incessamment mes mesures aux liquides doués d'une certaine conductibilité électrolytique.

SUR LA DOUBLE RÉFRACTION DU QUARTZ [1];

PAR M. J. MACÉ DE LÉPINAY.

J'ai passé en revue, dans un précédent travail [2], les principales applications que l'on pouvait faire de la connaissance exacte des différences $n' - n$ des indices principaux du quartz. Les nombres provisoires donnés à cette époque avaient uniquement pour but de permettre les calculs des expériences d'essai. Quant à ceux que j'ai ultérieurement communiqués à l'Académie des Sciences, ils sont un peu trop faibles [3], peut-être par suite de l'inexactitude de l'orientation des faces du quartz employé, peut-être aussi parce que des quartz de provenances différentes n'ont pas rigoureusement les mêmes propriétés. Je me suis donc proposé de reprendre cette étude, en utilisant le cube de 1^{cm} de côté qui m'avait servi à la détermination de la valeur absolue de la longueur d'onde de la raie D_2 : sa taille est vraiment parfaite, et ses dimensions sont connues, à $\frac{1}{37000}$ près environ, en fonction de cette longueur d'onde [4]. Je l'ai étendue à la totalité du spectre solaire visible et ultra-violet, et aux températures comprises entre $+1°$ et $+45°$, complétant ainsi, à ce dernier point de vue, les précédentes déterminations de MM. Fizeau [5], Dufet [6], Mallard et Le Chatelier [7].

I. La méthode de mesure employée repose, comme dans les recherches précédentes, sur l'observation du spectre cannelé de Fizeau et Foucault. Soient λ la longueur d'onde d'une certaine

---

(1) Le Mémoire complet a paru dans le n° 1 des *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.*

(2) *Journal de Physique,* 2e série, t. IV, p. 159 et 261; 1885.

(3) 2 nov. 1885. Ces écarts ne dépassent pas $\frac{1}{1500}$.

(4) *Journal de Physique,* 2e série, t. V, p. 405 et 411; 1886. J'ai pu, en étudiant le déplacement des franges de Fizeau et Foucault, lorsqu'on fait varier l'incidence, au voisinage de O, montrer que le défaut d'orientation de l'axe optique était très faible, et établir que l'erreur provenant de ce chef, commise sur les valeurs de $n' - n$, ne dépassait pas le $\frac{1}{100000}$ de leur valeur.

(5) *Annales de Chimie et de Physique,* 4e série, t. II, p. 143.

(6) *Journal de Physique,* 2e série, t. III, p. 251; 1884.

(7) *Comptes rendus,* 24 février 1890.

radiation, que nous supposerons mesurée dans l'air à 0° sous la pression normale, n' et n les indices principaux correspondants du quartz à la température de l'expérience, mais pris par rapport à l'air à 0° sous la pression normale, et enfin e l'épaisseur actuelle de la lame. Si l'on pose

$$p = \frac{2(n'-n)e}{\lambda},$$

p est une fonction continue de la longueur d'onde, dont les valeurs entières, paires ou impaires selon les orientations relatives du polariseur et de l'analyseur, correspondent aux régions du spectre qui coïncident avec les milieux des bandes noires qui sillonnent le spectre.

Soient dès lors a et b les distances d'une raie du spectre solaire aux deux bandes noires qui l'encadrent, k la valeur entière, connue, de p qui correspond à celle de ces deux bandes qui est située du côté du rouge, la valeur de p correspondant à cette raie pourra être considérée, si ces franges sont suffisamment rapprochées, comme donnée par

$$p = k + 2\frac{a}{a+b}.$$

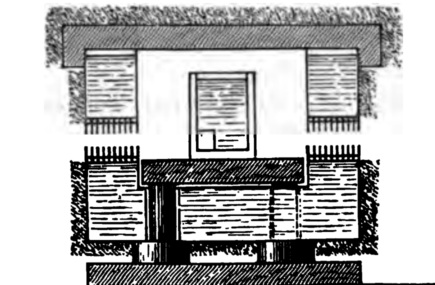
L'étude des indices du même quartz, faite antérieurement (¹), a fourni, du moins pour le spectre visible, des données suffisantes pour calculer, pour chaque raie, une valeur de p assez approchée pour que sa partie entière k fût déterminée sans ambiguïté. Dans la région ultra-violette, il suffisait de compter le nombre de bandes comprises entre une raie déjà étudiée et celle que l'on considérait.

Pour pouvoir connaître la température exacte du quartz, ce dernier était immergé dans un bain d'eau, contenu dans une cuve en crown, à faces planes et parallèles. Dans cette eau plongeaient un agitateur et le réservoir d'un thermomètre Baudin au $\frac{1}{10}$ de degré, dont l'étude avait été faite au préalable, en le comparant avec un thermomètre Tonnelot, en verre dur, étudié lui-même au Bureau international des Poids et Mesures. Les températures ont donc pu être rapportées à l'échelle du thermomètre à hydrogène.

(¹) *Journal de Physique*, 2e série, t. VI, p. 190; 1887.

L'étuve était constituée par une caisse à doubles parois en zinc, pleine d'eau, munie d'agitateurs, chauffée latéralement par un bec de gaz [1], fermée par un couvercle de bois et recouverte sur toute sa surface d'une couche épaisse d'ouate. Le fond en était percé de trois ouvertures, permettant de laisser passer trois tiges

Fig. 1.



d: bois qui soutenaient la cuve par l'intermédiaire d'une planchette. Cette étuve était percée, à la hauteur du quartz, de deux canaux destinés à laisser passer la lumière. On ne pouvait songer à fermer ces derniers par des plaques de verre qui auraient pu acquérir une double réfraction accidentelle sous l'action trop immédiate de l'air extérieur : chacun d'eux était simplement muni d'une douzaine de diaphragmes minces destinés à gêner la circulation de l'air extérieur.

On pouvait craindre, dans ces conditions, que le verre de la cuve n'acquît une double réfraction accidentelle. Il fut facile de vérifier que, si elle était sensible pendant la durée de la chauffe, l'erreur provenant de ce chef devenait inappréciable aussitôt que la température était devenue stationnaire, ce qui se produisait au bout de deux heures environ. Pour l'atténuer encore, on eut soin de répartir les expériences entre les diverses saisons, de sorte que la différence entre la température de la cuve et celle de l'atmosphère ne dépassa qu'exceptionnellement 10°.

L'appareil spectroscopique employé était constitué par un réseau concave de Rowland, de 195^{cm} de rayon; on en utilisait en général le premier spectre, produit sous diffraction normale (con-

(1) Par une disposition analogue à celle adoptée pour les filtrations à chaud.

dition particulièrement utile pour obtenir des clichés photographiques également nets sur toute leur étendue). On concentrait, sur la fente, la lumière issue de l'analyseur au moyen d'une lentille de quartz ($f = 60^{cm}$). Dans le cas des radiations visibles, les mesures micrométriques s'effectuaient au moyen d'une loupe de Fresnel; dans celui des radiations invisibles, le spectre venait se dessiner directement sur la plaque sensible (gélatinobromure).

J'ajouterai quelques détails relatifs aux opérations photographiques.

Afin d'éviter toute absorption, le miroir de l'héliostat était remplacé par un prisme à réflexion totale en quartz; le polariseur et l'analyseur étaient constitués par deux gros Foucault. Pour les mêmes raisons, on dut supprimer la cuve de verre et laisser le cube de quartz, isolé, au centre de l'étuve. Pour connaître sa température, qui n'était qu'approximativement indiquée par le thermomètre, on relevait, pendant la durée même de l'impression photographique, la position de la raie b_1, par rapport aux deux bandes sombres qui la comprenaient. Les résultats des expériences antérieures, relatives à cette raie, permettaient de calculer la température exacte du quartz à laquelle correspondait le cliché obtenu.

Pour éviter toute confusion, résultant de ce qu'une raie étudiée pouvait être rendue indistincte par suite de la trop grande proximité d'une frange, on limita la hauteur de la fente éclairante au moyen d'un écran mobile qui permettait de réaliser successivement sur chaque cliché deux spectres contigus, dont l'un présentait les bandes de Fizeau et Foucault, et dont l'autre en était dépourvu, grâce à la suppression de l'analyseur.

Ajoutons enfin que les mesures micrométriques sur les clichés n'ont pu être effectuées sur les négatifs : les franges s'y présentaient en effet sous l'aspect de bandes transparentes larges et à bords diffus. Les mesures étaient beaucoup plus précises sur les positifs dans lesquels ces mêmes franges, noires, sont très nettes et paraissent beaucoup plus étroites.

Pour chacune des raies du spectre visible, on a effectué quinze séries de mesures réparties entre les températures $+1^{\circ}$ et $+45^{\circ}$ environ; pour celles du spectre ultra-violet, on en a effectué huit au minimum entre les mêmes limites.

II. J'exposerai brièvement la marche que j'ai suivie pour établir une formule générale, donnée plus loin, qui représente l'ensemble des résultats des expériences.

Posant tout d'abord

$$p = p_0(1 - at - bt^2),$$

j'ai calculé, pour chacune des radiations étudiées, par la méthode des moindres carrés, les valeurs des constantes p_0, a, b. Je crois inutile de les reproduire ici. Signalons seulement ce fait que, si le coefficient b est en général assez mal déterminé, son existence et son signe sont hors de doute; sur seize valeurs, en effet, deux seulement sont négatives, et ces dernières sont relatives à deux raies, N et Q, pour lesquelles les observations sont particulièrement difficiles.

Afin de simplifier les calculs ultérieurs, j'ai supposé que le rapport $\frac{b}{a}$ était indépendant de la longueur d'onde, et ai admis, pour sa valeur, la moyenne de celles qui correspondent aux raies D et b_1, pour lesquelles les mesures sont les plus précises,

$$\frac{b}{a} = 1,15 \times 10^{-3}.$$

Partant de cette hypothèse, il a suffi, pour achever la détermination des deux coefficients, d'admettre pour chaque raie, comme valeur définitive de a, un nombre tel que le coefficient moyen, $a + 45\,b$, restât inaltéré. Les valeurs de a, ainsi calculées, varient très régulièrement avec la longueur d'onde.

Posons alors

$$(n' - n)_t = (n' - n)_0(1 - \alpha t - \beta t^2).$$

Les nouveaux coefficients ainsi introduits se déduisent immédiatement des précédents, a et b, et de ceux, a' et b', qui caractérisent la dilatation du quartz dans une direction perpendiculaire à l'axe définis par

$$e_t = e_0(1 + a't + b't^2) \text{ (}^1\text{)}.$$

---

(1) On a admis les nombres obtenus par M. R. Benoît, *Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures*, t. VI.

La relation

$$p_t = \frac{2(n'-n)_t e_t}{\lambda}$$

donne en effet

$$\frac{(n'-n)_t}{(n'-n)_0} = 1 - \alpha t - \beta t^2 = \frac{1 - at - bt^2}{1 + a't + b't^2},$$

d'où

$$\alpha = a + a', \qquad \beta = b + b' - a'(a + a').$$

Les valeurs de $(n'-n)_0$ s'obtiennent enfin par la relation

$$(n'-n)_0 = \frac{p_0 e_0}{\lambda}.$$

Les données numériques, relatives aux longueurs d'onde, nécessaires pour effectuer ce dernier calcul, ont été les suivantes :

Dans l'étendue du spectre visible, de B_1 à h, on a admis les moyennes des résultats de MM. Müller et Kempf et de M. Rowland.

Pour les raies comprises entre H' et Q, les longueurs d'onde ont été déduites des photographies de M. Rowland, en corrigeant les lectures au moyen des longueurs d'onde des raies étalons les plus voisines, déterminées par lui.

Quant aux raies r et S, je ne possédais d'autres données que celles dues à MM. Mascart et Cornu (¹), établies alors que l'insuffisance des moyens d'investigation, et en particulier des réseaux, ne pouvait permettre d'atteindre un degré de précision suffisant pour les recherches actuelles. Les longueurs d'onde admises ont été déduites de plusieurs séries concordantes de mesures micrométriques effectuées sur mes clichés.

Toutes ces longueurs d'onde ont été ramenées à correspondre à $\lambda_{D_1} = 5,89 \times 10^{-5\text{cm}}$, valeur déduite de mes mesures relatives au quartz employé.

III. La différence $(n'-n)_t$ est en même temps une fonction de la longueur d'onde et de la température. Il s'agissait d'établir une formule générale permettant de représenter, à ce double point de vue, l'ensemble des résultats obtenus.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1ʳᵉ série, t. I, p. 219; 1884, et 2ᵉ série, t. IX, p. 21; 1880.

J'ai posé à cet effet

$$(n'-n)_t = (n'-n)_0 - At - Bt^2.$$

Cette forme est particulièrement commode pour les applications. Les coefficients A et B se déduisent immédiatement des coefficients α et β précédemment définis.

Pour exprimer $(n'-n)_0$ en fonction de la longueur d'onde, on est conduit à essayer tout d'abord la formule de Cauchy réduite à ses deux premiers termes. En partant des données relatives aux raies B_1 et Q, on trouve

$$10^3(n'-n)_0 = 8,72530 + \frac{0,1386}{\lambda^2},$$

les longueurs d'onde étant exprimées en millièmes de millimètre.

Cette formule est insuffisante. On trouve, en effet, pour ne citer que quelques nombres :

Raies.	Observation — calcul.
B_1	0
D.............	+ 0,00497
F.............	+ 0,00086
L.............	— 0,00835
Q.............	0
S.............	+ 0,01163

Construisons alors une courbe dont les abscisses soient $x = \frac{1}{\lambda^2}$, et les ordonnées $y =$ observation — calcul. Si la formule de Cauchy à trois termes était suffisante, la courbe très régulière ainsi construite serait une parabole. Les nombres précédents suffisent pour montrer qu'il n'en est rien. Par contre, cette courbe est très bien représentée par une équation de la forme

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \frac{\delta}{x} = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{\lambda^4} + \delta\lambda^2,$$

et l'on trouve finalement que l'on peut poser

$$10^3(n'-n)_0 = 8,86410 + \frac{0,107057}{\lambda^2} + \frac{0,0019893}{\lambda^4} - 0,17175\lambda^2.$$

Les écarts entre l'observation et le calcul (*voir* le Tableau)

restent alors compris dans les limites des erreurs possibles. La formule ainsi obtenue est dérivée de celle de Briot.

Quant aux coefficients A et B, fonctions tous deux de la longueur d'onde, on remarque immédiatement, en faisant les calculs, que le rapport

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$$

peut être considéré comme constant et que sa valeur moyenne est $\frac{1}{900}$. La formule générale se réduit donc à

$$(n' - n)_t = (n' - n)_0 - At\left(1 + \frac{t}{900}\right)$$

Les valeurs de A, ainsi obtenues, sont inscrites dans la sixième colonne du Tableau. On voit que l'influence de la température sur la double réfraction du quartz décroît rapidement avec la longueur d'onde.

Remarquant que l'expression de $n' - n$ doit rester de même forme à toute température, nous sommes conduit à poser

$$A = p + \frac{q}{\lambda^2} + \frac{r}{\lambda^4} + s\lambda^2.$$

En cherchant à simplifier cette formule, j'ai trouvé que l'on pouvait représenter très exactement les résultats des expériences en posant

$$A = 10^{-6}(1,010 + 0,20\lambda^2),$$

de telle sorte que la formule complète devient

$$10^3(n' - n)_t = 8,86410 + 0,107057\frac{1}{\lambda^2} + 0,0019893\frac{1}{\lambda^4}$$
$$- 0,17175\lambda^2 - 10^{-3}t\left(1 + \frac{t}{900}\right)(1,01 + 0,2\lambda^2).$$

En prenant comme unité la longueur d'onde de la raie D_2 (1),

(1) Je crois qu'il y aurait le plus grand avantage à exprimer de même toutes les grandeurs physiques fonctions de la longueur d'onde. On éviterait ainsi les confusions pouvant provenir du choix, différent pour chaque auteur, de l'unité de longueur et de la valeur de la longueur d'onde de la raie D_2.

cette formule devient

$$10^3(n'-n)_t = 8,86410 + 0,308592\frac{1}{\lambda^2} + 0,016529\frac{1}{\lambda^4}$$
$$- 0,05958\lambda^2 - 10^{-3}t\left(1+\frac{t}{900}\right)(1,01 + 0,069\lambda^2).$$

L'examen des nombres inscrits dans le Tableau suivant permet de juger à la fois de l'exactitude des formules ainsi établies et du degré de précision atteint dans ces expériences.

Raies.	λ.	$10^3(n'-n)_0$. (Observation).	Obs. — Calc.	10^6A observé.	10^6A calculé.
B_1 (1)...	$\overset{\mu}{0},688385$	9,01767	+ 0,00019	1,104	1,104
C.......	0,658285	9,04934	− 7	1,098	1,096
D (2)....	0,589300	9,12897	− 24	1,081	1,079
b_1......	0,518368	9,24390	− 2	1,062	1,064
F.......	0,486139	9,31212	0	1,064	1,057
G.......	0,430797	9,46707	+ 22	1,069	1,047
h.......	0,410182	9,54159	− 22	1,037	1,044
H′ (3)...	0,395287	9,60420	+ 30	1,045	1,041
L.......	0,382042	9,66555	− 43	1,032	1,039
M.......	0,372743	9,71406	+ 24	1,039	1,038
N.......	0,358143	9,79741	− 18	1,031	1,036
O.......	0,344063	9,88944	− 61	1,029	1,034
P.......	0,336116	9,94734	− 83	1,038	1,033
Q.......	0,328673	10,00699	− 2	1,042	1,032
r.......	0,314395	10,13518	+ 127	1,057	1,030
S (4)....	0,310089	10,17638	+ 0,00016	1,009	1,029

(1) Raie isolée, $\lambda = 0^\mu,68841$ d'après la photographie de M. Rowland, division 20,4 du dessin de Thollon (*Journal de Physique*, 2e série, t. III, p. 421; 1884).

(2) Les nombres inscrits sont les moyennes de ceux qui sont relatifs aux deux raies du groupe D.

(3) Milieu d'un groupe de trois raies très voisines, en moyenne $\lambda = 0^\mu,39532$ d'après la photographie de M. Rowland.

(4) Milieu du groupe.

E. LOMMEL. — Sur les couleurs de mélange (*Wied. Ann.*, t. XLIII, p. 473; 1891).

Deux constructions graphiques sont employées pour trouver la couleur et le degré de saturation de la teinte obtenue par le mélange, en proportions connues, de radiations simples : celle de Newton et le triangle des couleurs de Maxwell. La première est notoirement insuffisante; la seconde conduit à des résultats compliqués, même dans le cas des radiations simples. L'auteur a cherché à améliorer et à rendre rationnelle la construction de Newton.

Prenons, comme spectre type, un spectre en nombre de vibrations, c'est-à-dire tel que la distance de deux radiations simples soit proportionnelle à la différence de leurs nombres de vibrations $\left(\varphi = a + \frac{b}{\lambda}\right)$. Nous imaginerons que ce spectre est enroulé sur une circonférence, et admettrons, conformément à la règle de Newton généralisée, que, si l'on superpose des proportions $f(\lambda) = f\left(\frac{b}{\varphi - a}\right)$ de chaque radiation, le résultat obtenu est figuré par la position du centre de gravité de masses $d\varphi f\left(\frac{b}{\gamma - a}\right)$ réparties sur cette circonférence. Le teinte est celle qui correspond au point de la circonférence où aboutit le rayon vecteur de ce centre de gravité, et le degré de saturation est proportionnel à sa distance au centre.

Des deux constantes a et b qui définissent le mode d'enroulement du spectre, l'une, a, est, au fond, arbitraire. Quant à l'autre, elle doit être choisie de telle sorte qu'aux extrémités d'un même diamètre correspondent des couleurs simples complémentaires. Ici l'auteur me semble commettre une erreur en prenant comme teintes complémentaires celles ($\lambda_1 = 656,2$, $\lambda_2 = 492,1$) qui résultent d'expériences de Helmholtz effectuées au moyen d'un spectre prismatique. Si l'on suppose que les radiations qui traversent deux fentes *égales,* coïncidant avec les régions indiquées dans un spectre prismatique, donnent du blanc par leur superposition, deux fentes égales, introduites dans les mêmes régions d'un spectre normal, donneraient du vert, par suite du plus grand étalement du rouge, et donneraient du rouge dans le cas d'un spectre tel que celui qu'emploie l'auteur. Le Tableau des couleurs com-

plémentaires donné par Helmholtz correspond uniquement au spectre prismatique employé par lui.

On doit voir néanmoins dans cet essai l'indication d'une méthode qui peut devenir précieuse (l'auteur l'applique en particulier aux couleurs des lames minces). Signalons, en particulier, ce fait que, du moins avec la valeur admise pour b, le spectre occupe plus d'une circonférence, de sorte que l'on se trouve introduire le pourpre, résultat de la superposition des radiations extrêmes du spectre.

J. Macé de Lépinay.

A. HUSSEL. — Sur la rotation des rayons infra-rouges dans le quartz; *Wied. Ann.*, t. XLIII, p. 498; 1891.

Ce travail a pour but de compléter les données numériques relatives au pouvoir rotatoire du quartz obtenues par Soret et Sarasin ([1]). La méthode employée, imaginée par Lommel, est ingénieuse.

Soit un biprisme de Fresnel (destiné à montrer la double réfraction circulaire du quartz dans la direction de l'axe). Faisons tomber normalement à l'une des faces terminales, normales à l'axe, un faisceau de lumière polarisée rectilignement, et recevons la lumière émergente sur un analyseur, croisé par exemple avec le polariseur. La rotation du plan de polarisation est nulle dans un plan parallèle aux bases des prismes accolés et équidistant de celles-ci.

Dans un plan parallèle, distant de y du premier, cette rotation est

$$\rho = \rho_0 \frac{2l}{h} y,$$

où l est la longueur du biprisme, h sa hauteur, ρ_0 le pouvoir rotatoire. Dans les conditions définies plus haut, la face terminale du biprisme apparaîtra recouverte de franges noires parallèles aux arêtes du prisme, équidistantes, et dont les positions sont données

---

([1]) *Journal de Physique*, 2e série, t. II, p. 381; 1883.

par

$$\frac{2l}{h}\rho_0\gamma = n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Supposons que la lumière éclairante soit de la lumière blanche, et que, après avoir fixé contre la face terminale du biprisme la fente d'un spectroscope, orientée normalement aux franges, on observe le spectre obtenu. Ce dernier sera sillonné longitudinalement de franges plus resserrées dans le bleu que dans le rouge (spectre en éventail). Si l'on mesure les distances e, e' de deux franges, pour les longueurs d'onde λ, λ', les pouvoirs rotatoires correspondants ρ_0, ρ'_0 sont donnés par

$$\frac{e}{e'} = \frac{\rho'_0}{\rho_0}.$$

Après avoir contrôlé l'exactitude de cette méthode par des mesures effectuées dans la région visible du spectre solaire, l'auteur l'a étendue aux radiations infra-rouges, jusqu'à la longueur d'onde $\lambda = 1^{\mu}$ environ. Il a utilisé, à cet effet, la méthode phosphorographique de Lommel, identique, comme principe, à celle de Becquerel, et qui permet de rendre visible le spectre infra-rouge en utilisant la propriété que ces radiations possèdent de détruire la fluorescence d'une substance fluorescente excitée par des radiations violettes ou ultra-violettes [1]. On peut photographier le spectre ainsi rendu visible, dans lequel on discerne, en même temps que les franges du spectre en éventail, les raies connues infra-rouges du spectre solaire, et effectuer sur la photographie obtenue les mesures micrométriques nécessaires. Les résultats obtenus sont les suivants :

Lignes.	λ	ρ_0 observé.	ρ_0 calculé.
A......	0,7601	12,668	admis (Soret et Sarasin).
Z......	0,8220	10,909	10,892
X......	0,8469	10,167	10,193
Y......	0,8990	9,117	9,065
[illegible]......	0,93[illegible]	8,467	8,40[illegible]
[illegible]......	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[1] Ed. Becquerel, *Journal de Physique*, [illegible] série, t. VI, p. [illegible]; 1877, et Lommel, *Wied. Ann.*, t. XL, p. [illegible]; 18[illegible].

Les nombres calculés l'ont été par la formule de Lommel

$$\rho_0 = \frac{a}{\lambda^2\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2},$$

avec

$$\log a = 0,8555912,$$
$$\log\lambda_0^2 = \bar{3},9351257.$$

J. Macé de Lépinay.

J.-J. THOMSON. — Sur la vitesse de propagation de la décharge lumineuse de l'électricité à travers un gaz raréfié; *Proceedings of the royal Society*, t. XLIX, p. 84; 1891.

Bien que la détermination de la vitesse de propagation de la décharge lumineuse de l'électricité à travers les gaz soit éminemment propre à nous renseigner sur la manière dont s'effectue cette décharge, aucune tentative n'a été faite dans cette direction depuis Wheatstone qui, en 1835, observa la décharge lumineuse à travers un tube de six pieds de long à l'aide d'un miroir tournant et trouva que la vitesse de propagation était supérieure à $2\times10^{7\text{cm}}$ par seconde. La vitesse des molécules lumineuses est loin d'être aussi grande, car Jahn [1] a montré que les raies du spectre du gaz dans le tube à décharge ne se déplacent pas de plus de $\frac{1}{40}$ de la distance des raies D, quand la ligne de vision est dans la direction du tube. Il en résulte, d'après le principe de Doppler, que les particules qui émettent la lumière n'ont pas une vitesse supérieure à 1600^{m} par seconde.

Les expériences de Wheatstone ne donnent qu'une limite inférieure de la vitesse de la décharge; rien ne prouve qu'elle soit finie. L'auteur s'est proposé de mesurer cette vitesse et en même temps de voir de quelle électrode part la décharge.

Plücker [2] conclut de l'action d'un aimant sur la décharge que celle-ci part de l'anode; les expériences de J. Thomson confirment ce fait.

---

(1) *Wied. Ann.*, t. VIII, p. 675; 1879.
(2) *Pogg. Ann.*, t. CVII, p. 89; 1859.

J. Thomson emploie un tube de verre d'environ 15^{m} de long et 5^{mm} de diamètre recouvert de noir de fumée, sauf en deux endroits. On fait le vide dans ce tube et on y fait passer un courant qui donne, dans l'air, des étincelles de 6 ou 7 pouces. La lumière qui passe par une des parties découvertes tombe directement sur un miroir qui fait 500 tours par seconde; celle qui passe par l'autre est réfléchie par un miroir plan sur le miroir tournant. Les images des portions brillantes du tube, après réflexion sur le miroir tournant, sont reçues dans une lunette et la disposition des miroirs est telle que, lorsque le miroir tournant est au repos, les images apparaissent comme des parties d'une même droite horizontale.

Les observations montrent que, une fois toutes les quatre minutes environ, des images nettes des parties brillantes du tube peuvent être aperçues dans la lunette. Ces images ne sont pas sensiblement élargies, mais elles ne sont plus tout à fait sur la même ligne droite. Le déplacement relatif de ces lignes changeait quand on renversait le sens du courant ou le sens de rotation du miroir.

Le déplacement relatif des images est dû à la vitesse finie avec laquelle se propage le phénomène lumineux. En déterminant la vitesse de rotation du miroir, le déplacement vertical des images et la distance entre les deux portions découvertes du tube, on a pu calculer la vitesse v de propagation du phénomène lumineux. On a ainsi trouvé

$$v = 1{,}6 \times 10^{10\,\mathrm{cm}},$$

c'est-à-dire une vitesse environ moitié de celle de la lumière. Cette valeur ne doit être regardée que comme une valeur approximative et non comme une détermination exacte.

La partie principale de la décharge lumineuse dans un long tube à vide a son origine à l'électrode positive. Ce fait peut *a priori* sembler en contradiction avec ce résultat que la décharge a lieu plus aisément, c'est-à-dire avec une plus petite valeur de la force électromotrice, à l'électrode négative qu'à l'électrode positive.

D'autre part, les rayons ultra-violets peuvent faire partir une décharge d'un morceau de métal électrisé négativement, et non d'un morceau de métal électrisé positivement.

Ces considérations ne semblent toutefois pas pouvoir s'ap-

pliquer quand la force électromotrice est suffisante pour faire partir une décharge de l'électrode positive. Ce qu'il importe de considérer dans ce cas, c'est le temps relatif que mettent les deux électricités à quitter leurs électrodes respectives. Si le temps que met l'électricité positive à quitter l'anode est beaucoup moindre que celui que met l'électricité négative à quitter la cathode et si ce dernier temps est beaucoup plus grand que celui que met la décharge lumineuse à traverser une grande longueur du tube, on comprend facilement comment la lueur de la colonne positive qui remplit le tube doit avoir son origine à l'anode.

Or, Spottiswoode et Moulton, dans leur Mémoire sur *l'état sensible de la décharge électrique* (¹), ont montré :

1° Que l'électricité négative met beaucoup plus de temps à quitter la cathode que l'électricité positive n'en met à quitter l'anode;

2° Que le temps mis par l'électricité négative pour quitter la cathode est beaucoup plus long que le temps mis par le phénomène lumineux pour traverser le tube (qui, dans leurs expériences, n'était pas très long).

Le fait que l'électricité positive quitte l'anode plus rapidement que l'électricité négative ne quitte la cathode explique une des circonstances importantes de la décharge électrique; l'accumulation d'électricité positive au voisinage de la cathode.

L'explication de la vitesse considérable de propagation de la colonne positive est très importante. La théorie qui semble la plus probable à l'auteur est que le passage de l'électricité est dû à la dissociation des molécules en atomes, en d'autres termes, que *la décomposition chimique ne doit pas être considérée comme une circonstance accidentelle dans la décharge électrique, mais comme un trait essentiel de la décharge, qui ne pourrait avoir lieu sans elle.*

Mais ici cette décomposition ne peut pas consister en un échange consécutif des atomes entre les molécules adjacentes, car les atomes se déplaceraient avec la vitesse de la décharge, c'est-

(¹) *Phil. Trans.*, p. 165 1879.

à-dire la moitié de la vitesse de la lumière. Les atomes posséderaient alors une énergie cinétique qu'il est facile de calculer et qui serait 800 fois plus grande que celle du champ électrique.

Dans un Mémoire publié dans le *Philosophical Magazine* (1), l'auteur a montré qu'on pouvait concilier l'hypothèse de la dissociation avec l'existence d'une vitesse considérable et qu'on explique ainsi en particulier les stries de la décharge.

Pour étudier plus complètement les lois de la décharge, on peut la faire passer dans un tube plusieurs fois recourbé dans lequel on peut à volonté introduire ou supprimer de petites colonnes de mercure; la décharge chemine avec la même vitesse, mais elle a plus de difficulté à passer quand on fait monter le mercure; son éclat diminue.

C'est à une différence dans l'action chimique entre le gaz et les électrodes qu'on est d'abord porté à attribuer la différence d'aspect de la décharge aux deux pôles. L'auteur croit que cette explication n'est pas admissible; toutefois l'existence d'une action chimique des deux électrodes lui semble nécessaire.

Si la différence d'action chimique produit la diversité de forme de la décharge, on doit s'attendre à voir disparaître cette diversité en employant comme électrodes un liquide dont la vapeur raréfiée conduira le courant. Or, en essayant l'eau et le brome à des températures suffisamment basses pour que la tension de leur vapeur fût très faible, on constata les différences habituelles dans la décharge aux deux électrodes; de même en employant l'arsenic et sa vapeur.

L'auteur a cherché à obtenir une décharge circulaire due à l'induction dans un tube de verre circulaire fermé sur lui-même, le circuit primaire étant formé par une tige de cuivre en fer à cheval à travers laquelle on déchargeait une bouteille de Leyde. On voyait alors une lueur uniforme dans le tube. Cet effet était dû à l'induction électrostatique, car un écran de mince papier buvard humide, qui n'arrête pas les actions électrodynamiques, suffisait pour annuler l'action.

La force électromotrice totale maxima le long du circuit secon-

---

(1) *Phil. Mag.*, août 1890.

daire est $\frac{VM}{L}$, V étant la différence de potentiel des armatures de la bouteille de Leyde, M le coefficient d'induction mutuelle, L le coefficient de self-induction du circuit primaire. Cette valeur était beaucoup plus grande que la force électromotrice nécessaire pour produire une décharge entre les électrodes dans un tube de même longueur; toutefois les efforts de l'auteur pour obtenir une décharge restèrent longtemps sans résultat; ce n'est que quelques jours après avoir lu son Mémoire à la Société Royale qu'il en obtenait une dans un tube de 45^{cm} de circonférence environ. Cette décharge ne présentait aucun signe de stratification.

René Paillot.

J.-J. THOMSON. — Sur l'explication des propriétés du champ électrique au moyen des tubes d'induction électrostatique; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 149-172; 1891.

De nombreuses expériences semblent montrer que le passage de l'électricité à travers les gaz est, comme le passage à travers les électrolytes, accompagné de phénomènes chimiques. M. Thomson admet qu'il en est encore ainsi pour le passage à travers les métaux, les alliages et, en général, tout corps conducteur. La conduction de l'électricité s'explique alors par les déformations qu'éprouvent, du fait du mouvement des ions, les tubes d'induction joignant deux molécules du corps. Les expressions des vitesses des ions, déduites de cette explication, sont d'ailleurs identiques à celles qui ont été obtenues théoriquement par Hittorf et Kohlrausch et qui ont été vérifiées par les expériences du professeur Lodge.

L'auteur montre ensuite comment les propriétés magnétiques des courants, les phénomènes d'induction électromagnétique, etc., peuvent s'expliquer par l'hypothèse que les tubes d'induction électrostatique du champ sont en mouvement. Cette méthode conduit aux mêmes relations que la théorie de Maxwell.

Le Mémoire se termine par l'application de la méthode à la discussion des trois problèmes suivants : l'étude des phénomènes résultant du mouvement d'une sphère chargée; l'étude du champ magnétique autour d'un circuit circulaire de grand rayon; la re-

cherche des effets magnétiques produits par la rotation de disques électrisés. Cette dernière application offre un intérêt particulier, par suite des expériences récentes de M. Rowland.

J. Blondin.

J. Mc. COWAN. — Sur l'échauffement des conducteurs par les courants électriques et sur la distribution électrique dans les conducteurs ainsi échauffés: *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 259-275; 1891.

Fourier et tous les savants qui, à son exemple, se sont occupés de la conduction thermique, n'ont traité que le cas où les sources de chaleur sont superficielles. Dans son Mémoire, M. Mac Cowan montre que le cas où il existe, outre les sources superficielles, un dégagement de chaleur interne produit par un courant électrique, peut se ramener au précédent.

La première équation du problème s'obtient en écrivant qu'il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur du corps; par suite, elle est

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dx} c \frac{dV}{dx} + \frac{d}{dy} c \frac{dV}{dy} + \frac{d}{dz} c \frac{dV}{dz} = 0,$$

où c désigne la conductibilité électrique et V le potentiel en un point.

La quantité de chaleur qui pénètre par conduction, pendant l'intervalle de temps dt, dans l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, a pour expression

$$\left(\frac{d}{dx} k \frac{d\theta}{dx} + \frac{d}{dy} k \frac{d\theta}{dy} + \frac{d}{dz} k \frac{d\theta}{dz}\right) dx\,dy\,dz\,dt,$$

k étant la conductibilité thermique et θ la température; celle qui est engendrée par le courant est, d'après la loi de Joule,

$$jc\left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2}\right) dx\,dy\,dz\,dt,$$

j étant l'équivalent calorifique du travail. D'autre part, si l'on appelle s la capacité thermique de la substance au point considéré, la quantité de chaleur totale reçue par l'élément a pour

valeur

$$\frac{d}{dt} s\theta \, dx \, dy \, dz \, dt.$$

En écrivant que cette expression est égale à la somme des deux précédentes, on obtient la seconde équation du problème

$$\text{(B)} \quad \frac{d}{dt} s\theta = \frac{d}{dx} k \frac{d\theta}{dx} + \frac{d}{dy} k \frac{d\theta}{dy} + \frac{d}{dz} k \frac{d\theta}{dz} + jc \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2} \right).$$

Les quantités c, s, k étant des fonctions de θ, un conducteur primitivement homogène lorsque sa température est uniforme cesse de l'être lorsque la température de ces divers points varie par le passage d'un courant. Toutefois, on peut, à titre de première approximation, étudier le cas d'un conducteur restant homogène à chaque instant. Les équations précédentes deviennent alors

$$\text{(C)} \qquad c \frac{d^2V}{dx^2} + c \frac{d^2V}{dy^2} + c \frac{d^2V}{dz^2} = c \, \Delta V = 0,$$

$$\text{(D)} \qquad s \frac{d\theta}{dt} = k \, \Delta\theta + jc \left(\frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2} \right),$$

et, si l'on pose

$$U = \tfrac{1}{2} jc V^2 + k\theta,$$

on voit facilement que la dernière équation peut s'écrire

$$\text{(E)} \qquad s \frac{dU}{dt} = k \Delta U.$$

Or les deux équations (C) et (E) sont de la même forme que celles que l'on obtient lorsque les sources calorifiques sont superficielles ; le problème de M. Mac Cowan se trouve donc résolu immédiatement dans les cas où le problème de Fourier l'a été.

Quelques cas intéressants peuvent d'ailleurs être traités en partant des équations (C) et (D), à l'aide d'une méthode indirecte, imaginée par Saint-Venant et appliquée par lui à de nombreux problèmes de Mécanique.

Un autre cas intéressant, examiné par l'auteur, est celui où les conditions sont telles qu'à la fin elles ne varient plus avec le temps. Alors les premiers membres des équations (B), (D) et (E) se réduisent à zéro.

Lorsqu'on tient compte de la variation de k, s, c avec θ, au problème de la recherche de la distribution thermique à un certain instant, vient s'ajouter celui de la détermination de la distribution électrique au même instant. La résolution de ces deux problèmes présente des difficultés mathématiques insurmontables dans le cas général; toutefois, comme le montre l'auteur, il est possible d'obtenir, dans plusieurs cas, la distribution thermique et la distribution électrique finales lorsque les conditions limites sont indépendantes du temps. En effet, si l'on pose $k = cf'(\theta)$, l'équation (B) peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}c\frac{d[f(\theta)+\frac{1}{2}jV^2]}{dx}+\frac{d}{dy}c\frac{d[f(\theta)+\frac{1}{2}jV^2]}{dy}+\frac{d}{dz}c\frac{d[f(\theta)+\frac{1}{2}jV^2]}{dz}=0,$$

et, comme elle est alors de la même forme que l'équation (A), il est possible d'obtenir des solutions particulières du système de ces équations.

En terminant, l'auteur s'occupe des conducteurs hétérogènes et *anisotropes*. La complication des équations devient extrême; cependant on peut encore en déduire des conséquences intéressantes dans quelques cas particuliers. J. Blondin.

F.-J. SMITH. — Sur quelques effets du magnétisme sur des tiges de fer, de nickel, et d'autres métaux ayant reçu une torsion permanente; et sur une nouvelle forme de style de chronographe; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXII, p. 383-396; 1891.

Un fil métallique vertical, portant un miroir servant à la mesure des déviations, est placé suivant l'axe d'une bobine magnétisante. Avec un fil de fer bien recuit et sans torsion permanente appréciable, la fermeture du courant magnétisant produit une petite déviation du miroir; sa rupture ramène le miroir dans sa première position. Lorsque le fil est primitivement tordu, la torsion temporaire due à la magnétisation est plus considérable; elle se produit dans le sens de la torsion initiale, quelle que soit la direction du courant; elle croît à peu près proportionnellement à la torsion initiale jusqu'à une certaine valeur de celle-ci, au delà de laquelle elle diminue; pour une même valeur de la torsion per-

manente et pour des valeurs croissantes de la force magnétisante, elle commence par croître pour décroître ensuite. Les mêmes phénomènes s'observent avec le nickel, mais ils n'ont pas lieu avec des fils de métaux non magnétiques ou diamagnétiques.

Si l'on intercale, sur le circuit de la bobine, un diapason interrupteur entretenu électriquement, une tige de fer possédant une torsion permanente, placée dans l'intérieur de la bobine, fait entendre un son musical. Ce son doit être attribué aux variations de la torsion de la tige, et ces variations peuvent être assez considérables pour communiquer un mouvement sensible à une longue aiguille fixée normalement à l'extrémité libre de la tige. En plaçant un cylindre enduit de noir de fumée, M. Smith a obtenu un chronographe capable d'enregistrer les vibrations d'un diapason effectuant 1000 vibrations par seconde, avec une netteté beaucoup plus grande que celle qu'on obtiendrait par l'inscription directe.

J. Blondin.

THE AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE.

T. XLI (1er semestre 1891).

E.-L. NICHOLS. — Arc électrique alternatif entre une sphère et une pointe, p. 1-12.

Il résulte d'expériences soigneusement faites par MM. Archbold et Teeple que, lorsque l'on fait terminer les deux pôles d'une bobine secondaire du transformateur, l'un par une petite boule, l'autre par une pointe, et que l'on fait passer le courant dans le circuit primaire, on a, pour un écartement convenable de la boule et de la pointe, un courant continu dans un galvanomètre mis en dérivation, reliant la boule à la pointe. En étudiant, par la méthode stroboscopique, la différence de potentiel entre les deux pôles pour une phase variable du courant alternatif, on arrive à la conclusion que, pour la distance minimum à laquelle l'arc éclate entre les deux, il éclate de la pointe à la boule : la distance explosive de la boule à la pointe est plus grande que de la pointe à la boule; de là résulte dans le galvanomètre en dérivation un courant continu marchant de la boule à la pointe par le galvanomètre.

J.-H. GORE. Système décimal de mesures au XVIIe siècle.

L'auteur rappelle que la première idée nette du système décimal est due à un prêtre français, Gabriel Mouton, de l'église collégiale Saint-Paul de Lyon. Il partait de la minute d'arc du grand cercle terrestre; cette unité, *milliare,* valait mille fois l'unité ordinaire *virga,* celle-ci étant divisée en 10 parties, appelées *virgula,* et la *virgula* de même en 10, 100, 1000. Mouton se fonde sur les mesures géodésiques de Riccioli pour fixer la longueur de son unité théorique en unités usuelles. De plus, il a eu l'idée, pour avoir une unité pratique, toujours identique à elle-même et facile à retrouver, de déterminer la durée d'oscillation du pendule ayant pour longueur la *virga*. Le Mémoire de Mouton date de 1670. Il ne semble pas que ses successeurs lui aient suffisamment rendu justice.

R.-W. WOOD. Effets de la pression sur la glace, p. 30-33.

On explique souvent les déplacements des glaciers par la fusion de la glace sous l'influence de la pression, pression suivie d'un regel. M. Wood a fait des expériences pour voir quelles pressions peut supporter la glace sans fondre. En creusant un orifice de 46 pouces carrés et de 4 pouces de profondeur dans un bloc d'acier, et pratiquant dans la paroi du bloc un trou de $\frac{1}{12}$ de pouce communiquant avec le fond du premier comme la lumière d'un canon, on arrive, en comprimant dans l'orifice une masse de glace à 0° avec un piston d'acier, à faire jaillir un petit cylindre de glace par le trou étroit, quand on atteint une pression de 3 tonnes par pouce. Il n'y a pas de liquéfaction proprement dite. Une autre expérience, celle qui consiste à introduire de petites balles solides dans le bloc de glace en des points déterminés et à voir la pression nécessaire pour les faire tomber au fond, prouve que la glace n'est pas devenue liquide quand elle a subi une pression de 933 atmosphères. Elle a gardé au moins une viscosité suffisante pour empêcher les balles solides de se déplacer dans son intérieur. Or la profondeur maximum qu'ont pu avoir les glaciers (à l'époque glaciaire) n'a jamais dépassé 2 milles, ce qui correspond à 266 atmosphères de pression au fond. Il faut donc être très circonspect

dans les théories qui attribuent un rôle considérable à la fusion par pression dans les phénomènes géologiques.

A.-M. MAYER. — Quelques propriétés physiques du caoutchouc ou de l'ébonite, p. 54-60.

Ce sont des déterminations du coefficient de dilatation linéaire, du coefficient de dilatation cubique et du pouvoir diathermane du caoutchouc.

CARL BARUS. — Compressibilité de l'eau chauffée et son action dissolvante sur le verre, p. 110-116.

La méthode consiste à enfermer un filet d'eau dans un tube capillaire, entre deux filets de mercure, et à observer la distance des deux ménisques au cathétomètre. Le tube est plongé dans un bain de vapeur d'aniline, à 185°. L'auteur trouve que la compressibilité de l'eau, qui a passé par un minimum vers 40° ou 50°, acquiert des valeurs beaucoup plus considérables qu'à la température ordinaire, vers 185°. Mais, à cette température et sous ces pressions, l'eau attaque très rapidement le verre des tubes, et il arrive même un moment où la masse est comme solide. D'ordinaire, la solution d'une matière étrangère dans l'eau diminue la compressibilité. Ici, la solution du verre l'augmenterait. On ne saurait tirer de là aucune conclusion précise.

CHARLES K. WEAD. — Sur l'intensité du son; réponse à une critique.

L'auteur discute des objections adressées à ses expériences sur l'intensité du son (1) par M. Stefanini (2). Il observe, en particulier, que, pour étudier la quantité d'énergie nécessaire pour produire un son qui donne à l'oreille la sensation d'une intensité donnée, il faut toujours que l'énergie mécanique ait le même « rendement sonore », et qu'on le suppose toujours implicitement dans les expériences où l'on fait varier l'énergie mise en jeu pour faire varier en même temps l'intensité. Deux actions mécaniques correspondant au même travail peuvent donner des sons très différents d'intensité. Le rendement en énergie sonore d'un dia-

(1) *American Journal*, t. XXVI, p. 177; 1883.
(2) *Beiblätter*, t. XIII, p. 636.

pason Ut_3, étudié précédemment par l'auteur, était, par exemple, de 7 pour 100; bien entendu, la réalisation de cette condition et le calcul de ce rendement présentent de graves difficultés.

W. FERREL. — Mesures de l'intensité de la radiation solaire, p. 378-386.

Dans la plupart des mesures de l'intensité de la radiation solaire, on néglige certaines corrections qui empêchent ces mesures d'être comparables; en introduisant ces corrections, on ferait peut-être disparaître quelques-unes des irrégularités signalées dans la marche diurne de la radiation. Les deux oscillations diurnes des jours sereins d'été sont pourtant hors de doute; elles doivent tenir à des nuages invisibles dont la radiation est sensible au bolomètre.

H.-L. WELLS. — Sur une trompe de Sprengel s'amorçant d'elle-même, p. 390-394.

C'est une nouvelle disposition de trompe, dont la partie essentielle est la suivante : on a un flacon à trois tubulures où aboutissent deux tubes, l'un qui amène de l'eau sous pression, l'autre qui s'élève verticalement et par où l'eau s'écoulera; par la troisième tubulure s'introduit un tube qui fait communiquer un réservoir à mercure avec une valve située dans le flacon, et que ferme une soupape s'ouvrant de dedans en dehors; la pression de l'eau qui arrive, toujours un peu plus faible que celle du mercure dans la valve, fait monter l'eau dans le tube d'écoulement, et l'eau entraîne une certaine quantité de mercure, qui sort par la soupape ouverte. Le mercure est entraîné parce que le tube d'écoulement a un faible diamètre. Ce tube débouche dans un réservoir dont il traverse le fond et il s'élève à une certaine hauteur; ce mercure tombe au fond et se rend, par un orifice, dans le réservoir supérieur de la trompe, tandis que l'eau s'écoule par un trop-plein.

ERNEST MERRITT. — Remarques sur certaines particularités dans la manière dont se comporte un galvanomètre employé avec une pile thermo-électrique, p. 417-423.

M. Violle ([1]) a déjà observé que, lorsque l'on chauffe brusque-

([1]) *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. III, p. 373.

ment un des pôles d'une pile thermo-électrique, l'aiguille dévie, dépasse la position où elle doit finalement se fixer et y arrive après une série d'oscillations d'amplitude décroissante. On arrive à rendre compte des particularités de ce phénomène en observant que, d'après la loi de Newton, la différence de température des deux pôles de la pile thermo-électrique variera avec le temps, à partir du moment où l'on commence à échauffer l'une des faces, et que l'intensité peut se représenter par

$$i = \frac{E}{R} = \frac{PT_0}{R}(1 - e^{-kt}),$$

k et P étant des constantes.

L'équation différentielle du mouvement de l'aiguille est alors

$$M\rho^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + L\frac{d\theta}{dt} + N\theta = QT_0(1 - e^{-kt}),$$

et, en intégrant cette équation, on trouve bien une fonction représentée par la courbe construite d'après l'étude expérimentale du mouvement de l'aiguille. Une application numérique au cas d'un galvanomètre Thomson montre que l'explication est bien celle-là. Une des remarques importantes à faire est que l'angle de la première impulsion est proportionnel à la déviation finale.

E.-D. PRESTON. — Étude de la forme de la Terre au moyen du pendule (Lecture faite à l'Institut Brooklyn, 26 février 1891), p. 445-460.

C'est un exposé sommaire des méthodes de mesure de g et des résultats qu'elles ont fournis.

R.-W. WOOD. — Combustion des jets de gaz sous pression, p. 477-482.

Étude de quelques phénomènes que présentent les flammes d'un gaz qu'on fait écouler dans l'air sous une pression déterminée, et qu'on allume, et comment ils sont liés à la vitesse de combustion et à la vitesse d'arrivée du gaz. Dans le cas de gaz de la houille arrivant à haute pression, on a pu constater que la flamme présente des alternatives de plages obscures et brillantes, alternatives, invisibles à l'œil nu, quand elles sont trop nombreuses, mais qu'on met alors en évidence avec un miroir tournant.

BERNARD BRUNHES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Wiedemann's Annalen.

T. XLIV, n° 12; 1891.

F. Kohlrausch. — *Sur la solubilité de quelques verres dans l'eau froide*, p. 577.

O. Krigar-Menzel et A. Raps. — *Sur les vibrations des cordes*, p. 623.

O. Lehmann. — *Observations sur les décharges électriques d'une grande machine à influence*, p. 642.

A. Elsas. — *Nouvelle méthode pour la mesure des constantes diélectriques*, p. 654.

A. Elsas. — *Sur la mesure des résistances à l'aide du téléphone*, p. 666.

Max Wien. — *Le téléphone employé comme appareil optique à la mesure des courants*, p. 681.

Max Wien. — *Mesure des constantes d'induction avec le téléphone optique*, p. 689.

A. Franke. — *L'électromètre à quadrants employé à la recherche des ondes le long des fils*, p. 713.

J. Elster et H. Geitel. — *Déperdition électrique produite par la lumière solaire sur des surfaces minérales*, p. 722.

W. Negbaur. — *Recherches expérimentales sur la différence de potentiel à la surface de contact de deux dissolutions très étendues*, p. 737.

W. Negbaur. — *Influence du résidu électrique et des déformations permanentes sur les mesures de l'élasticité de torsion*, p. 759.

W. Negbaur. — *Forme pratique d'élément Latimer Clark*, p. 765.

W. Negbaur. — *Éléments normaux pour de petites différences de potentiel*, p. 767.

F. Braun. — *Électromètre à lectures absolues*, p. 771.

G. Quincke. — *Sur les relations entre la compressibilité et les indices de réfraction des liquides*, p. 774.

A.-W. Reinold et A.-W. Rucker. — *Sur le rayon de la sphère d'action des molécules*, p. 778.

F. Molenbrock. — *Remarque sur une démonstration élémentaire de la loi de Green*, p. 784.

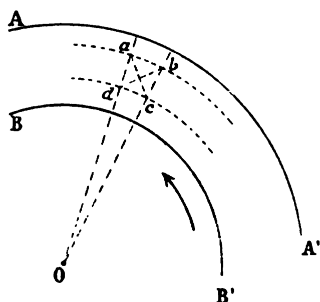
G. Leonhardt. — *Procédé simple pour reconnaitre le signe des pôles d'une machine à influence*, p. 787.

SUR UNE ANOMALIE DANS LA RÉFRACTION DOUBLE DES LIQUIDES;

PAR M. THÉODORE SCHWEDOFF.

Imaginons-nous un corps transparent élastique limité par deux surfaces cylindriques concentriques, dont l'extérieure AA′ (*fig.* 1)

Fig. 1.



reste immobile, tandis que l'intérieure BB′ éprouve un mouvement de rotation autour de l'axe O, dans la direction de la flèche. L'élément de volume *abcd*, que nous supposons infiniment petit, éprouve une déformation de cisaillement, en vertu de laquelle la diagonale *bd* s'allonge et la diagonale *ac* se contracte. Par suite de cette déformation, un faisceau de lumière naturelle, traversant la couche parallèlement à l'axe O, doit se décomposer en deux faisceaux polarisés, dont les plans de polarisation soient inclinés de 45° par rapport au rayon O*a* de la couche annulaire. Du moins, tel doit être l'effet de la déformation selon la théorie de l'élasticité des corps rigides.

Les expériences de M. Kundt (¹), sur la réfraction double dans les liquides, justifient cette conséquence de la théorie aussi pour certains liquides, comme l'huile d'olive, le baume de Canada, etc. Mais les mêmes expériences fournissent cet étrange résultat, que, dans d'autres liquides, l'angle que fait une des vibrations composantes avec le rayon O*a* diffère considérablement de 45°. Par exemple, pour le collodion, cet angle est de 65°. Cela indique

(¹) *Annalen der Physik von Wiedemann*, t. XIII, p. 110; 1881.

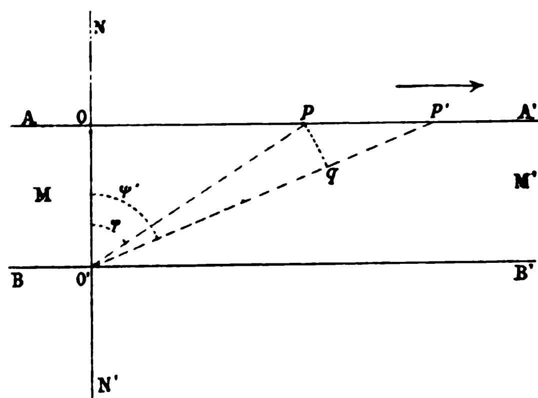
que, ou bien les plans de polarisation ne coïncident pas toujours avec les axes de déformation, ce qui aurait renversé nos idées sur le mécanisme de la réfraction double, ou bien ces axes dévient, dans certains cas, de la direction que leur assigne la théorie actuelle de l'élasticité.

Je vais montrer que c'est justement ce dernier fait qui nous fournit l'explication de l'anomalie observée par M. Kundt.

Soient :

MM' (*fig.* 2) une couche transparente élastique,
AA' et BB' deux plans parallèles qui limitent cette couche,
NN' une normale aux plans AA', BB',
O'p une droite parallèle au plan de la figure.

Fig. 2.



Supposons qu'un effort appliqué tangentiellement à la surface AA' dans la direction de la flèche imprime à la couche une déformation de cisaillement de grandeur *finie*. Dans ce cas, le point p de la surface AA' est transporté dans une nouvelle position p'. La droite O'p, transportée en O'p', éprouve un certain allongement, dont la valeur dépend de la grandeur du cisaillement pp' aussi bien que de la direction primitive de la droite O'p. Pour une certaine direction, l'allongement devient maximum et alors la droite O'p' détermine la direction de l'*axe de déformation* et, par conséquent, de l'axe optique du corps déformé ([1]).

([1]) On suppose que la déformation n'entraîne pas de changement de volume, ce qui est approximativement vrai pour les liquides.

Tâchons de déterminer l'angle OO'p' que fait alors la droite O'p' avec la normale NN'.

Soient :

$$Op = a;\quad pp' = b;\quad O'p = s;\quad O'p' = s';$$
$$qp' = s' - s = \Delta s;\quad \frac{\Delta s}{s} = \alpha;\quad OO' = h;\quad \frac{b}{h} = \varphi;$$
$$< OO'p = \psi;\quad < OO'p' = \psi';\quad \text{tang}\,\psi = k;\quad \text{tang}\,\psi' = k'.$$

Remarquons que α mesure l'allongement de la droite O'p, et φ est la mesure de l'effet de cisaillement. Nous avons

$$\alpha = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + h^2} - \sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{h}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} - 1$$

ou bien

$$\alpha = \sqrt{1 + \varphi\frac{2k + \varphi}{k^2 + 1}} - 1.$$

La quantité φ étant donnée, α arrive au maximum en même temps que la fraction $\frac{2k + \varphi}{k^2 + 1}$, ce qui nous conduit à la condition

$$(1)\qquad k^2 + \varphi k = 1.$$

Nous avons

$$k' = \frac{a + b}{h} = \frac{a}{h} + \frac{b}{h} = k + \varphi.$$

d'où l'on tire

$$k = k' - \varphi.$$

En substituant dans (1) cette valeur de k, on a

$$(2)\qquad k'(k' - \varphi) = 1.$$

La solution de cette équation nous fournit pour k' deux valeurs, dont une négative. Et puisque k' est positif d'après les conditions géométriques du problème, on a définitivement

$$(3)\qquad k' = \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} + 1}.$$

Telle est la valeur de la tangente de l'angle ψ' formé avec la normale par l'axe optique. On voit que cet angle dépend essen-

tiellement de la grandeur φ du cisaillement et qu'il n'est égal à 45° que dans le cas particulier où $\varphi = 0$.

Cela nous explique la cause de la divergence qui peut exister entre les solides et les liquides sous le rapport de la direction de l'axe de déformation. Un corps solide, le verre par exemple, est rompu aussitôt que l'on dépasse une certaine limite de déformation, laquelle limite est excessivement petite. Pour cette raison, φ est toujours très petit pour les solides, et l'angle ψ', qui correspond à cette valeur de φ, ne diffère sensiblement pas de 45°, ce qui est confirmé par l'expérience. Pour la même raison, la théorie de l'élasticité des corps solides n'a en vue que les déformations infiniment petites. Quant aux liquides, leur ténacité est illimitée, et ils retiennent une partie *active* de déformation alors même que leur déformation *effective* est infinie, comme cela arrive dans les expériences sur le frottement des liquides (¹).

En admettant que le phénomène de réfraction double provient de la déformation active, on peut calculer celle-ci d'après les résultats de M. Kundt. On a, pour le collodion dont ce savant s'est servi,

$$\psi' = 65°;$$

par conséquent,

$$k' = \operatorname{tang} \psi' = 2,144.$$

En substituant ce nombre dans (2), on a

$$\varphi = 1,678.$$

Cette valeur de la déformation active peut nous servir à déterminer la rigidité du collodion.

Soient, en unités absolues,

E le coefficient de rigidité,
η le coefficient de frottement intérieur,
F le ressort du liquide, c'est-à-dire sa réaction rigide rapportée à un cube-unité,
γ la vitesse de cisaillement.

(¹) *Voir* mes *Recherches sur la rigidité des liquides* (*Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 341; 1889.

On a

$$F = E\varphi.$$

D'autre part, on a

$$J = \eta\gamma.$$

Il en résulte

$$(4) \qquad E = \frac{\eta\gamma}{\varphi}.$$

Or nous avions

$$\varphi = 1,678.$$

D'après les mesures de M. Kundt,

$$\eta = 0,36.$$

Quant à la vitesse de cisaillement γ, sa valeur n'est pas donnée exactement. On peut présumer qu'elle était égale, à peu près, à 2500. En substituant ces nombres dans (4), on a

$$E = 542 \text{ dynes}.$$

Cela veut dire que le collodion, dont s'est servi M. Kundt dans ses expériences, était en nombre rond 200 millions de fois moins rigide que l'acier.

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DES ÉTATS CORRESPONDANTS;

PAR M. E. MATHIAS.

Introduction. — Ce Travail a pour objet de vérifier par des résultats expérimentaux la loi théorique des *états correspondants* due à M. Van der Waals et suivant laquelle toute relation physique entre le volume v, la pression p et la température absolue T d'un fluide ne dépend que des rapports de ces variables aux valeurs π, φ, Θ, qu'elles ont respectivement au point critique.

Ainsi, par exemple, la relation entre la densité de vapeur saturée δ et la température absolue T est de la forme

$$\frac{\delta}{\Delta} = f\left(\frac{T}{\Theta}\right),$$

la fonction f étant la même pour tous les corps, et Δ étant la densité critique. Il en serait de même pour la densité du liquide et la pression de la vapeur saturée.

M. Van der Waals est arrivé à ce théorème en faisant, dans l'équation caractéristique des fluides,

$$(1) \qquad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{RT},$$

qu'il a proposée, le changement de variables suivant :

$$p = \varepsilon\pi, \qquad v = n\varphi, \qquad \mathrm{T} = m\theta;$$

si, en même temps, on remplace dans l'équation (1) π, φ et θ en fonction de a, b et R, on obtient la relation

$$(2) \qquad \left(\varepsilon + \frac{3}{n^2}\right)(3n - 1) = 8m,$$

qui est purement numérique, commune à tous les corps, et d'où M. Van der Waals a déduit son théorème [1].

1. Les nouvelles variables ε et m sont évidemment comprises entre 0 et 1; quant à n, il varie entre $\frac{1}{3}$ et $+\infty$. En effet, l'équa-

---

[1] On arrive au même résultat en partant de la formule de Clausius

$$\left[p + \frac{a}{\mathrm{T}(v + \beta)^2}\right](v - \alpha) = \mathrm{RT},$$

comme M. Van der Waals l'a montré lui-même (Voir *Continuität*, etc., trad. Roth, p. 129). Il suffit, à une très petite modification près, de faire le changement de variables précédent en posant

$$(3) \qquad p = \varepsilon\pi, \qquad v + \beta = n(\varphi + \beta), \qquad \mathrm{T} = m\theta,$$

et l'on retrouve l'équation caractéristique réduite (1).

On peut, comme M. Sarrau, généraliser encore plus (*Revue scientifique* du 25 juillet 1891, p. 102) et trouver pour l'équation générale des fluides

$$\left[p + \frac{f(\mathrm{T})}{(v + \beta)^2}\right](v - \alpha) = \mathrm{RT},$$

l'équation réduite applicable à tous les corps; mais le changement de variables qu'il faut faire n'a plus sa simplicité primitive.

La forme la plus générale de l'équation des fluides qui donne l'équation réduite (1) avec le changement de variables (3), *c'est-à-dire obéit au théorème des états correspondants sous sa forme simple,* est

$$\left[p + \frac{a\mathrm{T}^\mu}{(v + \beta)^2}\right](v - \alpha) = \mathrm{RT}.$$

tion (2) donne l'inégalité de condition

(4) $$3n - 1 \geqq 0 \quad \text{ou} \quad n \geqq \tfrac{1}{3}.$$

Entre 1 et $+\infty$, n se rapporte à la vapeur saturée; entre $\frac{1}{3}$ et 1, il représente l'état liquide. Il s'ensuit cette conséquence :

La densité critique d'un corps est toujours supérieure au tiers de la plus grande valeur observée δ' de la densité du liquide (1).

Cet énoncé permet de trouver immédiatement une valeur approchée *par défaut* de la densité critique Δ. Voici quelques vérifications (2) :

Corps.	δ'.	$\frac{\delta'}{3}$.	Δ.
Acide carbonique....	1,057	0,352	0,450
Éthylène...........	0,414	0,138	0,210
Protoxyde d'azote...	1,003	0,334	0,410
Acide sulfureux.....	1,513	0,504	0,520
Éther...............	0,736	0,245	(0,260)
Acide chlorhydrique.	1,27	0,423	(0,462)
Oxygène............	1,24	0,413	(0,405)
Azote..............	0,866	0,289	(0,296)
Formène...........	0,415	0,138	(0,143)
Ammoniaque........	0,650	0,217	(0,2387)

Pour que l'inégalité considérée approche le plus possible de l'égalité, il faut que la densité du liquide soit prise à la température la plus éloignée possible de la température critique; c'est précisément ce qui a lieu pour l'acide sulfureux, l'éther, l'oxygène, l'azote et le formène.

La vérification de ce fait ne peut pas se faire au même degré sur tous les corps. En effet, abstraction faite de la surfusion, la plus

(1) Lorsque l'isotherme réduite est obtenue par le changement de variables (3), cet énoncé ne doit pas être modifié. On a, en effet, dans ce cas,

$$\Delta > \frac{\delta'}{3 + 2\beta\delta'}. \qquad \begin{cases} \delta' = \text{densité du liquide,} \\ \Delta = \text{densité critique.} \end{cases}$$

(2) Les densités critiques mises entre parenthèses dans ce Tableau ont été calculées dans le courant de ce travail. On remarquera que le nombre relatif à l'oxygène est un peu plus faible que $\frac{\delta'}{3}$; cette particularité sera expliquée plus loin.

grande valeur de la densité du liquide correspond à la température de solidification. Or ce phénomène se produit pour des valeurs très différentes de la pression, ou mieux de ε; ainsi l'acide carbonique solide a sa température de solidification (— 57°) à une pression de $5^{atm},3$, d'après Faraday ($\varepsilon = \frac{1}{14,5}$ environ), tandis que l'eau se solidifie pour $\varepsilon = \frac{1}{22000}$ environ. De même, l'acide sulfureux, l'éther, l'azote se solidifient pour de très petites valeurs de ε; aussi pour ces corps l'*inégalité* (4) peut-elle se rapprocher presque indéfiniment de l'*égalité;* pour l'acide carbonique, au contraire, à — 57°, la densité du liquide, d'après les calculs de M. Sarrau ([1]), est voisine de 1,209, dont le tiers est 0,403 tandis, que la densité critique est 0,450 ([1]).

Dans un travail récent dont il a été rendu compte ici ([2]), M. Battelli a mesuré *directement* les volumes critiques du sulfure de carbone, de l'eau et de l'éther. Il a trouvé respectivement $2^{cc},651$ — $4^{cc},812$ — $4^{cc},8$ ce qui donne pour les densités critiques les nombres

0,377, 0,207, 0,208;

si l'on prend le tiers de la plus grande densité à l'état liquide, on trouve

0,431, 0,333, 0,245,

ce qui contredit formellement l'inégalité (4). Cela s'explique simplement.

Quand on mesure la densité critique d'un corps, on part du liquide ou de la vapeur saturée et on élève la température jusqu'à la température critique. Or il faudrait maintenir rigoureusement le tube-laboratoire à cette température, ce qui est impossible : 1° parce qu'on ne la connaît pas exactement; 2° parce que les régulateurs de température donnent au plus le $\frac{1}{20}$ de degré. On sait avec quelle rapidité les deux sortes de densités varient au voisinage de la température critique et quelle est la petitesse de la chaleur de vaporisation dans ce cas : il suffira qu'un premier point du corps arrive à la température critique pour que l'état critique se produise. Par suite, la densité critique *observée* sera, dans le pre-

([1]) *Comptes rendus*, t. CI, p. 1148; 1885.
([2]) A. Battelli, *Journal de Physique*, [2], t. X, p. 132 et 135; 1891.

mier cas, une densité de *liquide,* dans le second, une densité de *vapeur saturée;* la première méthode donnera une densité critique trop forte [elle a donné à Wroblewski 0,60 pour l'oxygène et 0,44 pour l'azote ([1])], la seconde donnera une densité critique trop faible (c'est le cas de M. Battelli) ([2]).

En résumé, la détermination directe et précise de la densité critique paraît difficile, sinon impossible, *et il faut considérer cette quantité comme la moyenne arithmétique des deux sortes de densités lorsque la température tend vers sa valeur critique.*

2. M. Van der Waals a vérifié le théorème des états correspondants sur les données expérimentales qui existaient en 1881 (tensions de vapeurs et coefficients de dilatation principalement). Je me propose de faire la même vérification sur les deux sortes de densités.

Densité des vapeurs saturées. — Les seules qui aient été mesurées au voisinage de la température critique sont celles de l'acide carbonique, du protoxyde d'azote, de l'éthylène, de l'acide sulfureux, de l'acide chlorhydrique et de l'éther.

Les formules empiriques, que M. Cailletet et moi avons données ([3]) pour représenter dans un intervalle de 60° environ à partir de la température critique la densité des deux premiers corps, s'écrivent avec la notation de M. Van der Waals :

$$CO^2 \ldots\ldots\ldots \quad \delta = 1,295\left(1 - m - 1,130\sqrt{1-m} + \overline{0,5794}^2\right)$$
$$AzO \ldots\ldots\ldots \quad \delta = 1,169\left(1 - m - 1,124\sqrt{1-m} + \overline{0,580}^2\right)$$

Il est évident que les parenthèses sont des fonctions identiques de m; c'est l'expression même du théorème des états correspondants. On peut donc *prévoir* que la densité de vapeur saturée de l'acide sulfureux, de l'éthylène et des autres corps étudiés sera représentée par une équation de même forme. Celle de l'acide sul-

([1]) On remarquera que ces deux nombres sont proportionnels aux densités critiques 0,405 — 0,296 que donne le théorème des états correspondants.

([2]) M. Ph. A. Guye avait déjà remarqué, sans l'expliquer, que les volumes critiques de M. Battelli sont trop grands (*Thèse de Doctorat*, p. 138; 1891).

([3]) *Journal de Physique*, [2], t. V, décembre 1886.

fureux est, en effet, représentée très exactement entre $+75°$ et $+156°$ par la formule ([1])

$$SO^2 \ldots\ldots\ldots \quad \delta = 1,4328\left(1 - m - 1,140\sqrt{1-m} + \overline{0,579}^2\right)$$

comme le montre le Tableau suivant :

t.	Observé.	Calculé.	Différence.
78°,7	0,0464	0,0457	+0,0007
91,0	0,0626	0,0622	— 4
100,6	0,0787	0,0789	+ 2
123,0	0,1340	0,1380	+ 40
125,0	0,1422	0,1453	+ 31
130,0	0,1607	0,1655	+ 48
135,0	0,1888	0,1896	+ 8
137,0	0,2040	0,2006	— 34
139,5	0,2154	0,2156	+ 2
141,5	0,2274	0,2290	+ 16
142,0	0,2336	0,2326	+ 10
144,0	0,2496	0,2478	— 18
147,5	0,2842	0,2794	— 48
149,0	0,2972	0,2956	— 16
152,5	0,3426	0,3450	+ 24
154,9	0,4017	0,4019	+ 2

La vapeur saturée de l'éthylène est représentée entre $-30°$ et $+9°,2$ par la formule ([2])

$$C^4H^4 \ldots\ldots\ldots \quad \delta = 0,54645\left(1 - m - 1,108\sqrt{1-m} + \overline{0,576}^2\right)$$

comme le prouve le Tableau suivant :

t.	Observé.	Calculé.	Différence.
—30°,0	0,0329	0,0312	—0,0017
—25,0	0,0357	0,0364	+ 7
—23,0	0,0389	0,0387	— 2
—16,0	0,0501	0,0488	— 13
—11,5	0,0528	0,0576	+ 48

([1]) Qui devient, avec la notation habituelle,

$$\delta = 1,0019 - 0,00334\,t - 0,07887\sqrt{156° - t}.$$

([2]) Qui devient, avec la notation habituelle,

$$\delta = 0,1987 - 0,0019364\,t - 0,03604\sqrt{9°,2 - t}.$$

t.	Observé.	Calculé.	Différence.
$-$ 9°,5	0,0632	0,0612	$-$ 0,0020
$-$ 5,0	0,0727	0,0727	0
$-$ 2,0	0,0831	0,0820	$-$ 11
$-$ 0,5	0,0860	0,0876	$+$ 16
$+$ 3,3	0,1004	0,1047	$+$ 43
$+$ 3,6	0,1033	0,1066	$+$ 33
$+$ 4,5	0,1127	0,1122	$-$ 5
$+$ 6,1	0,1233	0,1235	$+$ 2
$+$ 8,0	0,1400	0,1438	$+$ 38
$+$ 8,9	0,1500	0,1617	$+$ 117

Les expériences d'Avenarius (1) sur la vapeur saturée de l'éther se représentent de la même façon, entre $+140°$ et $+189°,5$, par la formule (2)

$$C^8H^{10}O^2 \ldots\ldots\ldots \quad \delta = 0{,}690\left(1 - m - 1{,}124\sqrt{1 - m + \overline{0{,}579}^2}\right).$$

t.	Observé.	Calculé.	Différence.
140°,9	0,0524	0,0524	0
143,2	0,0543	0,0551	$+$ 0,0008
147,2	0,0602	0,0599	$-$ 3
149,5	0,0625	0,0629	$+$ 4
152,0	0,0668	0,0664	$-$ 4
153,9	0,0679	0,0693	$-$ 14
156,5	0,0728	0,0734	$+$ 6
159,2	0,0783	0,0780	$-$ 3
160,2	0,0800	0,0798	$-$ 2
162,3	0,0834	0,0838	$+$ 4
163,0	0,0855	0,0852	$-$ 3
164,8	0,0884	0,0889	$+$ 5
165,0	0,0895	0,0894	$-$ 1
166,9	0,0938	0,0936	$-$ 2
171,0	0,1024	0,1038	$+$ 14
174,4	0,1121	0,1137	$+$ 6
176,8	0,1215	0,1217	$+$ 2
178,6	0,1284	0,1285	$+$ 1
179,0	0,1299	0,1301	$+$ 2
179,7	0,1344	0,1330	$-$ 14

---

(1) AVENARIUS, *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XXII; 1877.

(2) Qui devient, avec la notation habituelle,

$$\delta = 0{,}514 - 0{,}001492\,t - 0{,}03606\sqrt{189°{,}5 - t}.$$

t.	Observé.	Calculé.	Différences.
181°,8	0,1437	0,1427	− 0,0010
182,4	0,1454	0,1458	+ 4
183,6	0,1504	0,1525	+ 21
184,4	0,1563	0,1575	+ 12
184,8	0,1579	0,1601	+ 21
185,2	0,1616	0,1629	+ 13
186,7	0,1773	0,1751	− 22
188,1	0,1905	0,1907	+ 2
188,6	0,1949	0,1984	+ 35
189,0	0,2096	0,2066	− 30

Les expériences de M. G. Ansdell (¹) sur la vapeur saturée de l'acide chlorhydrique sont représentées par la formule (²)

$$\text{HCl} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta = 1,2131\left(1 - m - 1,126\sqrt{1-m} + \overline{0,579}^2\right)$$

Voici la vérification :

t.	Observé.	Calculé.	Différence.
4°,0	0,0624	0,0619	− 0,0005
9,25	0,0721	0,0723	+ 2
13,8	0,0828	0,0826	− 2
18,1	0,0934	0,0939	+ 5
22,0	0,1056	0,1059	+ 3
26,75	0,1230	0,1229	− 1
33,4	0,1537	0,1530	− 7
39,4	0,1911	0,1899	− 12
44,8	0,2359	0,2381	+ 22
48,0	0,2736	0,2821	+ 85
49,4	0,3101	0,3104	+ 3
50,56	0,3335	0,3463	+ 128
51,0	0,3577	0,3697	+ 120

Les coefficients 1,295 — 1,169 — 1,4328 — 0,5464 — 0,690 — 1,2131 des formules précédentes sont bien proportionnels aux densités critiques, comme le veut le théorème des états correspon-

---

(¹) G. Ansdell, *Proc. Roy. Soc.*, t. XXX, p. 117; 1879.

(²) Qui devient, avec la notation habituelle,

$$\delta = 0,5984 - 0,00374\,t - 0,07585\sqrt{51°,25 - t}.$$

dants, car on a

$$\frac{1,295}{0,45} = 2,87, \qquad \frac{1,169}{0,41} = 2,85, \qquad \frac{1,4328}{0,52} = 2,75,$$
$$\frac{0,5464}{0,21} = 2,60, \qquad \frac{0,690}{0,26} = 2,65, \qquad \frac{1,2131}{0,462} = 2,62.$$

D'une manière générale, on voit que la densité de vapeur saturée est donnée, au voisinage de la température critique, par la formule à *une* constante

$$\delta = A\left(1 - m - 1,124\sqrt{1-m} + \overline{0,579}^2\right),$$

abstraction faite de la très faible variation des constantes numériques (¹). Pour déterminer A, il suffit *théoriquement* de connaître la densité critique Δ; mais, quand on reprend la notation ordinaire des températures, il faut, en outre, connaître la température critique.

3. *Densité du liquide.* — Il existe très peu de données certaines sur la variation de cette quantité au voisinage de la température critique.

Les expériences de MM. Cailletet et Mathias sur l'acide carbonique liquide entre $-34°$ et $+21°$ et celles de M. Ad. Blümcke (²) sur le même corps entre 0° et 30° sont très bien représentées par la formule

$$\delta' = 1,064(m - 0,569 + 1,655\sqrt{1-m}),$$

qui est la traduction, avec la notation des états correspondants, de la formule empirique que M. Cailletet et moi avons donnée antérieurement.

(¹) Cette formule peut s'écrire

$$\delta = A(0,579 - \sqrt{1-m})^2 + 0,034\,A\sqrt{1-m}.$$

Les divergences des formules ne portent guère que sur le second terme, qui n'a d'importance que si l'on s'éloigne trop de la température critique; ces divergences peuvent être attribuées en partie aux impuretés des corps étudiés.

Le carré s'annule pour $m = 0,665$; pour $m < 0,665$, la formule empirique est absurde; pratiquement, elle ne convient que si $m \geq 0,80$.

(²) AD. BLÜMCKE, *Journal de Physique*, [2], t. VII, p. 570; 1888.

On représente, de même, avec une grande approximation, la densité de l'acide sulfureux liquide entre $+90°$ et $+156°$ (température critique) par la formule ([1])

$$\delta' = 1,2312(m - 0,569 + 1,665\sqrt{1-m}),$$

comme le montre le Tableau suivant :

t.	Observé.	Calculé.	Différence.
90	1,155	1,147	−0,008
95	1,135	1,130	− 5
100	1,113	1,112	− 1
105	1,092	1,092	0
110	1,0695	1,0705	+ 1
115	1,046	1,047	+ 1
120	1,019	1,021	+ 2
125	0,990	0,993	+ 3
130	0,9575	0,960	+ 2,5
135	0,919	0,923	+ 4
140	0,876	0,880	+ 4
145	0,824	0,826	+ 2
150	0,759	0,754	− 5
152	0,726	0,715	− 11
153	0,706	0,691	− 15
154	0,679	0,663	− 16
155	0,637	0,624	− 13
155,5	0,600	0,597	− 3
156	0,520	0,527	+ 7

On peut considérer la formule de l'acide sulfureux comme identique à celle de l'acide carbonique à un facteur constant près, ce qui justifie le théorème des états correspondants. De plus, les coefficients de ces formules sont bien proportionnels aux densités critiques, car on a

$$\frac{1,064}{0,45} = 2,364, \qquad \frac{1,2312}{0,52} = 2,367.$$

J'ai voulu mettre hors de doute la loi de M. Van der Waals en ce qui concerne l'acide sulfureux et l'acide carbonique liquides,

---

([1]) Qui devient, avec la notation habituelle,

$$\delta' = 0,080 + 0,00287 + 0,0395\sqrt{156° - t}.$$

et utiliser directement les nombres expérimentaux sans introduire les densités critiques qui ne sont qu'approchées.

La première colonne du Tableau suivant contient les températures relatives aux densités expérimentales de l'acide carbonique liquide.

La seconde donne les valeurs de m, c'est-à-dire $\frac{273+t}{273+31}$.

Connaissant m, je calcule la température correspondante de l'acide sulfureux, et de la Table des densités de ce corps je déduis, par interpolation, les densités correspondant à celles de l'acide carbonique liquide; les densités de l'acide sulfureux liquide se trouvent dans la 9e colonne, celles de l'acide carbonique dans la 3e (nombres de Blümcke) ([1]), la 5e (nombres de Cailletet et Mathias) et la 7e (nombres donnés par la formule empirique).

J'ai rapporté toutes les densités de l'acide carbonique à celles de 20° qui sont concordantes; les colonnes 4, 6, 8 donnent les valeurs du quotient $\frac{\delta_t}{\delta_{20}}$. De même la colonne 10 donne les densités de l'acide sulfureux liquide divisées par la densité correspondante 0,8715. Si le théorème des états correspondants est vrai, les nombres des colonnes 4, 6, 8, 10 placés sur une même ligne horizontale doivent être égaux.

		CO^2.						SO^2.	
t.	m.	δ.	$\frac{\delta}{\delta_{20}}$.	δ'.	$\frac{\delta'}{\delta'_{20}}$.	δ''.	$\frac{\delta''}{\delta''_{20}}$.	δ'''.	$\frac{\delta'''}{\delta'''_{20}}$.
−35°	0,7829	»	»	»	»	0,048	**1,390**	1,2497	**1,434**
−30	0,800	»	»	1,032	**1,374**	1,033	**1,370**	1,2261	**1,407**
−20	0,8322	»	»	0,999	**1,330**	0,997	**1,322**	1,1784	**1,352**
−10	0,8651	»	»	0,960	**1,278**	0,961	**1,274**	1,1213	**1,286**
0	0,898	0,923	**1,222**	0,912	**1,214**	0,911	**1,208**	1,0588	**1,215**
+10	0,9309	0,852	**1,128**	0,842	**1,121**	0,847	**1,123**	0,9811	**1,125**
+20	0,9638	0,755	**1**	0,751	**1**	0,754	**1**	0,8715	**1**
+30	0,9967	0,549	**0,727**	0,530	**0,706**	0,556	**0,737**	0,6542	**0,750**

On voit, par ce Tableau, que l'écart entre la théorie et l'expérience suit une marche régulière et croît à mesure qu'on s'éloigne de la température critique. La comparaison des tensions de va-

([1]) Les nombres de M. Ad. Blümcke sont les moyennes de ceux qu'il a donnés à cette température.

peur saturée de l'acide sulfureux et de l'éther, faite par M. Van der Waals, donne le même résultat (voir *Continuität,* p. 131).

Qu'arrive-t-il pour des températures très éloignées de la température critique?

Le Tableau suivant, où l'on compare les densités de l'acide sulfureux à celles de l'oxygène liquide, montre que la loi des états correspondants est encore très approchée. Le mode de comparaison est celui du Tableau précédent; les densités de l'acide sulfureux aux températures inférieures à 0° sont tirées des nombres d'Is. Pierre ou d'Andréeff (1); celles de l'oxygène liquide sont calculées par la formule

$$d = 1,212 + 0,00428\,T - 0,0000529\,T^2,$$

proposée par Wroblewski (2) et valable selon lui entre $-118°$ (température critique) et $-200°$, T désignant la température absolue.

CO^2.		Oxygène.			SO^2.		
t.	m.	Température correspondante.	Densité correspondante.	$\frac{\delta}{\delta_{20}}$.	Température correspondante.	Densité correspondante.	$\frac{\delta'}{\delta'_{20}}$.
−100°	0,569	−184°,8	1,1780	**1,756**	−28°,9	1,5108	**1,734**
−90	0,602	−179,4	1,1491	**1,713**	−14,8	1,4771	**1,695**
−80	0,6349	−174,6	1,1209	**1,671**	−0,6	1,4357	**1,647**
−70	0,6677	−169,5	1,0883	**1,622**	+13,6	1,3965	**1,602**
−60	0,7007	−164,4	1,053	**1,570**	+27,6	1,3577	**1,558**
−50	0,7335	−159,3	1,0147	**1,513**	+41,6	1,3171	**1,511**
−40	0,7664	−154,2	0,9739	**1,452**	+55,8	1,2734	**1,461**
−35	0,7829	−151,65	0,9524	**1,420**	+62,9	1,2497	**1,434**
−30	0,800	−149,0	0,9293	**1,385**	+70,2	1,2261	**1,407**
−25	0,8158	−146,6	0,9080	**1,354**	+77,0	1,2032	**1,380**
−20	0,8322	−144,0	0,884	**1,318**	+84,0	1,1784	**1,352**
0	0,898	−133,8	0,7828	**1,17**	+112,2	1,0588	**1,21**
+20	0,9638	−123,6	0,6707	**1**	+140,5	0,8715	**1**

Les nombres écrits en caractères gras et placés sur une même ligne horizontale sont égaux à 1 ou 2 pour 100 près pour $m < 0,82$. Étant données les difficultés expérimentales que l'on rencontre

(1) *Journal de Physique,* [2], t. VI, p. 421; 1887.
(2) Wroblewski, *Comptes rendus,* t. CII; 1886.

dans la mesure de la densité de l'oxygène liquide, on peut dire que ce corps obéit à la loi des états correspondants pour les températures inférieures à — 144°.

Entre cette température et — 123°, 6, la formule de Wroblewski donne des nombres nettement trop faibles; au delà elle donne des nombres trop forts.

La densité de l'oxygène liquide à — 123°, 6 est en effet *exacte*, car elle satisfait au théorème des états correspondants comme les densités aux températures inférieures à — 144°. Servons-nous-en pour trouver une valeur très approchée de la densité critique de l'oxygène, le nombre 0,60 donné par Wroblewski étant trop fort, comme nous l'avons vu précédemment.

Soient x cette densité critique et 0, 52 celle de l'acide sulfureux; on peut écrire d'après le Tableau précédent

$$\frac{1,178}{x} = \frac{1,5108}{0,52}, \qquad \frac{1,053}{x} = \frac{1,3577}{0,52},$$

$$\frac{0,9739}{x} = \frac{1,2734}{0,52}, \qquad \frac{0,6707}{x} = \frac{0,8715}{0,52}.$$

On tire respectivement de ces équations les valeurs de x suivantes

0,405, 0,403, 0,400, 0,400,

qui sont concordantes autant qu'on peut l'espérer. La valeur admise 0, 405 est supérieure au tiers de la plus grande densité du liquide, parce que la loi de variation de la densité donnée par la formule de Wroblewski est inexacte ([1]).

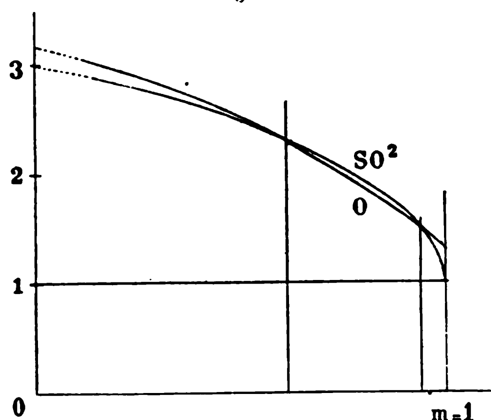
Considérons, en effet, l'acide sulfureux liquide; portons en abscisses les valeurs de m, et en ordonnées les valeurs de $\frac{\delta'}{\Delta}$ ($\Delta = 0,52$); la courbe obtenue, d'après M. Van der Waals, *devra être commune à tous les corps*. Faisons de même pour l'oxygène en prenant pour ordonnées les densités données par la formule de Wroblewski, divisées par la densité critique 0, 405. La nouvelle courbe ne coïncidera pas avec la première, mais la

([1]) Des expériences plus récentes d'Olzewski donnent pour densité de l'oxygène liquide à — 181°, 4 le nombre 1,124; la formule de Wroblewski donne à la même température 1,160 qui est de 3,1 pour 100 plus fort. Si l'on diminue, dans le même rapport, la densité maxima observée 1,24 donnée par Wroblewski, on trouve 1,20, dont le tiers 0,400 est bien inférieur à la densité critique 0, 405.

coupera en deux points, comme le montre la figure ci-dessous.

L'un des points d'intersection correspond, d'après le Tableau précédent, à $m = 0,964$, l'autre à $m = 0,733$ environ. Entre

Fig. 1.



$m = 0,569$ et $m = 0,82$ les deux courbes sont très voisines, et l'on s'en est servi pour trouver la densité critique de l'oxygène; pour $m < 0,569$, la courbe de l'oxygène est nettement au-dessus de la courbe normale, et pour $m = 0$ donne $\frac{\delta'}{\Delta}$ un peu supérieur à 3.

Wroblewski a mesuré quelques densités de l'azote liquide, malheureusement sous des pressions plus grandes que la tension de vapeur saturée. Les deux seules densités prises sous la pression de la vapeur saturée correspondent à 1^{atm} et à $0^{atm},105$; elles obéissent aussi au théorème des états correspondants, d'après le Tableau suivant :

Azote.			Acide sulfureux.		
$t°$.	m.	Densité du liquide.	Température correspondante.	Densité correspondante.	Rapport des densités correspondantes.
−193°	0,630	0,830	— 2°,7	1,4417	1,737
−202°	0,559	0,866	—33°,2	1,5195	1,755

La différence des deux rapports est de $\frac{1}{100}$, ce qui est de l'ordre de grandeur des erreurs d'expérience. Soit y la densité critique de l'azote, si le théorème de M. Van der Waals est vrai, on doit avoir

$$\frac{0,830}{y} = \frac{1,4415}{0,52}, \quad \frac{0,866}{y} = \frac{1,5195}{0,52},$$

d'où l'on tire les valeurs

$$y = 0,299, \qquad y = 0,296,$$

qui justifient la loi du tiers de la plus grande densité à l'état liquide (1).

M. Olzewski a donné du méthane liquide une valeur de la densité (0,415 à — 164°) qui, en admettant le théorème des états correspondants, fournit la plus petite densité critique connue : 0,143.

Enfin, Andréeff (2) a étudié avec soin et loin de la température critique, malheureusement dans un petit intervalle de température, la densité de l'ammoniaque liquéfiée. Dans le Tableau suivant, j'ai, comme précédemment, comparé les densités de ce corps à celles de l'acide sulfureux liquide.

Ammoniaque.			Acide sulfureux.		
t^o.	m.	Densité du liquide.	Température correspondante.	Densité correspondante.	Rapport des densités correspondantes.
°			°		
— 10,70	0,6509	0,6497	+ 6,2	1,4170	2,181
— 1,11	0,6802	0,6348	+ 18,8	1,3824	2,178
— 10,40	0,7032	0,6224	+ 28,7	1,3544	2,176
— 16,54	0,7184	0,6138	+ 35,2	1,3359	2,176

Le rapport des densités correspondantes est absolument constant : donc le théorème de M. Van der Waals s'applique ; si u est la densité critique de l'ammoniaque, on doit avoir

$$\frac{0,6497}{u} = \frac{1,4170}{0,52}, \qquad \frac{0,6348}{u} = \frac{1,3824}{0,52},$$

$$\frac{0,6224}{u} = \frac{1,3544}{0,52}, \qquad \frac{0,6138}{u} = \frac{1,3359}{0,52},$$

d'où l'on tire les valeurs de u

$$0,2384, \qquad 0,2387, \qquad 0,2389, \qquad 0,2387,$$

dont la moyenne est 0,2387 (3).

---

(1) Olzewski a donné, pour densité de l'azote liquide sous la pression de 1^{atm}, 0,885, ce qui conduit à une densité critique plus forte de 6,5 pour 100 environ.

(2) ANDRÉEFF, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3e série, t. LVI, p. 317; 1859.

(3) La seule vérification du théorème des états correspondants faite par M. Van

Réciproquement, on peut dire que *le théorème des états correspondants est un criterium certain et commode de l'exactitude des densités de liquides.*

En effet, si un liquide obéit au théorème des états correspondants comme l'acide carbonique et l'acide sulfureux, on devra représenter la variation de sa densité par une formule identique, à un coefficient constant près. Donc, les quotients des densités expérimentales prises non loin de la température critique par le trinôme $m - 0,569 + 1,66\sqrt{1-m}$ devront être très sensiblement constants. Si la suite des valeurs du rapport montre des irrégularités fortuites, elles devront être attribuées à des erreurs d'expérience; si les irrégularités sont considérables et systématiques, ou bien le corps considéré n'obéit pas au théorème de M. Van der Waals, ou bien les expériences sont défectueuses.

Appliquons cette méthode aux expériences de M. G. Ansdell sur l'acide chlorhydrique liquide, et à celles d'Avenarius sur l'éther liquide.

Acide chlorhydrique.

t°.	Densité du liquide.	$\frac{\delta'}{m - 0,569 + 1,66\sqrt{1-m}}$
4°,0	1,135	1,235
9,25	1,085	1,207
13,8	1,0265	1,167
18,1	0,9807	1,141
22,0	0,9417	1,122
26,75	0,9023	1,112
33,4	0,8470	1,107
39,4	0,8026	1,127
44,8	0,7167	1,111
48,0	0,7143	1,216
49,4	0,6634	1,204
50,56	0,5994	1,185

Éther.

t°.	Densité du liquide.	$\frac{\delta'}{m - 0,569 + 1,655\sqrt{1-m}}$
189°,2	0,3052	0,6474
189,0	0,3115	0,6435
188,6	0,3322	0,6644
186,7	0,3690	0,6705
186,5	0,3731	0,6732
185,9	0,3831	0,6776
180,8	0,4184	0,6611
179,5	0,4255	0,6585
173,6	0,4484	0,6451
172,6	0,4566	0,6501
155,3	0,5025	0,6323
150,4	0,5263	0,6461
137,1	0,5524	0,6426
133,1	0,5618	0,6448
129,8	0,5714	0,6490

der Waals sur des densités de liquide prises loin de la température critique est relative à l'éther et à la diéthylamine (voir *Continuität*, p. 163 et 164).

On voit que des erreurs graves entachent les densités de l'acide chlorhydrique liquide.

De 4° à 22°, le rapport considéré diminue de 10 pour 100 de sa valeur; de 22° à 45°, il reste très sensiblement constant, puis il augmente brusquement d'environ 10 pour 100 et diminue ensuite rapidement. Par suite, l'acide chlorhydrique liquide n'obéit pas au théorème des états correspondants, ou bien son étude a besoin d'être reprise.

L'éther présente aussi des irrégularités : ainsi, de 189° à 185°,9, soit dans un intervalle de 3°, le rapport considéré augmente d'environ 5 pour 100 de sa valeur; de 185°,9 à 179°,5 ce rapport diminue de 3 pour 100, après quoi, sauf quelques oscillations, il reprend sa valeur initiale et la conserve pendant un intervalle de 50° environ.

Il semble donc permis de dire que, abstraction faite des irrégularités observées entre 188°,6 et 179°,5, le rapport considéré est constant et égal à 0,646 entre 189°,2 et 129°,8, c'est-à-dire, dans un intervalle de 60°. La formule (¹)

$$\delta' = 0,646(m - 0,569 + 1,655\sqrt{1 - m})$$

doit donc représenter et *rectifier* l'expérience.

L'éther, dont la formule est identique à celle de l'acide carbonique liquide à un facteur constant près, obéit donc au théorème des états correspondants. Par suite, si z est sa densité critique, on doit avoir

$$\frac{1,064}{0,45} = \frac{0,646}{z},$$

d'où

$$z = 0,271 \text{ (²)}.$$

La limite de la demi-somme des densités expérimentales donne sensiblement 0,260.

(¹) Qui devient, avec la notation habituelle,

$$\delta' = 0,0137 + 0,001397\,t - 0,04971\sqrt{189°,5 - t}.$$

(²) Si l'on fait le même calcul pour l'acide chlorhydrique liquide en admettant la valeur constante (1,11) du rapport entre 22° et 45°, on trouve pour densité critique 0,469. On verra plus loin que la limite de la demi-somme des densités donne 0,462.

Remarque. — En résumé, on voit que les densités de la plupart des gaz liquéfiés, oxygène, acide chlorhydrique, etc., sont mal connues particulièrement au voisinage de la température critique. Les méthodes de mesure de ces densités ne sont donc pas suffisamment précises, et il y a lieu de les perfectionner.

La première condition à remplir est d'exercer au-dessus du liquide une pression rigoureusement égale à celle de la vapeur saturée, sous peine d'avoir un liquide comprimé et l'on sait que la compressibilité de ces liquides est très grande. Par suite, *il faut laisser de la vapeur saturée au-dessus du liquide*, conclusion parallèle à celle de M. Perot relativement à la mesure précise des densités des vapeurs saturées, qu'il faut maintenir en présence du liquide générateur.

Laissons de côté l'oxygène, et considérons un gaz à température critique comprise entre 0° et 200°; il sera commode, pour étudier la densité du liquide, d'employer la pompe Cailletet. On pourra opérer ainsi : on enfermera des poids connus *du même gaz* dans deux tubes à densités bien calibrés que l'on installera sur le *bloc* de la pompe; le tube à réservoir le plus petit donnera la densité de vapeur saturée, l'autre servira pour la densité du liquide. Au lieu de réduire dans ce second tube tout le gaz en liquide, comme Avenarius et M. Ansdell, on laissera au-dessus du liquide une petite colonne de vapeur saturée. Soient v et v' les volumes respectifs de la vapeur saturée et du liquide, δ et δ' les deux densités à la température constante t° de l'expérience, si a est le poids du gaz, on a la relation

$$v\delta + v'\delta' = a.$$

Si $v = \frac{1}{30}v'$, une erreur de 3 pour 100 sur δ ne donnera qu'une erreur de $\frac{1}{1000}$ sur δ'.

Supposons le tube calibré de grandes dimensions (70^{cm} à 75^{cm}) et la température telle que $\frac{\delta'}{\delta}$ soit compris entre 1 et 5, par exemple. On peut donner à v et à v' toute une série de valeurs à température constante; on a alors les équations

$$\begin{aligned} v\delta + v'\delta' &= a, \\ v_1\delta + v'_1\delta' &= a, \\ v_2\delta + v'_2\delta' &= a, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Par soustraction 2 à 2, ces équations donneront le rapport $\frac{\delta'}{\delta}$ avec une grande approximation. Comme δ' est mieux connu que δ, le rapport précédent donnera de δ une valeur plus approchée que la mesure directe, et l'on procédera par approximations successives pour le calcul de δ'. Je me propose d'appliquer cette méthode à plusieurs gaz, notamment à l'acide carbonique, et de montrer qu'on peut atteindre dans ce genre de mesures une grande précision.

4. *Calcul des expériences de M. Ansdell sur l'acide chlorhydrique.* — Ce physicien a déterminé les deux volumes spécifiques jusqu'au voisinage immédiat de la température critique (51°,25). Ses expériences sont résumées dans ce Tableau, tiré de son Mémoire, *sauf la dernière colonne*.

A.	B.	C.	D.	E.	F.	$\frac{B}{C}\frac{1}{1+0,00367t}$.
4°,0	137,31	$\frac{1}{38,89}$	7,55	18,18	atm 29,8	5262,7
9,25	118,96	$\frac{1}{45,75}$	7,90	15,05	33,9	5263,7
13,8	103,50	$\frac{1}{53,19}$	8,35	12,39	37,75	5232,0 (¹)
18,1	91,77	$\frac{1}{61,17}$	8,74	10,50	41,80	5263,9
22,0	81,19	$\frac{1}{70,06}$	9,10	8,92	45,75	5263,2
26,75	69,69	$\frac{1}{82,94}$	9,50	7,33	51,00	5263,4
33,4	55,75	$\frac{1}{105,98}$	10,12	5,50	58,85	5263,2
39,4	44,85	$\frac{1}{134,33}$	10,68	4,19	66,05	5263,6
44,8	36,34	$\frac{1}{168,67}$	11,96	3,03	75,20	5263,96
48,0	31,33	$\frac{1}{197,60}$	12,00	2,61	80,80	5263,5
49,4	27,64	$\frac{1}{224,96}$	12,92	2,13	84,75	5263,6
50,56	25,70	»	14,30	1,79	85,33	»
51,0	23,96	»	»	»	»	»

D'après M. Ansdell, la colonne A donne la température du gaz, B le volume de la vapeur saturée, C le rapport du volume de la vapeur saturée au volume initial du gaz *sous la pression de* 1^{atm}, D le volume du liquide, E le rapport du volume de la vapeur saturée à celui du liquide, F la pression de la vapeur saturée en atmosphères.

(¹) Erreur d'expérience évidente.

L'auteur ne dit pas quelle est l'unité de volume avec laquelle sont exprimés les nombres des colonnes B et D, de sorte qu'il est impossible d'en tirer *directement* les densités.

Ce physicien a calculé la densité du liquide, mais à des températures qui ne coïncident pas avec celles de la colonne A; de plus, le calcul n'est pas fait pour la vapeur saturée dont j'avais besoin.

J'ai refait les calculs en me servant de la colonne C qui *doit* représenter le rapport du volume B de la vapeur saturée au volume initial du gaz à la pression de 1^{atm} *et à la température* t^o *de l'expérience*. S'il en est ainsi, la colonne C multipliée par le binôme de dilatation des gaz représente le rapport du volume B de la vapeur saturée au volume initial du gaz à 0° et sous la pression de 1^{atm}; donc, enfin, l'expression symbolique $\frac{B}{C(1+\alpha t)}$ représente, *en fonction d'une unité de volume inconnue*, le volume initial du gaz à 0° et sous la pression de l'atmosphère et doit être constante. C'est ce que montre la dernière colonne du Tableau précédent.

On voit que l'interprétation donnée à la colonne C est exacte, et que le volume initial du gaz, dans les conditions normales, est représenté, *en fonction de l'unité inconnue*, par le nombre 5263,5. Le poids P du gaz, en grammes, est donc, en désignant par x le rapport du centimètre cube à l'unité inconnue,

$$P = 5263,5 \times x \times 0,00162824 = 8,5702\,x.$$

D'autre part, les produits symboliques Bx, Dx représentent en centimètres cubes les volumes de l'acide chlorhydrique à l'état de vapeur saturée et de liquide. Donc

$$\frac{P}{Bx} = \frac{8,5702}{B} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Dx} = \frac{8,5702}{D}$$

donnent respectivement les deux sortes de densités.

La densité à 0° de l'acide chlorhydrique liquide donnée par M. Ansdell est 0,908; le calcul précédent donne

$$1,175 = 0,908 \times 1,293;$$

l'interprétation est facile à trouver.

D'ailleurs, M. Ansdell avait lui-même remarqué l'énorme différence qui existe entre son nombre à 0° et la densité 1,27 citée par Roscoe et Schorlemmer (*Treatise on Chemistry*, t. I, p. 129).

Malgré les irrégularités constatées dans la densité du liquide, on vérifierait facilement que la ligne diamétrale des deux densités est sensiblement une droite représentée par l'équation

$$\delta = 0,595 - 0,0026t,$$

ce qui donne, à la température critique (51°,25),

$$\delta = 0,462.$$

Remarque. — Pendant l'impression de ce Mémoire, M. S. Young a communiqué à la Société de Physique de Londres (6 novembre 1891) un travail de vérification du théorème des états correspondants portant sur les tensions de vapeur et les deux sortes de densités. Il conclut : 1° que les généralisations de M. Van der Waals sont très exactes pour les benzines chlorée, bromée, iodée comparées à la benzine fluorée; 2° que ces généralisations sont grossièrement approximatives pour la benzine, le chlorure de carbone, le chlorure d'étain et l'éther; 3° que pour les 3 premiers alcools et l'acide acétique, elles ne s'appliquent pas du tout.

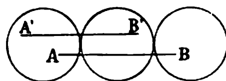
Enfin, M. Young confirme la difficulté que l'on a à mesurer exactement le volume critique et, dans certains cas, il emploie une méthode graphique (voir *Revue générale des Sciences*, 2e année, p. 765).

SUR LA PÉNÉTRATION DE L'ŒIL ET LE DIAMÈTRE DES ÉLÉMENTS RÉTINIENS;

PAR M. G. MESLIN.

On sait que, lorsque la tache, formée sur la rétine par un objet lumineux, n'affecte qu'un élément rétinien (cône), l'œil a la sensation d'un point unique; comme cette sensation reste la même malgré les petits déplacements (c'est-à-dire lorsque la tache vient affecter simultanément deux éléments voisins), on peut en conclure que l'excitation de deux cônes contigus ne donne qu'une sensation unique; pour que deux points paraissent distincts, il faut donc que les centres des taches ne puissent jamais se trouver sur deux éléments adjacents; il ne suffit donc pas, comme plusieurs ouvrages semblent l'indiquer, que la distance de ces centres soit supérieure au diamètre d'un cône; car, si la condition énoncée était remplie à un moment (position A, B), le plus petit déplacement amènerait ces centres sur deux éléments voisins (position A', B'). Pour être certain que cela n'aura jamais lieu, il faut

Fig. 1.



que la distance des centres soit supérieure à *deux fois* le diamètre de ces cônes.

Voyons si cette condition est vérifiée :

D'un côté, on sait que l'œil ne peut distinguer deux points lorsque leur angle apparent est inférieur à 60″, ce qui donne sur le plan de la rétine, à 15^{mm} du point nodal, une distance de

$$15 \frac{60}{200000} = 4^{\mu},5.$$

D'un autre côté, les nombres indiqués pour les diamètres des cônes varient dans un assez grand intervalle; mais les mesures de Schultze, qui se rapportent à la *fovea centralis* (qui est la partie qui nous intéresse) donnent comme limite 2^{μ} et $2^{\mu},5$, dont la moyenne $2^{\mu},25$ est précisément la moitié du nombre trouvé plus haut.

La limite de pénétration de l'œil semble donc provenir de la dimension des éléments nerveux plutôt que de la diffraction ou des aberrations de sphéricité ou de réfrangibilité qui donneraient des limites inférieures à la précédente.

REMARQUE SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FORMULE DES LENTILLES;

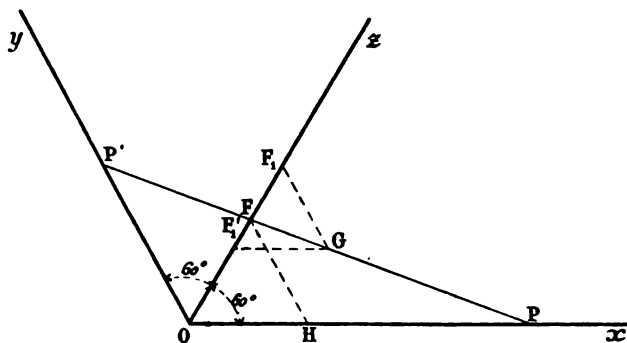
PAR M. M. D'OCAGNE.

J'ai indiqué en 1885, dans ce Journal (¹), un mode de représentation géométrique de la formule des lentilles

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}.$$

Je ferai remarquer aujourd'hui que celui-ci est rendu plus commode par une très légère modification, qui consiste à prendre des axes inclinés à 120° au lieu de les prendre à 90°.

Fig. 1.



En effet, prenons, sur Ox, $OP=p$; sur Oy, $OP'=p'$.

La droite PP′ a pour équation

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{p'}=1.$$

(¹) *Voir* 2ᵉ série, t. IV, p. 554.

Soit F le point où elle rencontre la bissectrice Oz de l'angle xOy. Le triangle OFH étant équilatéral, les coordonnées OH et HF du point F sont toutes deux égales à OF. Donc

$$\frac{OF}{p} + \frac{OF}{p'} = 1$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{OF}.$$

Par suite $OF = f$. De là la construction d'une quelconque des trois quantités p, p' et f quand on connaît les deux autres. Si les axes Ox, Oy, Oz portent trois graduations égales, on voit qu'il suffit de joindre par une droite les points cotés p et p' sur Ox et Oy et de lire la cote f du point où cette droite rencontre Oz pour avoir la distance focale de la lentille.

Dans un cours élémentaire, on pourrait donner la démonstration suivante :

Ayant mené FH parallèlement à P'O, on a

$$\frac{OP}{HP} = \frac{OP'}{HF},$$

ou

$$\frac{OP}{OP - OH} = \frac{OP'}{HF}.$$

Mais, le triangle OFH étant équilatéral, on a

$$OH = HF = OF.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\frac{OP}{OP - OF} = \frac{OP'}{OF}$$

ou

$$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OP'} = \frac{1}{OF}.$$

On voit de même que, pour représenter la formule

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_1'}{p'} = 1,$$

correspondant au cas où les deux faces de la lentille ne plongent pas dans le même milieu, il suffit de prendre encore la droite PP'

pour laquelle $OP = p$, $OP' = p'$. Si $OF_1 = f_1$ et $OF'_1 = f'_1$, la parallèle à OP menée par F_1 et la parallèle à OP menée par F'_1 se coupent en G sur PP'.

Démonstration. — On a

$$\frac{F'_1G}{OP} = \frac{OF - OF'_1}{OF} \quad \text{et} \quad \frac{F_1G}{OP'} = \frac{OF_1 - OF}{OF}.$$

Or, le triangle $F_1F'_1G$ étant équilatéral, on a $F'_1G = F_1G$. Donc

$$OP \times OF - OP \times OF'_1 = OP' \times OF_1 - OP' \times OF$$

ou, en divisant par $OP \times OP'$,

$$\frac{OF_1}{OP} + \frac{OF'_1}{OP'} = \frac{OF}{OP} + \frac{OF}{OP'} = 1,$$

d'après ce qui a été vu plus haut.

BAROMÈTRE CORRIGÉ DE LA TEMPÉRATURE POUR LA PRESSION MOYENNE;

PAR M. H. SENTIS.

Les indications d'un baromètre à siphon peuvent être à peu près indépendantes de la température si le rapport des sections des tubes est convenable. Soit le baromètre représenté (*fig.* 1). Supposons que la température d'abord de 0° s'élève à $t°$ et soient x et y les variations des niveaux du mercure. En écrivant que la pression atmosphérique n'a pas changé, on a

$$(a + b - d - e)D_0 = (x + a + b - d - e - y)\frac{D_0}{1 + mt},$$

d'où

$$x - y = (a + b - d - e)mt.$$

D'autre part, en négligeant la dilatation de l'enveloppe, $S(x + y)$ représente celle de la masse totale du mercure et, par suite,

$$S(x + y) = [S(a + e) + \sigma(b + c + d)]mt.$$

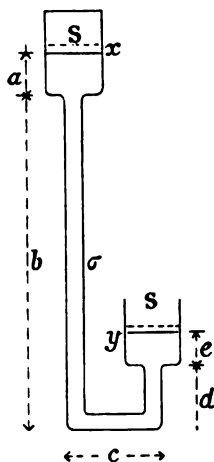
De ces deux équations, on tire

$$2y = \left[-b + d + 2e + \frac{\sigma}{S}(b + c + d)\right]mt.$$

Donc, si l'on a

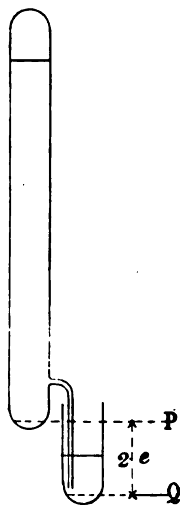
$$\frac{\sigma}{S} = \frac{b - d - 2e}{b + c + d},$$

Fig. 1.



la position du niveau du mercure dans la cuvette sera invariable pour la pression actuelle, malgré les changements de température.

Fig. 2.



On prendra, dès lors, pour e, la valeur qui correspondra à la pression atmosphérique moyenne au lieu d'observation et la cor-

rection de température, telle qu'on l'effectue habituellement, sera toute faite.

La forme qu'on pourrait donner au baromètre normal est représentée (*fig.* 2). Les tubes étant terminés inférieurement par des hémisphères, on considère les niveaux P et Q situés au-dessus des points les plus bas, à une distance égale au tiers du rayon, et l'on voit que, si le mercure arrive dans la petite branche, pour la pression moyenne, au milieu de l'intervalle de ces deux plans, on a $d = 0$, $b = 2e$ et, par suite, $\frac{\sigma}{S} = 0$. Aussi est-ce un tube capillaire qui établit la communication entre les deux branches.

On emploiera le cathétomètre pour opérer ce réglage chaque fois qu'on changera le mercure de la petite branche. Le reste du temps, une vis à tête divisée, que l'on amènera au contact du mercure de la cuvette, indiquera immédiatement la pression atmosphérique, puisque les variations dans la cuvette sont la moitié des variations barométriques.

———

ADAM-F.-W. PAULSEN. — Aurores boréales observées à Godthaab; *Observations internationales polaires: expédition danoise.* Copenhague, 1891.

L'auteur publie le journal des observations de toutes les aurores boréales apparues à Godthaab (sud du Groënland) pendant l'hiver de 1882 à 1883, et fait ressortir les considérations générales qui en découlent.

Les aurores boréales se partagent en deux catégories bien distinctes. Lorsque le phénomène est faible, elles apparaissent simplement sous forme de lueurs ou de nuages lumineux. Les aurores boréales plus marquées affectent la forme d'arcs. Ces arcs peuvent présenter des formes variées, connues sous les noms de *rideaux,* de *bandes,* de *zones,* de *couronnes.* Les aurores en zones et en couronnes ne diffèrent sans doute pas les unes des autres : les différences d'apparences ne doivent tenir qu'à la variation dans l'orientation de la couronne par rapport à l'observateur. Les aurores en forme de rideaux ou de draperies présentent une grande étendue en longueur et en hauteur, mais n'ont aucune épaisseur sensible. Elles peuvent descendre jusqu'à 600^m du sol. Au con-

traire, les aurores en zones et en couronnes se trouvent toujours à des hauteurs extrêmement grandes et pouvant dépasser 320^{km}. Ainsi, dans le sud du Groënland, le champ où les aurores se produisent s'étend depuis les régions les plus élevées de l'atmosphère jusqu'à la surface du sol, tandis que, dans les pays tempérés, le phénomène a lieu uniquement dans les couches supérieures de l'air. Si donc on admet la nature électrique du phénomène, ce courant électrique circule, sous les basses latitudes, dans les plus hautes régions de l'atmosphère, et y produit les décharges d'apparence connue des gaz raréfiés, tandis qu'il descend jusqu'à la surface de la terre dans la zone propre des aurores boréales; la direction verticale de ce courant dans les pays arctiques, jointe aux variations de densité des couches d'air traversées, doit être la cause pour laquelle les apparences du phénomène sont si différentes dans les pays arctiques et dans les régions tempérées.

La couleur ordinaire de l'aurore boréale est blanche avec une faible teinte de vert ou de jaune. Les formes nuageuses ont une couleur plus grisâtre. Les bords des draperies sont souvent momentanément colorés en rouge et en vert.

A Godthaab, c'est à 9^h du soir que se produit le maximum d'activité aurorale diurne, et le maximum annuel a lieu aux environs du solstice d'hiver. Les séries d'observations groënlandaises dénotent un maximum de fréquence aux époques où le nombre des taches solaires est un minimum, et inversement.

La loi énoncée par M. Tromholt et d'après laquelle la zone aurorale se déplace dans le cours des vingt-quatre heures, en sorte que, durant la nuit, elle se dirige vers le nord, semble nettement contredite par l'expérience.

Enfin on a observé une opposition très nette entre le maximum de fréquence des aurores boréales dans les pays arctiques et les pays tempérés. Si ce fait est général, il prouve qu'une évolution plus active des phénomènes de l'aurore boréale sous les basses latitudes affaiblit l'activité aurorale dans la zone proprement dite des aurores. EDGARD HAUDIÉ.

Peter LEBEDEW. — Sur la mesure des constantes diélectriques des vapeurs et la théorie des diélectriques de Mossoti et Clausius; *Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 288; 1891.

L'auteur compare, par la méthode d'Hopkinson, les capacités de deux comdensateurs, le diélectrique de l'un étant constamment l'air, celui de l'autre successivement l'air ou la vapeur de différents liquides. Pour éviter toute condensation, le condensateur à vapeur, maintenu par une enveloppe de vapeur à une température déterminée, est parcouru par un lent courant de vapeur sèche du liquide en expérience.

La constante diélectrique K de l'air étant, d'après Boltzmann et Klemencic, 1,00059 à 0° et 76°, on trouve, en considérant la valeur de l'expression (K — 1) comme proportionnelle à la densité du gaz, la valeur de K pour les différentes températures auxquelles ont été effectuées les mesures.

Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau suivant :

		K.		
	Températures.	de	à	Moyenne.
Benzine	100	1,0026	1,0030	1,0026
Toluène	126	1,0043	1,0044	1,0043
Éther	100	1,0042	1,0046	1,0045
Alcool méthylique	100	1,0056	1,0058	1,0057
» éthylique	100	1,0060	1,0069	1,0065
Formiate de méthyle	100	1,0068	1,0071	1,0069
» d'éthyle	100	1,0076	1,0090	1,0083
Acétate de méthyle	100	1,0072	1,0073	1,0073
» d'éthyle	119 / 122	1,0127	1,0151	1,0140

L'auteur examine ensuite l'accord de la théorie de Mossoti et Clausius avec les résultats expérimentaux et conclut ainsi :

« L'idée de Clausius que les molécules des corps sont conductrices, ou celle de MM. Mascart et Imbert que les molécules possèdent un pouvoir diélectrique extrêmement élevé, ne conduit à aucune contradiction avec les faits expérimentaux.

» La formule $\frac{K+2}{K-1}d = \frac{d}{g} =$ const., où d est la densité et g

l'intervalle moléculaire, peut être employée avec avantage comme formule empirique pour relier la densité à la constante diélectrique. » A. Perot.

ARONS et RUBENS. — Vitesse de propagation des ondes électriques dans quelques isolants solides; *Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 177; 1891 (1).

Dans ce travail, MM. Arons et Rubens ont étendu aux solides les résultats qu'ils avaient obtenus précédemment pour les liquides. Les nombres trouvés pour la constante diélectrique d'une part par la méthode de Schiller, et l'indice pour des longueurs d'onde de 6^m par la méthode des auteurs, vérifient remarquablement la relation de Maxwell. Voici les résultats donnés :

Diélectriques.	Constantes diélectriques μ.	$\sqrt{\mu}$.	Indice $\lambda = 6m$.	Indice $\lambda = 6.10^{-4}m$.
Paraffine fluide......	1,98	1,41	1,47	de 1,48
Paraffine demi-fluide.	2,08	1,44	1,48	à
Paraffine solide......	1,95	1,40	1,43	1,53
Verre n° 1...........	5,37	2,32	2,33	1,51
Verre n° 2...........	5,90	2,43	2,49	1,53

Les auteurs font remarquer combien la constante diélectrique qu'ils ont trouvée pour le verre, 5,37 à 5,90, diffère du nombre donné par J.-J. Thomson et M. Blondlot, 2,8, obtenu avec des oscillations très rapides; ils ne donnent de ce fait aucune explication. Il est regrettable, je crois, que les auteurs n'aient pas indiqué la longueur d'onde des oscillations qui leur ont servi dans la mesure des constantes diélectriques. A. Pérot.

A.-A. MICHELSON. — Sur l'application des méthodes d'interférences aux mesures astronomiques; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXX, p. 1; 1890.

Visibilité des franges d'interférences au foyer d'une lunette; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 255; 1891.

Dans un Mémoire précédent (2), l'auteur avait montré com-

(1) Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 379.
(2) *Ibid.*, p. 91; 1891.

ment la transformation d'une lunette en réfractomètre interférentiel permet de déterminer, avec une grande précision, la direction d'un point lumineux ou l'écart angulaire de deux points; il examine maintenant le cas où l'on observe une source dont le diamètre apparent n'est pas négligeable.

Sa lunette étant réglée pour la vision à l'infini, l'intensité lumineuse, en un point donné du plan focal, est une fonction périodique de la distance b des fentes. Lorsqu'on fait varier b, la position des franges ne change pas; ce qui varie, c'est leur différence d'éclat entre un maximum et un minimum : la *visibilité* est modifiée. L'auteur a tracé, pour un certain nombre de cas (fente rectiligne, cercle, deux cercles égaux, etc.), des courbes de visibilité en portant en abscisses la distance des fentes, et en ordonnées le rapport V de la différence à la somme des intensités d'un maximum et d'un minimum successifs; les points où cette courbe coupe l'axe des abscisses correspondent à un éclairement uniforme du champ. Dans plusieurs séries d'expériences on a vu, en modifiant graduellement l'écartement b, les franges apparaître et disparaître successivement quatre ou cinq fois; les vérifications quantitatives sont d'ailleurs très satisfaisantes. Ainsi, lorsqu'on connaîtra la forme d'un objet et la loi de distribution de la lumière (dans le cas des objets très petits, on admettra que l'éclat est uniforme), on pourra calculer son diamètre apparent.

L'emploi de deux fentes présente cet inconvénient que la largeur des franges diminue à mesure que les fentes s'éloignent l'une de l'autre. On remédie à cet inconvénient en séparant, dans les rayons envoyés par l'astre, deux faisceaux qu'on fait réfléchir par des miroirs mobiles qui restent parallèles à eux-mêmes. On fait disparaître les franges et l'on déduit la différence de marche des deux faisceaux, du déplacement simultané des miroirs produit par une vis double.

Si l'éclairement n'est pas uniforme, on pourra, de l'étude de la courbe de visibilité, déduire la distribution de la lumière sur l'astre étudié; cette question est beaucoup plus compliquée, car l'expression de V contient deux intégrales définies, étendues à toute la surface de la source, et dont il faudrait déterminer l'élément. L'auteur ne donne pas d'indications détaillées sur l'application de la méthode; il affirme seulement qu'elle donne des ré-

sultats au moins aussi précis et beaucoup plus faciles à obtenir que ceux des expériences photométriques. C. Raveau.

A.-A. MICHELSON. — Sur l'application des méthodes interférentielles aux mesures spectroscopiques. I; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 338; 1891.

L'auteur détermine la courbe de visibilité d'une raie spectrale, simple ou double, en admettant successivement des lois très diverses pour la distribution de la lumière dans les raies. Il promet un travail contenant des courbes déduites de l'expérience, et leur interprétation probable quant à la constitution des raies et à l'influence de la vitesse des molécules gazeuses sur leur élargissement. C. Raveau.

Andrews GRAY. — Sur la théorie dynamique de l'action électromagnétique: *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXX, p. 441; 1890.

Maxwell n'a appliqué sa théorie dynamique de l'électromagnétisme qu'aux systèmes entièrement formés de circuits parcourus par des courants. M. Gray montre qu'elle est applicable aux systèmes contenant des aimants et des courants et aux systèmes ne comprenant que des aimants.

Dans ce but, l'auteur commence par écrire les expressions de l'énergie électrocinétique, du travail électromagnétique et de l'énergie fournie par les piles pour un système formé de deux circuits indéformables; puis, assimilant un feuillet magnétique à un circuit de même contour, il cherche ce que deviennent ces expressions pour un système formé d'un feuillet et d'un courant et pour un système de deux feuillets. Il montre alors que leurs conséquences sont conformes aux faits expérimentaux pourvu qu'on admette que le coefficient de self-induction d'un circuit élémentaire d'un aimant est excessivement grand par rapport au coefficient d'induction mutuelle de deux de ces circuits, hypothèse qui revient à considérer un aimant comme formé d'une infinité de circuits élémentaires fermés de longueur excessivement grande par rapport au périmètre de leur section.

M. Gray étudie ensuite l'aimantation du fer doux. Il trouve que le fer doit s'échauffer sous l'influence d'une faible force magnétisante et se refroidir quand la force magnétisante est intense. Ces résultats sont conformes à ceux de la théorie moléculaire du magnétisme du professeur Ewing; il y a un léger désaccord avec la théorie thermodynamique de l'aimantation induite qui n'indique pas qu'il y ait échauffement du fer sous l'influence d'une faible force magnétisante. J. Blondin.

John TROWBRIDGE. — Mouvement des atomes dans les décharges électriques; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXX, p. 480; 1890.

Entre deux pôles en fer passent les décharges oscillantes d'une batterie de bouteilles de Leyde; un spectroscope à réseau métallique concave de Rowland permet de photographier le spectre de l'étincelle; on prend une première photographie en disposant le plan de la fente du spectroscope parallèlement à la direction de l'étincelle, puis une seconde en plaçant le plan de la fente perpendiculairement à cette direction (à cet effet l'un des pôles est percé d'un trou cylindrique).

Si les atomes de fer étaient entraînés par l'étincelle, la longueur d'onde d'une des radiations émises par ce métal dépendrait de la valeur de la vitesse d'entraînement et de la direction de cette vitesse par rapport à celle du faisceau observé, et, par suite, les raies du fer n'auraient pas les mêmes positions dans les deux photographies; le calcul montre d'ailleurs que, s'il en était ainsi, le déplacement des raies serait très sensible à cause de la petitesse de la période de la décharge (environ $0^s,0000003$) et du grand pouvoir dispersif du réseau.

La comparaison des deux photographies n'ayant accusé aucun déplacement des raies, M. Trowbridge en conclut que les ondes électriques se propagent sans entraîner les atomes métalliques et que ceux-ci vibrent sur place pour donner naissance aux ondes lumineuses. J. Blondin.

G. GORE. — De l'influence prépondérante des premières quantités d'électrolytes sur la force électromotrice d'un couple voltaïque; *Phil. Mag.*, 5ᵉ série, t. XXX, p. 483-494; p. 1890.

Dans des recherches antérieures (*Phil. Mag.*, mai 1890), l'auteur avait constaté que, lorsque l'on ajoute successivement des quantités égales d'un acide ou d'un sel à de l'eau pure, la première addition produit sur la valeur de la force électromotrice d'un couple plongé dans cette eau un effet beaucoup plus grand que les additions suivantes. Pour chercher s'il en est toujours ainsi, M. Gore fait de nombreuses expériences avec divers couples plongés dans l'eau pure à laquelle il ajoute diverses solutions salines ou acides; en outre, il étudie la diminution de force électromotrice qu'éprouve un couple plongé dans une dissolution saline ou acide quand on ajoute de l'eau pure. Il observe constamment une influence prépondérante de la première addition.

M. Gore rapproche ce résultat de l'influence prépondérante de la première addition d'un acide ou d'un sel sur la conductibilité électrique de l'eau du dégagement de chaleur relativement grand, produit par l'addition d'une première quantité d'eau à de l'acide sulfurique, etc. Il en conclut que cette influence prépondérante de la première addition est une propriété générale des électrolytes, et il cherche à l'expliquer par une composition des mouvements moléculaires de ces corps. J. Blondin.

E. LECHER. — Mesure des constantes diélectriques au moyen des vibrations de Hertz; *Wied. Ann.*, t. XLII, p. 142-154; 1891.

M. Lecher emploie l'appareil qui lui a servi dans ses recherches antérieures sur la vitesse de propagation des ondes électriques dans les fils métalliques : deux fils rectilignes et parallèles de plus de 11^m de longueur sont respectivement reliés, d'un côté, aux plateaux d'un condensateur à lame d'air, de l'autre à deux plaques métalliques verticales placées en regard et à une petite distance des plaques d'un excitateur de Hertz; un tube à vide est disposé en travers des fils près du condensateur. En déplaçant le long des

fils un fil transversal qui les réunit, l'éclat du tube varie ; on note les positions qui correspondent au maximum d'éclat pour diverses valeurs de l'écartement des plateaux du condensateur. On met ensuite entre ceux-ci une lame diélectrique et l'on modifie l'écartement jusqu'à ce que le tube reprenne l'éclat maximum, le tube transversal étant dans l'une des positions précédemment notées. On déduit de là l'épaisseur d'air équivalente à la lame diélectrique et, par suite, le pouvoir inducteur de cette dernière.

Dans une seconde série d'expériences, l'auteur emploie deux condensateurs identiques; un des plateaux de chacun d'eux est relié à un pôle d'une bobine de Ruhmkorff dont l'autre pôle est au sol; les deux autres plateaux sont respectivement reliés aux deux paires de quadrants d'un électromètre. En interposant une lame diélectrique entre les plateaux d'un condensateur, l'aiguille de l'électromètre dévie et, pour la ramener au zéro, il faut écarter les plateaux. La mesure de cet écartement permet d'obtenir l'épaisseur d'une lame d'air équivalente à la lame diélectrique.

Une troisième série d'expériences a été faite en remplaçant, dans l'appareil précédent, la bobine par une petite machine statique dont les pôles étaient écartés de $0^{cm},05$. Le Tableau suivant résume les résultats obtenus par ces trois méthodes :

	Constante diélectrique.				
	Verre				
Durée de la charge en secondes.	à glaces.	ordinaire.	Ébonite.	Pétrole	Eau.
0,5	4,67	4,64	2,64	non mesurée	
$0,5 \times 10^{-3}$....	5,34	5,09	2,81	2,35	∞
$0,3 \times 10^{-7}$....	7,31	6,50	3,01	2,42	∞

On voit que la constante augmente quand la durée de la charge diminue. Ce résultat est en contradiction avec ceux des expériences antérieures de J.-J. Thomson et des récentes recherches de M. Blondlot (1).

J. Blondin.

(1) Voir *Journal de Physique*, mai 1891; p. 197.

Horace Lamb. — Sur la flexion d'un ressort élastique plat; *Phil. Mag.*, 5ᵉ série, t. XXXI, p. 182-188; 1891.

Si l'on soumet à une flexion une barre élastique de section rectangulaire, cette section se déforme : le côté de la section qui est situé sur la barre rendue convexe par la flexion se creuse suivant une courbe concave, tandis que le côté opposé, appartenant par suite à la face devenue concave, prend une forme convexe. La théorie ordinaire de l'élasticité permet de trouver une relation entre le rayon de courbure ρ d'un filet longitudinal passant par un point de la barre et le rayon de courbure ρ_1 du filet transversal passant par ce point; cette relation contient le coefficient de Poisson et, par conséquent, permet la détermination de ce coefficient si l'on mesure expérimentalement, comme l'ont fait M. Cornu et M. Mallock, les valeurs de ρ et ρ_1.

Mais, d'après une remarque de Thomson et Tait, cette relation n'est exacte que si la flexion est assez faible pour que le rayon ρ soit très grand par rapport au quotient $\frac{b^2}{h}$ du carré de la largeur b de la barre par son épaisseur h. Pour en trouver une expression générale applicable dans tous les cas, M. Lamb décompose la barre en éléments parallélépipédiques par deux systèmes de sections normales, les unes perpendiculaires, les autres parallèles à sa longueur; les faces de l'élément formées par le premier système sont soumises à une tension P et à un couple G par unité de surface; celles qui sont formées par le second système sont soumises à une tension Q, un couple H et une force Z dirigée suivant la normale à la courbe formée par un filet longitudinal. En écrivant que l'élément est en équilibre, l'auteur obtient les valeurs de ces forces et de ces couples en fonction des constantes d'élasticité. Ces valeurs, assez complexes dans le cas général, se simplifient quand ρ est très petit ou très grand en comparaison de $\frac{b^2}{h}$; dans ce dernier cas on retrouve, entre ρ et ρ_1, la relation admise jusqu'ici.

J. Blondin.

EDWARD B. ROSA. — Pouvoir inducteur spécifique des électrolytes; *Phil. Mag.*, t. XXXI, 6e série, p. 188-207; 1891.

Les liquides électrolytes, comme l'eau et l'alcool, renfermant des traces d'impuretés, ont-ils un pouvoir inducteur spécifique *vrai*, ou bien ne possèdent-ils qu'un pouvoir inducteur *apparent* résultant de leur conductibilité électrique? Pour répondre à cette question l'auteur mesure, au moyen d'une balance de torsion, la force attractive qui s'exerce entre deux électrodes de platine plongées dans un liquide et chargées par un courant dont le sens est renversé 2000 à 4000 fois par minute à l'aide d'un commutateur tournant. En faisant varier les conditions des expériences, il a constaté que : 1° l'attraction F est proportionnelle au carré de la différence de potentiel V des électrodes; 2° elle varie avec la distance e des électrodes de telle sorte que $\frac{1}{F}\frac{dF}{de}$ reste constant; 3° elle varie fort peu avec le nombre des renversements du courant de charge; 4° elle reste sensiblement la même quand, par l'addition d'une goutte d'une dissolution saline, on produit une augmentation très grande de la conductibilité du liquide; 5° une élévation de température du milieu diminue cette attraction, tandis que, au contraire, elle augmente la conductibilité du milieu.

La discussion de ces résultats montre que la force attractive ne peut dépendre de la conductibilité, que les faibles variations constatées quand la conductibilité du liquide augmente, sa température restant constante, doivent être attribuées à une variation de la polarisation des électrodes, et que cette attraction est représentée, comme dans le cas des diélectriques, par la formule

$$F = AKV^2,$$

où A est un coefficient dépendant des dimensions géométriques du condensateur dont les électrodes forment les armatures et K un coefficient ne dépendant que de la nature du liquide.

Les liquides électrolytiques possèdent donc un pouvoir inducteur spécifique K. En prenant le rapport des attractions observées dans divers liquides d'une part, et dans l'air d'autre part, les con-

ditions de l'expérience étant les mêmes dans les deux cas, et le pouvoir inducteur de l'air étant pris pour unité, l'auteur a obtenu pour les pouvoir inducteurs de ces liquides :

Eau à 25°C	75,7
Alcool à 25°C	25,7
Huile de cachalot à 20°C	3,09
Benzine à 21°C	2,45
Essence de térébenthine commerciale à 18°,6C	2,43
Pétrole *Neutral* à 21°C	2,26
Pétrole *Diamond White*	2,11

Les valeurs trouvées pour l'eau et l'alcool sont loin de satisfaire à la relation de Maxwell, $K^2 = n$, où n est l'indice de réfraction de la substance. L'auteur explique cette divergence en comparant l'action des ondes électriques sur l'eau et l'alcool à celle des forces mécaniques sur la résine; ce corps se comporte comme un solide élastique pour les forces périodiques à très courte période tandis qu'il se rapproche des corps mous quand il est soumis à une force constante; de même, l'eau et l'alcool se comporteraient comme de véritables diélectriques pour les ondes de période comparable à celle de la lumière, quoiqu'ils agissent comme des corps médiocres conducteurs quand la période des ondes est, comme dans les expériences de l'auteur, environ un million de fois plus grande que celle des vibrations lumineuses. J. Blondin.

George-M. MINCHIN. — Expériences de photo-électricité; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 207-238.

Deux électrodes métalliques, recouvertes ou non d'émulsions de divers sels dans le collodion ou la gélatine, sont plongées dans un liquide; l'une d'elles est maintenue dans l'obscurité tandis que l'autre est exposée à des rayons lumineux; un courant se produit dans le fil qui réunit les électrodes. En variant la nature des électrodes, des émulsions qui les recouvrent, du liquide dans lequel elles plongent, la couleur et l'intensité du faisceau lumineux, etc., l'auteur a obtenu un grand nombre de résultats intéressants mais ne présentant aucun lien. Le plus important peut-

être est qu'avec des électrodes d'étain préparées convenablement et plongées dans l'alcool méthylique, la force électromotrice est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité lumineuse.

L'auteur expose ensuite quelques recherches sur les récepteurs à sélénium.

Il termine en indiquant trois problèmes qui lui paraissent pouvoir être résolus par les phénomènes actino-électriques : la construction d'un photomètre réellement scientifique, la photographie à distance (qui était l'objet de ses premières recherches), la transformation de la chaleur rayonnée par le Soleil en travail utile.

J. Blondin.

Shelford BIDWELL. — Quelques expériences avec les récepteurs à sélénium : *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 250-256; 1891.

L'auteur indique les diverses circonstances qui, d'après ses propres expériences et celles d'autres physiciens, influent sur la grandeur de la variation de résistance qu'éprouve la variété cristalline du sélénium sous l'influence de la lumière, et en déduit les dispositions qu'il convient d'adopter pour obtenir une grande sensibilité. Il croit que, lorsque les électrodes sont en cuivre, la sensibilité résulte de la formation d'une petite quantité de séléniure de cuivre aux surfaces de contact.

Il décrit ensuite quelques expériences, faciles à répéter et destinées à montrer les variations de conductibilité du sélénium sous l'influence de la lumière. Citons la suivante : Un récepteur à sélénium est monté en série avec une pile et un relais qui peut fermer ou ouvrir un circuit contenant une forte pile et une sonnerie ou une lampe à incandescence; la sonnerie reste en repos quand le récepteur à sélénium est éclairé par la flamme d'un bec de gaz, et se met en marche si l'on interpose un écran sur le trajet des rayons; de même, la lampe à incandescence reste obscure quand le sélénium est éclairé et brille quand on intercepte les rayons.

J. Blondin.

ARTHUR SCHUSTER. — Influence de la flexion des aiguilles magnétiques sur l'inclinaison magnétique apparente; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 275-281; 1891.

La méthode adoptée pour la mesure de l'inclinaison élimine l'erreur résultant de ce que le centre de gravité de l'aiguille ne se trouve pas exactement sur l'axe de rotation; mais elle suppose que, dans toutes les positions de l'aiguille, le centre de gravité reste à la même distance de l'axe. En réalité, la flexion qu'éprouve l'aiguille sous l'action des poids de ses deux moitiés fait varier cette distance et introduit ainsi une erreur dont on n'a pas tenu compte jusqu'ici. On voit facilement que le déplacement h au centre de gravité fait tourner l'aiguille d'un angle δ donné par la relation

$$mgh \sin\varphi = \text{TM}\,\delta,$$

où m est la masse de l'aiguille, M son moment magnétique, T la force magnétique terrestre et φ l'inclinaison. La théorie de l'élasticité permet d'obtenir h pour une aiguille de forme rectangulaire et pour une aiguille formée de deux triangles isoscèles allongés, réunis par leurs bases, et montre que la valeur de h est trois fois et demie plus petite pour la dernière aiguille que pour la première. L'auteur a calculé les valeurs de δ pour des aiguilles de diverses formes et de diverses longueurs et a trouvé que δ atteint $1'19''$ pour une aiguille rectangulaire de 23^{cm} de longueur et seulement $5''$ pour une aiguille en pointe de $7^{\text{cm}},5$ de longueur. Ces résultats expliquent les différences systématiques que l'on constate dans les mesures de l'inclinaison faites avec des aiguilles de formes ou de longueurs différentes. J. BLONDIN.

T.-H. BLAKESLEY. — Solution d'un problème géométrique de magnétisme; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 281-285; 1891.

Supposons connues les distances m et n des pôles M et N à un point O de l'axe qui les joint; menons en ce point une perpendiculaire à cet axe et cherchons la distance $d = \text{OP}$ du point O au point P de cette perpendiculaire où la direction du champ est nor-

male à l'axe de l'aimant. En écrivant qu'en ce point les composantes parallèles à l'axe des deux forces respectivement dues au pôle M et au pôle N sont égales et opposées, on obtient la relation

$$\frac{m}{(d^2+m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{n}{(d^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qu'on peut encore écrire

$$\left(\frac{d^2}{2mn}\right)^3 - \frac{3}{4} \times \frac{m^2+n^2}{2mn} = 0.$$

L'auteur identifie cette expression avec la suivante,

$$\cos h^3\theta - \frac{3}{4}\cos h\theta - \frac{1}{4}\cos h 3\theta = 0,$$

et obtient ainsi les deux égalités

$$\frac{m^2+n^2}{2mn} = \cos h 3\theta, \qquad \frac{d^2}{2mn} = \cos h\theta,$$

qui permettront de calculer très rapidement d à l'aide de tables de sinus et de cosinus hyperboliques.

L'auteur fait observer que la résolution de ce problème offre un certain intérêt dans l'étude des déviations qu'éprouve la boussole d'un navire en fer avec les changements d'orientation de l'axe de ce navire. Il fait également remarquer que, si l'on détermine expérimentalement le point P, en déplaçant dans le champ de l'aimant une très petite aiguille aimantée, et que l'on mesure la valeur de d et la distance $l = \frac{m+n}{2}$ du point O au milieu de l'aimant, il est facile de déduire de ces données la distance

$$m - n = 2a$$

des deux pôles, distance qu'il est souvent utile de connaître dans les expériences sur le magnétisme; on trouve pour les équations servant à calculer a

$$a = l \tang h\frac{3\theta}{2}, \qquad l = d\sqrt{\frac{\cos h 3\theta + 1}{4\cos h\theta}}.$$

J. BLONDIN.

BLAKESLEY. — Contributions nouvelles à la dynamométrie, ou mesure de la puissance. *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 346.

AYRTON et TAYLOR. — Généralisation de certaines formules démontrées dans un cas particulier, par M. Blakesley; *Ibid.*, p. 354.

L'emploi de l'électrodynamomètre, pour la mesure de la puissance, est justifié par les considérations suivantes : l'indication de l'appareil a les dimensions du carré d'une intensité; il suffira donc de connaître une résistance convenable pour mesurer une puissance. Plus généralement, la valeur moyenne d'une fonction quadratique à coefficients constants, de plusieurs intensités, pourra se déterminer au moyen de l'électrodynamomètre. On déterminera séparément chacun des termes en faisant passer dans les deux bobines de l'appareil les deux courants dont les intensités figurent dans un terme. M. Blakesley appelle *split dynamometer* un électrodynamomètre, dans les deux circuits duquel passent des courants entièrement indépendants.

La puissance moyenne, fournie à un circuit déterminé, étant égale au produit moyen d'une force électromotrice par une intensité, on la mettra sous une forme convenable si l'on peut exprimer la force électromotrice en fonction linéaire et homogène de plusieurs intensités. L'auteur traite d'abord le cas d'une génératrice fournissant un courant à un circuit contenant un appareil quelconque sur lequel est branché parallèlement un circuit sans induction; la mesure de la puissance, fournie au premier fil, pourra se faire au moyen d'une ou de deux bobines; on retrouve en particulier l'emploi du wattmètre ordinaire, en supposant que l'induction du circuit de tension soit annulée.

Dans les transformateurs on pourra, au moyen de trois électrodynamomètres placés sur chacun des deux circuits et à cheval sur les deux circuits, mesurer la puissance totale fournie au primaire, et, séparément, la puissance perdue par échauffement du primaire, du secondaire et du noyau.

L'auteur termine en remarquant que le carré de l'intensité d'un courant est la seule quantité intéressante au point de vue pratique, de même que le carré d'une force électromotrice, et que c'est également peine perdue de combiner des appareils qui mesurent l'intensité moyenne en ampères d'un courant alternatif ou des

voltmètres dont les indications sont proportionnelles au nombre de volts et non au carré de ce nombre.

Toutes les formules établies dans ce Mémoire supposent seulement que les courants soient périodiques, quelle que soit la loi de leur variation; MM. Ayrton et Taylor démontrent, indépendamment, la généralité de relations établies autrefois par M. Blakesley à l'aide de considérations géométriques qui supposaient les courants sinusoïdaux. C. RAVEAU.

J. PERRY. — Sur l'étude des transformateurs; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXII, p. 168; 1891.

Sur la mesure de la puissance dans les transformateurs par la méthode de M. Blakesley; *Ibid.*, p. 185.

Pour étudier les phénomènes complexes dont le noyau d'un transformateur est le siège, l'auteur croit qu'il est rationnel de faire d'abord les calculs en supposant constants les coefficients d'induction propre et d'induction mutuelle; la comparaison des nombres obtenus avec les résultats expérimentaux indiquera l'ordre de grandeur de la perturbation causée par l'hystérésis et les courants de Foucault. Ce résultat, très intéressant, des calculs effectués pour neuf valeurs différentes de la fréquence, est que, pour les fréquences un peu élevées, telles qu'on les rencontre dans la pratique, la phase et l'intensité du courant secondaire, la puissance fournie et le rendement sont à peu près indépendants de la période. On peut exprimer le même fait en disant que ce sont les seuls rapports des coefficients d'induction qui influent; leur valeur absolue est à peu près indifférente, par suite aussi, celle de μ; l'hystérésis ne doit donc pas jouer un rôle important.

Un résultat plus inattendu, c'est l'influence considérable qu'exerce une différence, même très faible, entre les valeurs du flux d'induction à travers le primaire et le secondaire; la méthode, basée sur la considération de ce flux et dans laquelle on néglige cette cause d'erreur, ne peut donc donner de résultats exacts.

Cette objection vicie les démonstrations de M. Blakesley. L'auteur établit, dans un second Mémoire, que la formule finale qui

donne l'expression de la puissance fournie au primaire, est néanmoins exacte, si l'on admet que les effets parasites soient négligeables. C. RAVEAU.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annales de Chimie et de Physique.

6e série, t. XXV; janvier 1891.

ANGE BATTELLI. — *Sur les propriétés thermiques des vapeurs*, p. 38.

Le P. A. LERAY. — *Mémoires sur la théorie cinétique des gaz*, p. 86.

H. MOISSAN. — *Détermination de quelques constantes physiques du fluor*, p. 125.

Philosophical Magazine.

5e série, t. XXXII; décembre 1891.

C. WILSON. — *Influence de la charge sur la flexion des lames*, p. 481.

J. TROWBRIDGE. — *Amortissement des oscillations électriques des fils de fer*, p. 504.

J. PERRY. — *Table d'harmoniques sphériques, calculés par MM. Holland, Jones et Lamb*, p. 512.

W. SUTHERLAND. — *Théorie cinétique des solides*, p. 524.

J. MAC COWAN. — *Supplément à un Mémoire sur l'onde solitaire*, p. 553.

W. THOMSON. — *Instabilité d'un mouvement périodique*, p. 555.

SUR LA MASSE DE L'ATMOSPHÈRE;

PAR M. MASCART.

On calcule habituellement la masse de gaz qui constitue l'atmosphère en l'assimilant à celle d'une couche de mercure qui couvrirait le sol, et dont la hauteur est définie par la pression moyenne.

Si l'on fait abstraction de la vapeur d'eau et que l'on appelle hauteur *réduite* H de l'atmosphère celle d'une couche de même densité (dans le sens de masse spécifique) qu'au niveau de la mer, et qui ferait équilibre à la pression B du baromètre, les hauteurs H et B sont en raison inverse des densités correspondantes.

On a donc, à la température t,

$$\frac{H}{B} = \frac{13600}{1,293} \frac{0^m,760}{B} \frac{273+t}{273},$$

$$H = 7991^m \frac{273+t}{273}.$$

Le rayon R de la Terre étant de 6378^{km}, il en résulte

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{798} \frac{273+t}{273}.$$

Cette évaluation n'est qu'approchée, car on a supposé la gravité constante et l'on n'a pas tenu compte de l'agrandissement sensible des surfaces sphériques à mesure qu'on s'écarte du sol. L'erreur peut être notable, comme je vais essayer de le montrer, en supposant que l'atmosphère est en équilibre et négligeant les effets dus à la rotation.

Si l'on désigne par p la pression, g la gravité et ρ la densité de l'air à la hauteur h, on a

$$dp = -\rho g \, dh.$$

En indiquant par l'indice o les termes relatifs à la surface et posant

$$p_0 = \rho_0 g_0 H, \qquad s = \frac{h}{R+h} = 1 - \frac{R}{R+h},$$

où la quantité H représente, comme plus haut, la hauteur réduite

de l'atmosphère, il en résulte

$$(1) \qquad \frac{dp}{p_0} = -\frac{\rho}{\rho_0}\frac{R}{H}\frac{R\,dh}{(R+h)^2} = -\frac{\rho}{\rho_0}\frac{R}{H}\,ds.$$

Cette première équation n'implique aucune hypothèse, si ce n'est qu'on a négligé en chaque point les variations de gravité dues aux couches atmosphériques situées plus bas.

Admettons d'abord que la température soit constante et que la loi de Mariotte reste applicable jusqu'aux plus faibles pressions. Le rapport des densités est alors égal à celui des pressions; par suite,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{R}{H}\,ds, \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{R}{H}s}.$$

C'est la formule connue de Laplace. Elle donne bien une pression à peu près nulle dès que la quantité s, toujours inférieure à l'unité, prend une valeur sensible, puisque le rapport $\frac{R}{H}$ est voisin de 800. Toutefois, en dehors des considérations physiques qui ne permettent pas de supposer la température constante, cette expression ne peut pas représenter exactement le phénomène, parce qu'elle conduirait à une masse infinie.

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = f(s),$$

la fonction $f(s)$ étant égale à l'unité pour $s = 0$, continuellement décroissante, et nulle pour $s = 1$, la masse d'air dM, relative à la hauteur dh, est

$$dM = 4\pi(R+h)^2\rho\,dh = 4\pi R^3\rho_0\frac{f(s)}{(1-s)^4}\,ds.$$

Désignant par K la hauteur d'une couche homogène de densité ρ_0 et de même masse totale, on peut écrire

$$M = \frac{4}{3}\pi[(R+K)^3 - R^3]\rho_0 = 4\pi R^2\rho_0\frac{K}{R},$$

$$(2) \qquad \frac{K}{R} = \int_0^1 \frac{f(s)\,ds}{(1-s)^4}.$$

Pour que la masse M soit limitée et que le rapport $\frac{K}{R}$ reste très

petit, il serait donc nécessaire que le rapport $f(s)$ des densités renfermât $(1-s)^4$ en facteur. En particulier, toute forme exponentielle est inadmissible.

Si l'on appelle T la température absolue du gaz, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac donnent

$$\frac{\rho T}{p} = \frac{\rho_0 T_0}{p_0} = \frac{T_0}{g_0 H},$$

et l'équation différentielle devient

$$\frac{dp}{p} = \frac{R}{H} \frac{T_0}{T} ds. \tag{3}$$

Une seconde hypothèse consiste à admettre que la température est définie par la condition qu'une masse d'air, s'élevant dans l'atmosphère, n'éprouve aucun gain ni perte de chaleur par rayonnement ou conductibilité, c'est-à-dire suive une transformation adiabatique.

On trouve alors que la pression, la densité et la température deviendraient nulles à une hauteur de 28^{km} à 30^{km}. Ce résultat est encore très éloigné de la vérité, mais en sens contraire, car on est certain qu'il existe de l'air à des hauteurs notablement plus grandes et, si l'atmosphère est réellement limitée, la limite doit être beaucoup plus élevée.

En effet, M. Jesse a pu photographier, au milieu de la nuit, des nuages, dits lumineux, de deux stations assez éloignées pour que leur parallaxe, rapportée aux étoiles voisines, parût déterminée avec une grande exactitude, et la hauteur dépassait parfois 80^{km}; la pression doit encore être notable dans ces régions pour que les cristaux de glace y soient maintenus en suspension. D'autre part, l'observation des poussières cosmiques, des bolides et surtout celle des aurores polaires, indiquent des altitudes supérieures à 200^{km} et même à 500^{km}.

D'après ce que l'on sait sur les décharges électriques, on est conduit à admettre que la densité des gaz n'est pas nulle à ces hauteurs et doit être de même ordre que celles qui restent dans les tubes à gaz raréfiés, c'est-à-dire d'un millionième environ de la densité relative aux conditions normales.

Nous représenterons le rapport des densités par l'expression

$$(6)\qquad \frac{\rho}{\rho_0} = f(s) = (1-s)\,e^{-\alpha s},$$

qui donne, d'après l'équation (2),

$$\frac{K}{R} = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha}), \qquad \text{ou sensiblement} \qquad \frac{K}{R} = \frac{1}{\alpha}.$$

La quantité d'air située au-dessus de la hauteur h est une fraction $e^{-\alpha s}$ de la masse totale.

Supposons, pour fixer les idées, qu'à la hauteur de 700^{km}, où $s = \frac{1}{10}$, la densité soit réduite à une fraction 10000 fois plus faible qu'un millionième, c'est-à-dire à 10^{-10} : on a alors

$$10^{-10} = (0,9)\,e^{-\frac{\alpha}{10}},$$

$$\alpha = 217,7.$$

Il en résulte, pour la température de $10°$,

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{770}, \qquad \frac{K}{H} = \frac{770}{218} = 3,53 ;$$

la masse de l'atmosphère serait ainsi presque quadruplée.

Dans ces conditions, la quantité d'air située au delà de 700^{km} n'est qu'une fraction de la masse totale inférieure à 10^{-9}, et l'on ne fait pas une erreur de $\frac{1}{1000}$ en limitant l'intégration à l'altitude de 200^{km}, où la densité serait réduite à moins de $\frac{1}{1000}$.

Toutefois, cette valeur du coefficient α conduirait à des pressions trop grandes pour les altitudes modérées, mais on peut se rapprocher davantage des observations.

La hauteur du baromètre à différentes altitudes et la température correspondante de l'air permettent de calculer le rapport des densités, car on a, par l'équation (4),

$$\alpha = \frac{1}{s}\, l\left[(1-s)\frac{\rho_0}{\rho}\right].$$

On remarquera, d'abord, que les stations basses ne peuvent donner qu'une approximation insuffisante, car les erreurs corres-

pondantes des quantités ρ et α sont

$$\frac{d\rho}{\rho} = -s\,d\alpha.$$

Pour l'altitude de 640^{m}, le facteur s est égal à $\frac{1}{10000}$, de sorte que le coefficient α éprouverait une variation de 10 unités pour une erreur de $\frac{1}{1000}$ sur le rapport des densités; or les corrections des instruments, et surtout l'influence qu'exercent les reliefs du sol sur la décroissance des températures, ne permettent guère d'espérer une plus grande approximation.

D'autre part, si B est la lecture barométrique à la hauteur h, corrigée de la température, la correction de gravité donne pour la pression réelle $B(1-s)^2$, et l'on a

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{B_0}{B(1-s)^2}\,\frac{T}{T_0},$$

$$\alpha = \frac{1}{s}\,l(1-s)^2\,\frac{B_0}{B}\,\frac{T}{T_0}.$$

Je prendrai d'abord, comme exemple, l'observation de Bravais et Martins sur le mont Blanc, à 4815^{m}, où la pression barométrique était de $424^{mm},25$ et la température $-7°,6$, pendant qu'on avait, à l'Observatoire de Genève, situé à l'altitude de 408^{m}, $727^{mm},45$ et $19°,3$. On en déduit, pour le niveau de la mer, par la formule barométrique, $762^{mm},95$ et $21°,7$; le coefficient α, calculé par l'observation du mont Blanc, est de 637.

De même, la moyenne des observations faites pendant quinze années sur le Pike's Peak, à 4311^{m}, donne pour la hauteur du baromètre $451^{mm},02$ et une température de $-7°,06$. En admettant que la pression moyenne au niveau de la mer soit 763^{mm} et la température $16°$, il en résulte $\alpha = 653,2$.

Il serait plus correct de soumettre la formule à une série d'épreuves échelonnées, mais on possède très peu d'observations météorologiques à différentes hauteurs que l'on puisse utiliser pour une étude semblable. En outre, la température est singulièrement modifiée, dans les stations de montagne, par les circonstances topographiques et l'on connaît mal les conditions qui conviendraient aux mêmes altitudes dans l'air libre.

Sous ces réserves, on trouve dans le réseau des observations

[illegible]

[illegible] les gouttes d'eau [illegible] qui forment les nuages ; il est donc à présumer que [illegible] diminue réellement d'une manière encore [illegible] rapide que ne l'indiquerait l'équation (4).

Cette discussion est sans doute bien conjecturale, puisqu'on étend les formules au delà de la limite des opérations, et je ne la présente qu'avec une grande réserve; mais la marche du phénomène ne paraît pas douteuse, et la correction relative à la vapeur d'eau ne changerait pas beaucoup les résultats.

D'ailleurs, les lois physiques dont on fait usage ne sont plus applicables aux régions supérieures de l'atmosphère; il est même probable que la densité n'est pas une simple fonction de la hauteur, quelle que soit la distribution des températures, et que la superposition de deux couches identiques, dont chacune est en équilibre, ne constituerait pas une atmosphère en équilibre stable.

Enfin le problème devient bien plus complexe, si l'on fait intervenir les mouvements intérieurs de l'atmosphère et la tumescence qui doit se produire dans la zone équatoriale, par suite du mouvement de rotation.

Il paraîtra peut-être légitime d'en conclure que l'on commet une erreur importante, quoiqu'il soit difficile de la préciser, en évaluant la masse totale de l'atmosphère par la pression qu'elle exerce à la surface du sol.

Ajoutons cependant que, s'il n'est pas permis, en toute rigueur, de représenter le rapport des densités par une simple formule exponentielle, qui conduirait à une masse totale inadmissible, l'objection n'a plus de portée quand on utilise ces formules pour évaluer la quantité d'air que rencontre un faisceau de rayons lumineux; cette quantité d'air est alors comparable à celle que renferme une colonne verticale de section constante, et demeure limitée. Les théories de la réfraction atmosphérique, en particulier celles de Laplace et de Bessel, qui reposent sur des expressions analogues, restent donc à l'abri de ce genre de critiques.

SUR LA DÉTERMINATION DE L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CALORIE;

PAR M. CONSTANTIN MICULESCU (1).

Dans les recherches dont je vais exposer ici les points principaux, je me suis proposé de déterminer par une méthode directe l'équivalent mécanique de la calorie.

A cet effet, j'ai cherché à réaliser la mesure du travail et celle de la chaleur par des *méthodes de zéro,* tout en augmentant les valeurs absolues des quantités mesurées.

Dans la méthode de Joule le travail mis en jeu était fort petit; il en était de même, forcément, pour la quantité de chaleur dégagée. Pour pouvoir mesurer cette dernière avec quelque précision dans la lecture du thermomètre, il fallait donc faire durer l'expérience pendant un temps assez long et répéter vingt fois la chute du poids moteur, ce qui entraînerait, pour l'expérience, une durée totale de trente-cinq minutes. Les corrections dues au refroidissement, qui est proportionnel au temps, prenaient, dès lors, une importance énorme.

J'évite cet inconvénient en réduisant à quelques minutes la durée de la mesure; je puis néanmoins augmenter la précision des mesures en opérant : 1° avec une force motrice considérable (un cheval-vapeur); 2° avec des appareils thermométriques d'une grande sensibilité, employés concurremment avec une méthode calorimétrique exempte de corrections.

Pour mesurer le travail, je suspends le moteur sur un bâti mobile autour d'un axe horizontal, qui coïncide géométriquement avec l'axe de rotation de la machine; dès que cette dernière tourne en effectuant un travail extérieur, le bâti tend à s'incliner en sens inverse de la rotation; on le ramène à la position d'équilibre en lui appliquant une force de moment connue.

Le moteur est donc lui-même son propre dynamomètre.

Quant à la quantité de chaleur, elle est mesurée par la méthode à *température constante :* autour du calorimètre proprement dit,

---

(1) Ce travail est extrait d'un Mémoire plus étendu publié dans les *Annales de Chimie et de Physique.*

fixé indépendamment du bâti oscillant, et dans l'eau duquel tournent des hélices de bateau, circule un courant d'eau froide dont on règle la vitesse de façon que l'eau calorimétrique ne s'échauffe pas. Le poids d'eau écoulée pendant un temps donné peut mesurer la chaleur dégagée pendant ce même temps.

Je me suis placé dans une des caves du laboratoire des Recherches physiques de la Sorbonne, les conditions extérieures de température étant à peu près constantes dans ces conditions.

Avant d'effectuer les mesures définitives, j'avais d'ailleurs fait plusieurs séries d'expériences préalables, à l'aide d'un appareil que j'avais construit moi-même; le moteur, construit par Trouvé, avait une force moindre que 17^{kgm}.

Le calorimètre était à une seule enveloppe.

Dans ces conditions et malgré l'imperfection de cet appareil, j'avais trouvé le nombre 436, nombre trop fort; mais beaucoup de corrections ne pouvaient se faire avec cet appareil primitif; c'est ce qui m'a engagé à entreprendre les expériences qui font l'objet du présent Mémoire.

Détails de l'appareil. — L'appareil se compose essentiellement : d'un moteur, d'un calorimètre, d'un dynamomètre et d'organes accessoires servant aux liaisons et à la mesure de la vitesse du moteur.

Le *moteur* que j'ai employé était une machine Gramme (¹), pesant 43^{kg}, d'une puissance d'un cheval-vapeur et tournant avec une vitesse de 1200 tours par minute. Elle était alimentée par le courant de 40 accumulateurs Pollak; ce courant était amené par deux fils dans deux godets de mercure, où arrivaient les deux extrémités des fils de la machine, qui étaient placés dans un plan vertical passant par l'axe de l'appareil.

Le *calorimètre* est disposé suivant le prolongement de l'axe horizontal du moteur; il est établi de façon à satisfaire aux exigences de la calorimétrie de précision. Il se compose de quatre cylindres concentriques en cuivre : les deux extérieurs en laiton et les deux intérieurs en cuivre rouge.

(¹) Ce moteur a été obligeamment prêté par M. H. Fontaine.

De plus, le cylindre extérieur est recouvert d'une enveloppe

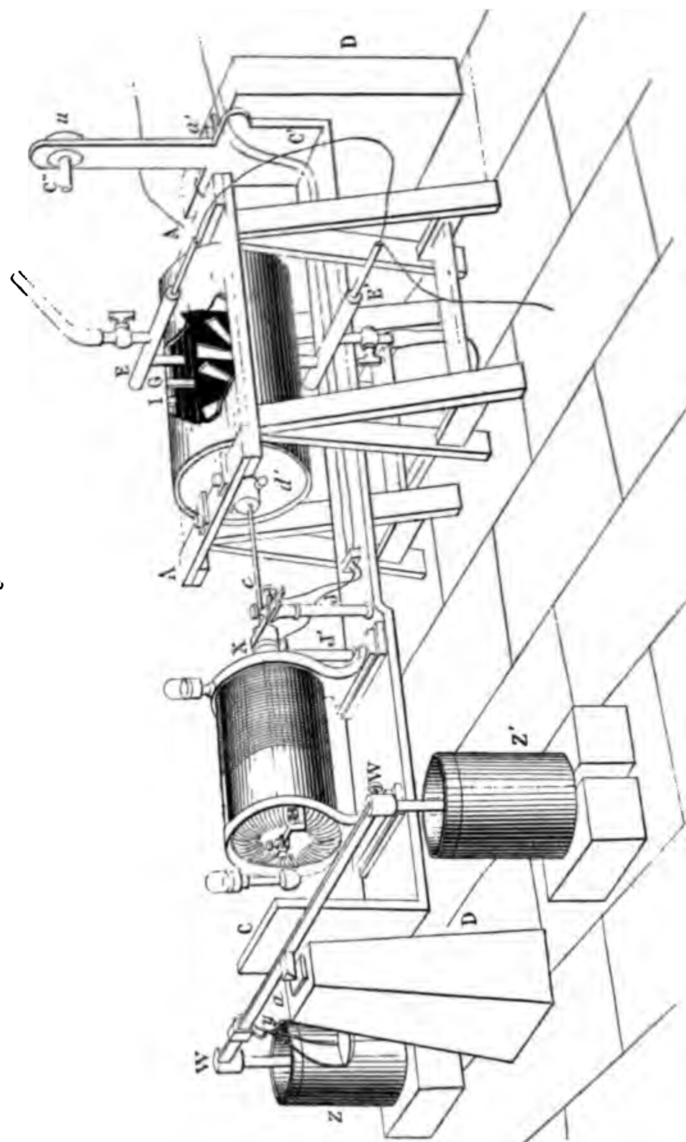
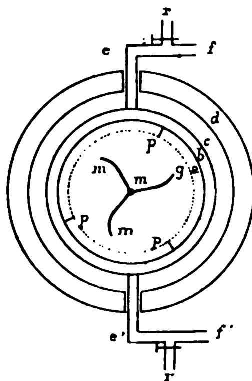


Fig. 1.

en feutre d'un centimètre d'épaisseur, comme cela a lieu dans le calorimètre Berthelot.

Le cylindre intérieur *a* (*fig.* 2), qui contient 2850^{gr} d'eau, porte trois palettes longitudinales *p*, *p*, *p*, distantes d'un tiers de circonférence, ayant une largeur de 15^{mm}, et d'autres palettes circulaires *g*

Fig. 2.



Section perpendiculaire à l'axe du calorimètre.

de même largeur; les palettes longitudinales s'opposent aux mouvements circulaires du liquide calorimétrique et les palettes circulaires aux mouvements longitudinaux.

L'eau est versée dans ce cylindre *a* par un tube en laiton G (*fig.* 1), vissé dans un écrou en ébonite solidaire du cylindre *a*.

Un courant d'eau arrive par le tube *e'* (*fig.* 1 et 2), coudé à angle droit et muni d'un robinet *r'*, dans l'espace annulaire limité par les cylindres *a* et *b*, qui pouvaient contenir 1200^{gr} d'eau; il sort par un tube semblable *e* à la partie supérieure qui, à son tour, est munie du robinet *r*. Ces deux tubes, portés par des écrous en ébonite, fixés sur le cylindre *b*, sont disposés aux extrémités d'un même diamètre.

L'espace annulaire, compris entre les cylindres *b* et *c*, est plein d'air qui peut communiquer avec l'atmosphère extérieure par les discontinuités des deux cylindres extérieurs. Enfin l'enceinte *cd* est remplie de l'eau (près de 10^{lit}) que l'on versait par l'orifice I.

Les cylindres *a*, *b*, *c* sont isolés thermiquement les uns des autres, par des pièces de jonction en ébonite.

Le *dynamomètre* se compose d'un levier en chêne ayant 125^{cm}

de longueur, deux fois coudé à angle droit en C et C′ et reposant par deux couteaux en acier *a*, *a*′ sur deux blocs en pierre D, D, posés eux-mêmes sur une plaque en marbre scellée dans le sol.

Le couteau *a* est solidaire du fléau WW, portant en *y* un plateau de balance et à ses extrémités deux cylindres en bois Z, Z, immergés dans des vases contenant une dissolution de glycérine, dans le but d'amortir les oscillations de l'appareil. Le fléau WW est formé d'une règle en laiton divisée en millimètres dont le zéro coïncide avec l'arête du couteau *a*. Le plateau *y* peut être déplacé sur le fléau et fixé en tel point que l'on désire par une vis de serrage. Son chariot est muni d'un trait à partir duquel on compte la distance au couteau.

Le bras vertical C′C″ porte une masse de plomb *u* que l'on peut élever ou abaisser verticalement et qu'une vis de serrage maintient en place, lorsque le maximum de sensibilité est obtenu.

Le moteur est vissé sur le plan horizontal C′C, de manière que son axe soit parallèle à ce banc et dirigé suivant l'axe commun des deux couteaux *a*, *a*′.

L'axe du moteur entraîne dans son mouvement de rotation un *interrupteur* X, composé de petits cylindres, l'un en ébonite et l'autre en cuivre. Une feuille mince de cuivre recouvre la moitié de la surface du cylindre en ébonite, continuant par là la surface du cylindre en cuivre. Le cylindre et la feuille de cuivre communiquent aux bornes J, J′ par deux tiges de cuivre munies de balais.

L'axe de la machine se continue par un lien flexible *c*, reliant le moteur avec l'axe du calorimètre. Ce lien *c* est formé d'un fil de laiton d'un diamètre de 3^{mm}, autour duquel sont enroulés en boudin six fils d'un plus faible diamètre. Il a une longueur de 17^{cm} et a pour but de laisser à l'axe du moteur un jeu suffisant.

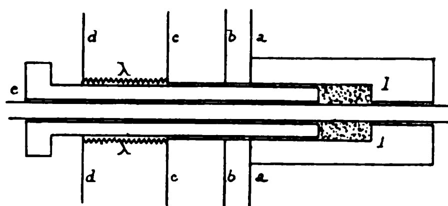
L'axe horizontal du calorimètre se compose d'une tige de cuivre de 8^{mm} de diamètre, isolée de la partie antérieure par une pièce en ébonite *d*′; il pénètre dans le calorimètre à travers une *boîte à étoupe* qui est représentée (*fig.* 3).

Elle se compose d'un cylindre en ébonite *e*, vissé dans l'écrou λ, qui sert pour presser l'étoupe ε contre le tourillon *t* en forme de boîte, fixé par son pourtour sur la paroi du cylindre *a*.

On remarquera que la boîte à étoupes et le point d'appui de

l'autre extrémité de l'axe du calorimètre, c'est-à-dire les points où il y a frottement et, par suite, dégagement de chaleur, sont situés *à l'intérieur même du calorimètre* et, par conséquent, la chaleur ainsi dégagée, qui, dans les appareils déjà employés dans ces sortes de mesures, échappait à la mesure directe et nécessitait une mesure supplémentaire de correction, est ici communiquée à l'eau du calorimètre et par conséquent recueillie.

Fig. 3.



Onze systèmes de trois palettes en hélice sont distribués à égale distance le long de l'axe du calorimètre; elles vont se terminer très près de la paroi du cylindre *a* et, de plus, deux systèmes consécutifs d'hélices sont orientés de telle façon que, si l'un des systèmes rejette l'eau dans un sens, l'autre la rejettera dans le sens contraire.

Sur les faces du cylindre extérieur du calorimètre sont soudées, par leurs bras verticaux, deux pièces rectangulaires en laiton, permettant de faire reposer le calorimètre sur deux planches épaisses, supportées elles-mêmes par deux systèmes de bancs B, B, bien scellés sur la plaque horizontale de marbre.

Il est facile maintenant de comprendre la manipulation de l'appareil.

Il faut mesurer deux grandeurs, à savoir : le travail dépensé et la chaleur recueillie correspondante.

La mesure du travail est faite d'après une méthode dont le principe a été indiqué par M. Deprez (¹).

Imaginons qu'un moteur électrique soit actionné par un courant,

(¹) *Association française pour l'avancement des Sciences*, 2ᵉ session, p. 235; 1882.

l'induit tourne alors dans un certain sens, par exemple, dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre; on peut diminuer le mouvement et même l'arrêter complètement en saisissant, par exemple, son axe entre les mâchoires d'un frein de Prony. Si le moteur est suspendu de manière à permettre à l'inducteur de se déplacer, la réaction qu'exerce sur lui l'induit tendra à le faire tourner dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre et l'on pourra le ramener à sa position première en chargeant de poids le plateau d'un bras de levier qui lui est convenablement adapté perpendiculairement au plan de symétrie vertical de la machine.

Si P' est le poids nécessaire pour le ramener à la position d'équilibre et l la longueur du bras de levier, le moment de la force qui fait équilibre à la réaction de l'induit est égal au produit $P'l$. En desserrant le frein, l'induit reprendra un mouvement de rotation avec une vitesse d'autant plus grande que le frein résistera moins; dès lors, l'inducteur, dont on avait déchargé les bras du levier, s'inclinera encore, mais d'un angle moindre que dans la première expérience.

Si P est le poids qu'il faut placer dans le plateau pour ramener l'inducteur à sa position première d'équilibre, le travail dépensé sur le frein est égal pour n tours de l'induit à

$$T = n 2\pi l P.$$

Dans l'appareil que j'ai employé, c'est la résistance opposée par l'eau du calorimètre au mouvement des hélices qui jouait le rôle de frein. Sous cette action le balancier CC', qui porte le moteur électrique, s'incline autour de l'axe des couteaux a, a'. En mettant un poids P dans le plateau y, on ramène le balancier dans sa première position d'équilibre.

Pour observer cette position d'équilibre, un miroir vertical est fixé au balancier et orienté de façon à réfléchir, suivant l'axe d'une lunette placée à $1^m,30$ environ, l'image d'une règle verticale divisée, et distante du miroir d'environ $0^m,80$.

Avant de mettre le moteur en marche, on observe quelle est la division de la règle qui coïncide avec le fil horizontal du micromètre de la lunette. Le moteur étant mis en marche, on dépose des poids dans le plateau y jusqu'à ce que la même division de la règle revienne coïncider avec le fil du réticule.

De cette façon le poids P se trouve déterminé, sa valeur varie dans chaque expérience.

Pour pouvoir calculer le travail T, correspondant à une certaine durée pendant laquelle l'induit fait n tours, par la formule

$$T = n 2\pi l P,$$

il faut encore connaître l et n.

La longueur du bras de levier l est la distance comprise entre l'arête du couteau a jusqu'au centre de gravité du plateau, qui était marqué par un trait sur son chariot; alors on lit avec quelle division de la règle vv le trait coïncide et l'on trouve ainsi la valeur de l.

Reste à trouver le nombre de tours n de l'induit. A cet effet, les extrémités du fil de l'électro-aimant de l'enregistreur de Marey étaient reliées aux bornes J, J des balais de l'interrupteur X. Cet électro-aimant était excité chaque fois que la partie conductrice du cylindre d'ébonite venait toucher au balai relatif à la borne J'; au contraire, le courant cessait dans l'électro-aimant dès que l'ébonite venait au contact du balai; par suite, l'armature munie d'un stylet en contact avec la surface enfumée d'une feuille de papier enroulée sur le cylindre enregistreur traçait une encoche pour chaque tour de l'induit.

Il suffisait donc de compter le nombre des encoches inscrites pendant la durée de l'expérience pour obtenir le nombre n correspondant.

On possède alors toutes les données numériques nécessaires à l'évaluation du travail T.

Nous avons dit que le courant du moteur électrique provenait d'une série de quarante accumulateurs Pollak. Si, par hasard, l'intensité du courant diminuait, pour la maintenir constante, un rhéostat à mercure est intercalé dans le circuit.

Il n'était pas nécessaire, pour s'assurer de la constance du courant, d'employer un galvanomètre. En effet, l'appareil indiquait lui-même si le courant était constant, car, s'il venait à diminuer, la vitesse de rotation de l'induit diminuerait aussi et, par suite, le couple résistant, d'où devrait résulter un changement d'inclinaison du balancier; si donc on agit sur le rhéostat de façon à maintenir en coïncidence avec le fil du réticule de la lunette la même division

de la règle, on est assuré que le courant excitateur du moteur conserve une intensité constante. Ce procédé fort simple est en même temps précis et sensible.

Mesure de la chaleur. — La quantité de chaleur dégagée dans le calorimètre, par suite du frottement, est mesurée par une méthode indiquée en principe par Hirn ([1]). Dans une des méthodes qu'il a employées pour la détermination de l'équivalent mécanique de la calorie, la chaleur est produite par le frottement de l'eau comprise dans l'espace limité par deux cylindres de même axe sur la surface interne du cylindre extérieur, l'eau étant mise en mouvement par le cylindre intérieur. Cette eau se renouvelait à chaque instant, à l'aide d'un filet, qui était réglé de manière que l'eau, à sa sortie, conserve toujours la même température. Dans la balance du frottement, la chaleur produite était enlevée de la même manière par un filet d'eau froide.

M. d'Arsonval ([2]) décrit, en 1877, à la Société de Biologie, une méthode pareille, et qu'il a employée depuis à l'étude de la variation de la chaleur dégagée par les êtres vivants avec le temps.

M. d'Arsonval appelle cette méthode *méthode calorimétrique à température constante*. Un courant d'eau froide circulait autour du calorimètre et lui enlevait à chaque instant la chaleur dégagée.

M. Hesehus ([3]) a appliqué à la méthode des mélanges, pour la mesure des chaleurs spécifiques des corps, la méthode à température constante, et, de cette manière, la formule calorimétrique se trouve beaucoup simplifiée.

Plus récemment, M. Mathias ([4]) a renversé, en quelque sorte, la méthode dans le but de mesurer la chaleur latente de vaporisation des gaz liquéfiés : il compense, à chaque instant, la chaleur absorbée par la vaporisation au moyen de la chaleur dégagée par la dilution de l'acide sulfurique concentré dans l'eau d'un calori-

---

([1]) HIRN, *Théorie mécanique de la chaleur,* 3e édition, p. 90 et 93.

([2]) D'ARSONVAL, *Comptes rendus de la Société biologique de Paris,* 1877.

([3]) HESEHUS, *Journal de Physique,* 2e série, t. VII, p. 489.

([4]) MATHIAS, *Ibid.*, t. IX, p. 459.

mètre renfermant le récipient qui contient le gaz liquéfié, et de manière à maintenir constante la température de l'eau du calorimètre.

Dans les expériences que j'ai faites, j'ai employé cette méthode à température constante, qui est une méthode de zéro, de la manière suivante : Un courant d'eau entrant par le robinet r' et sortant par r, après avoir circulé dans l'espace annulaire compris entre les enceintes a et b pendant un temps égal à trente secondes environ, était réglé de manière que la température du calorimètre restât parfaitement constante et qu'elle ne dépassât pas celle du milieu ambiant de plus de 2°; dans de telles conditions les corrections de refroidissement étaient négligeables. La quantité d'eau écoulée était reçue dans un vase et pesée; d'autre part, la différence de la température de l'eau, à son entrée et à sa sortie, était mesurée au moyen d'un couple thermo-électrique dont les deux soudures étaient respectivement plongées dans les tubes f, f'.

Le courant d'eau est puisé dans un vase, d'une capacité d'environ 200^{lit} d'eau, et situé à $1^{\text{m}},20$ de hauteur au-dessus du sol. Ce vase était situé dans le même endroit que l'appareil, par conséquent l'eau était maintenue à la température ambiante.

Un agitateur, composé d'un axe sur lequel sont fixées deux hélices, servait à remuer constamment l'eau du grand vase pendant l'expérience. Cet agitateur faisait un tour à chaque deux ou trois secondes, et il était mis en mouvement à l'aide d'un petit moteur Trouvé de 15 kilogrammètres de force, qui était alimenté par le courant de quelques accumulateurs.

Pour m'assurer que l'eau ne s'échauffait pas par cette agitation pendant l'expérience, je me suis servi toujours du couple thermo-électrique en mettant une des soudures dans le grand vase, tandis que l'autre soudure était maintenue à température constante dans un vase avec de la glace fondante; le galvanomètre ne donnait aucune déviation appréciable pendant une durée supérieure même à celle d'une expérience.

Le *couple thermo-électrique* dont j'ai fait usage dans ces expériences était constitué par deux fils : l'un, de platine, avec un diamètre de $0^{\text{mm}},4$, et l'autre, en fer, de $0^{\text{mm}},6$ de diamètre. Ces deux fils étaient soudés par leurs extrémités sur le fond d'un petit vase cylindrique en cuivre, à parois très minces, de 8^{mm} de hau-

teur et 6^{mm} de diamètre. Deux tubes en verre concentrique donnaient passage aux deux fils pour qu'ils ne touchassent pas ailleurs qu'aux soudures; le tube en verre de plus gros diamètre, rodé à l'émeri, s'engageait dans le petit vase en cuivre et le fermait hermétiquement. Les deux soudures du couple étaient disposées de la même manière. Le fil de fer était coupé en deux, permettant de cette manière d'intercaler le couple dans un circuit quelconque. Sa résistance totale ne dépassait pas deux ohms. Une étude préalable, faite avec soin, m'avait permis d'établir une relation entre la force thermo-électrique de ce couple et la différence de température des deux soudures : je me suis servi pour cela d'un thermomètre en verre dur, de Tonnelot, que j'ai étudié sous la direction de M. Guillaume, au Bureau international des Poids et Mesures.

Marche d'une expérience. — Le calorimètre a étant rempli d'eau, le moteur était mis en marche et le balancier amené dans sa position d'équilibre en mettant d'abord des poids convenables sur le plateau y, puis en agissant convenablement sur le rhéostat; l'eau du calorimètre s'échauffait alors, et le courant d'eau froide était établi par $r'c'ber$, les soudures du couple thermo-électrique étant à leur place respectivement f et f' et intercalées dans le même appareil qui nous a servi à leur graduation.

Dès que le débit est réglé de façon que le galvanomètre reste au zéro, on est assuré que *le régime permanent est atteint;* alors on commence à recueillir l'eau qui s'écoule et on laisse l'expérience se continuer pendant une durée qui varie entre quatre et onze minutes, et qui dépend de la fixité du régime permanent, dont on peut juger d'une part par la constance du galvanomètre, et d'autre part par la division de la règle graduée qui doit rester en coïncidence avec le fil du réticule de la lunette.

Au moment même où l'on commence à recueillir l'eau, on ferme le circuit du compteur de tours, de manière que ceux-ci s'enregistrent sur le papier enfumé du cylindre.

On arrête le compteur de tours au moment même où l'on met fin à l'expérience, c'est-à-dire où l'on cesse de recueillir l'eau réfrigérante.

On mesure la force électromotrice e du couple thermo-élec-

trique et l'on en déduit la différence de température θ du filet d'eau à l'entrée et à la sortie du calorimètre.

D'autre part, on pèse l'eau recueillie p, et par la formule

$$Q = p\theta c$$

on déduit la quantité de chaleur dégagée, c étant la chaleur spécifique de l'eau.

On lit les poids marqués déposés sur le plateau y; on connaît, d'autre part, la longueur l du bras de levier, et, si nous désignons par n le nombre total des tours comptés sur le cylindre enregistreur, nous avons le travail transformé par la formule

$$T = n.2\pi l P.$$

Connaissant la quantité de chaleur dégagée et le travail dépensé, l'équivalent mécanique de la calorie est donné par le quotient

$$J = \frac{T}{Q} = \frac{2\pi l n P}{p\theta c}.$$

Le filet d'eau réfrigérant était de l'eau distillée, et j'ai admis que, entre 10° et 13°, sa chaleur spécifique est égale à l'unité.

Dans le Tableau suivant, la colonne intitulée :

Durée donne la durée d'une expérience en minutes et en secondes;

n, le nombre total des tours de l'axe du calorimètre;

P, le poids en kilogrammes qu'il faut mettre dans le plateau de la balance, pour ramener le bâti mobile dans la position d'équilibre.

La longueur du bras de levier l qui n'est pas inscrite dans ce Tableau a été dans toutes les expériences la même : $l = 0^{m},280$.

θ, l'élévation de température du filet d'eau après avoir circulé autour du calorimètre. Il est à remarquer qu'une goutte d'eau qui entrait par le robinet r' mettait en moyenne 40 secondes pour sortir par r.

Eau, la quantité d'eau écoulée.

Q, le nombre des kilogrammes-calories de chaque expérience.

J, la dernière colonne, donne la valeur de l'équivalent mécanique de la calorie en kilogrammètres, à Paris, rapportée au thermomètre à air, et considérant que la chaleur spécifique de l'eau est l'unité entre 10° et 13° centigrade.

TABLEAU VI.

Numéro de l'expérience.	Travail				Chaleur			
	Durée.	*n*.	P.	T.	θ.	Eau.	Q.	J.
	m s		kg	kgm	o	kg	kg-cal	
1....	8.54	10797	0,51482	9779,088	1,741	13,1691	22,9264	426,51
2....	11.33	14578	0,53488	13718,130	1,949	16,4947	32,1483	426,71
3....	6.40	8413	0,53511	7920,157	1,511	12,2870	18,5657	426,60
4....	4.11	5439	0,55137	5275,964	1,478	8,3649	12,3634	426,74
5....	4.37	5427	0,50067	4780,261	1,323	8,4594	11,1918	427,12
6....	7.43	10154	0,56058	10014,164	1,783	13,1607	23,4655	426,76
7....	9. 8	11367	0,53020	10602,914	1,377	18,0514	24,8568	426,56
8....	5.56	7447	0,53441	7001,574	1,776	9,2369	16,4048	426,79
9....	5.28	6741	0,52301	6202,394	1,681	8,6517	14,5436	426,52
10....	7.12	10247	0,61221	11036,464	2,018	12,8172	25,8651	426,69
11....	6.37	9274	0,59706	9741,410	1,785	12,7807	22,8136	427,00
12....	5.30	7368	0,59608	7726,821	1,749	10,3462	18,0955	427,02
13....	7.54	11012	0,59390	11505,822	1,825	14,7747	26,9640	426,71
14....	5. 6	7170	0,59891	7554,434	1,948	9,0948	17,7167	426,40
15....	4.24	6326	0,60541	6637,496	1,895	8,3306	15,7864	426,80
16....	4.21	5910	0,57020	5928,633	1,586	8,7686	13,9070	426,31
17....	4.15	5793	0,57521	5862,223	1,464	9,3951	13,7544	426,21
18....	4.17	5794	0,57620	5873,428	1,777	7,7529	13,7770	426,33
19....	5.24	7479	0,60021	7897,311	1,548	11,9448	18,4911	427,09
20....	4.21	6184	0,60558	6588,432	1,783	8,6626	15,4455	426,56
21....	4. 8	5748	0,59188	5985,392	1,730	8,1047	14,0211	426,88
22....	4. 2	5591	0,60021	5903,715	1,543	8,9672	13,8360	426,71
23....	5.40	7832	0,58874	8113,817	1,764	10,7895	19,0326	426,31
24....	4.55	6712	0,58152	6866,827	1,581	10,1904	16,1109	426,22
25....	4.45	6642	0,59543	6957,760	1,812	8,9961	16,3011	426,82
26....	5.38	7683	0,58142	7858,934	1,786	10,3075	18,4092	426,90
27....	5. 5	7188	0,60251	7619,247	1,732	10,2926	17,8265	426,41
28....	3.38	5152	0,60408	5475,341	1,583	8,1016	12,8248	426,93
29....	3.44	4260	0,48601	3642,375	1,257	6,7905	8,5357	426,72
30....	3.90	4180	0,55322	4068,314	1,792	5,3218	9,5362	426,63
31....	5.16	7111	0,57521	7196,118	1,778	9,4825	16,8601	426,81

La moyenne générale de toutes les expériences du Tableau précédent est

$$J = 426,7 \text{ en kilogrammètres,}$$

et de

$$4,1857.10^7 \text{ dans le système C.G.S.},$$

admettant pour Paris

$$g = 980,96.$$

Le Comité international des Poids et Mesures a adopté, comme échelle thermométrique *normale,* l'échelle centigrade du *thermomètre à hydrogène;* alors, en faisant les corrections nécessaires pour réduire la valeur de J à cette échelle, on trouve

$$J = 426,84.$$

Les écarts donnés par divers expérimentateurs, entre l'échelle absolue et l'échelle normale, sont tellement petits qu'on ne peut pas même en fixer le signe entre 0° et 100°; par conséquent, cette dernière valeur de J peut être considérée comme réduite à l'échelle absolue.

Il est à remarquer que, si l'on réduit les observations de Joule à ce qu'elles auraient été *à Paris,* on trouve pour moyenne de ses nombres la valeur suivante

$$J = 426,5.$$

Il y a là un accord que j'ai cru intéressant de signaler

Conclusions. — Dans le travail que je viens d'exposer, j'ai donc pu perfectionner la méthode de Joule en mesurant *directement* le travail dépensé et la chaleur produite, les deux mesures étant faites par une méthode de zéro.

De plus, en prenant un moteur d'une puissance relativement considérable (un cheval-vapeur), j'ai augmenté la quantité de chaleur produite pendant l'unité de temps, ce qui m'a permis de réduire à un temps plus court la durée de l'expérience.

J'ai obtenu ainsi, pour l'équivalent mécanique de la calorie, le nombre

$$J = 426,70,$$

dans lequel je crois le chiffre des unités *exact,* le chiffre des dixièmes 0,7 étant probable.

Ce travail a été effectué au laboratoire des Recherches physiques à la Sorbonne.

Appendice. — Tableau récapitulatif des principales déterminations de l'équivalent mécanique de la calorie.

Le Tableau suivant montre l'ordre chronologique des déterminations, et les méthodes très variées qui ont été employées.

TABLEAU I.

I. — *Méthodes directes.*

Date.	Observateur.	Méthode particulière.	Résultat.
1843	Joule (1).	Frottement de l'eau dans les tubes.	424,6
»	Joule (1).	Échauffement produit par les courants magnéto-électriques......	460
»	Joule (1).	Diminution de la chaleur dégagée dans une pile quand le courant produit du travail............	442,2
1845	Joule (2).	Compression de l'air............	443,8
»	Joule (2).	Expansion de l'air...............	437,8
»	Joule (2).	Frottement de l'eau dans un calorimètre......................	488,3
1847	Joule (3).	Frottement de l'eau dans un calorimètre......................	428,9
1850	Joule (3).	Frottement de l'eau dans un calorimètre......................	423,9
»	Joule (3).	Frottement du mercure dans un calorimètre..................	424,7
»	Joule (4).	Frottement des plaques de fer dans un calorimètre...............	425,2
1857	Favre (5).	Diminution de la chaleur dégagée dans une pile quand le courant produit du travail............	426-464
»	Hirn (6).	Frottement des métaux..........	371,6
1858	Hirn (6).	Frottement des métaux..........	400-450
»	Favre (7).	Frottement des métaux dans un calorimètre à mercure.........	413,2
»	Hirn (6).	Forage des métaux.............	425

(1) JOULE, *Phil. Mag.*, 3e série, t. XXIII.
(2) JOULE, *Phil. Mag.*, 3e série, t. XXVI.
(3) » » t. XXVII.
(4) » *Phil. Transactions*, p. 61; 1850.
(5) FAVRE, *Comptes rendus*, t. XLV, p. 56.
(6) HIRN, *Théorie mécanique de la chaleur*, 3e édition.
(7) FAVRE, *Comptes rendus*, t. XLVII, p. 337.

TABLEAU I (*suite*).

Date.	Observateur.	Méthode particulière.	Résultat.
1860-61	Hirn ([1]).	Eau dans la balance de frottement.	432
»	Hirn ([1]).	Écoulement des liquides sous une forte pression.................	433
»	Hirn ([1]).	Écrouissage du plomb..........	425
»	Hirn ([1]).	Frottement de l'eau entre deux cylindres.....................	432
»	Hirn ([1]).	Expansion de l'air...............	440
»	Hirn ([1]).	Machines à vapeur..............	420-432
1865	Edlund ([2]).	Expansion et contraction des métaux.........................	428,3-443,6
1870	Violle ([3]).	Échauffement d'un disque entre les pôles d'un aimant.............	435
1875	Puluj ([4]).	Frottement des métaux..........	425,2-426,6
1878	Joule ([5]).	Frottement de l'eau dans un calorimètre.......................	423,9
1879	Rowland ([6]).	Frottement de l'eau dans un calorimètre.......................	429,7-425,8
1891	D'Arsonval ([7]).	Échauffement d'un cylindre dans un champ magnétique.........	421-427

II. — *Méthodes indirectes.*

1842	Mayer ([8]).	Par la relation $J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C - c}$ des ga	365
1857	Quintus Icilius ([9]). Weber ([10]).	Chaleur développée dans un fil dont la résistance absolue est connue.......................	399,7

(1) HIRN, *Théorie mécanique de la chaleur*, 3e édition.
(2) EDLUND, *Pogg. Ann.*, t. CXIV.
(3) VIOLLE, *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXI.
(4) PULUJ, *Sitzungsberichte der kaiserlichen Academie der Wissenschaften in Wien*, mars, p. 667, juin, p. 53; 1875.
(5) JOULE, *Philosophical Transactions*, p. 365; 1878.
(6) ROWLAND, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, p. 75; 1879-80.
(7) D'ARSONVAL, *Lumière électrique*, mars 1891.
(8) MAYER, *Liebig's Annalen*, t. XLII.
(9) QUINTUS ICILIUS, *Pogg. Ann.*, t. CI, p. 69.
(10) WEBER, *Phil. Mag.*, 4e série, t. XXX.

TABLEAU I (*suite*).

Date.	Observateur.	Méthode particulière.	Résultat.
»	Weber.	Chaleur due aux courants électriques; équivalent électro-chimique de l'eau = 0,009376.....	432,1
»	Fabre. Silbermann.	Développement de la chaleur, par l'action du zinc sur le sulfate de cuivre........................	432,1
»	Bosscha (1).	Mesure de la force électromotrice de la pile Daniell d'après la mesure absolue = 10257.10^7....	432,1
1859	Joule.	Chaleur développée dans la pile Daniell........................	419,5
»	Bosscha.	Force électromotrice de l'élément Daniell........................	419,5
1859	Lenz-Weber.	Chaleur développée dans un fil dont la résistance absolue est connue........................	396,4-478,2
1867	Joule (2).	Chaleur développée dans un fil dont la résistance absolue est connue........................	429,5
1878	Weber.	Chaleur développée dans un fil dont la résistance absolue est connue........................	428,15
1888	Perot (3).	Par la relation $L = \frac{T}{E}(u' - u)\frac{dp}{dt}$.	424,63
1889	Dieterici (4).	Chaleur due aux courants électriques........................	432,5

(1) BOSSCHA, *Pogg. Ann.*, t. CXVIII, p. 162.
(2) JOULE, *Report of the Committee of electrical standards of the B. A.*, p. 175; 1873.
(3) PEROT, *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 129.
(4) DIETERICI, *Annalen der Physik und Chemie*, t. XXXIII, p. 417.

VIBRATIONS PRIVILÉGIÉES DANS UN MILIEU ACTIF ET BIRÉFRINGENT;

PAR M. P. LEFEBVRE.

Dans un Mémoire publié au *Journal de Physique* en 1885, M. Gouy a cherché à établir la théorie des phénomènes produits par l'action simultanée du pouvoir rotatoire et de la double réfraction, en s'appuyant sur le principe de l'indépendance des effets simultanés. Il en a déduit les éléments des vibrations elliptiques qui devaient, d'après une hypothèse d'Airy, servir de transition entre les vibrations rectilignes de la double réfraction et les vibrations circulaires de la polarisation rotatoire.

L'existence de ces vibrations, appelées souvent *vibrations privilégiées,* nous semble pouvoir être démontrée en partant des mêmes principes, d'une manière plus simple que ne l'a fait M. Gouy. En outre, celui-ci admet, sans démonstration, que les vibrations ainsi obtenues ont une vitesse de propagation déterminée, ce qui n'est pas évident *a priori;* car elles ne sont qu'un cas particulier de vibrations pour lesquelles cette propriété n'existe pas; la détermination de la vitesse de propagation constitue précisément un des caractères essentiels des vibrations privilégiées.

Parmi les vibrations lumineuses transmises par un milieu biréfringent, il en est qui possèdent le privilège d'être transmises sans modification et avec une vitesse de propagation déterminée. Ainsi, dans les cristaux uniaxes, ce sont les vibrations parallèles ou perpendiculaires à la section principale. Toute autre vibration est la résultante de deux de ces vibrations privilégiées qui, ayant des vitesses de propagation différentes, se sépareront à la transmission.

Nous nous proposons de rechercher s'il existe encore des vibrations privilégiées, c'est-à-dire transmissibles sans modification, dans le cas où le pouvoir actif se superpose à la biréfringence. Nous admettrons d'ailleurs que, dans le milieu considéré, la biréfringence et le pouvoir actif sont assez peu marqués pour que l'on puisse leur appliquer le principe de l'indépendance des effets simultanés.

Nous prendrons pour axes de coordonnées une parallèle et une

perpendiculaire à la section principale, ou bien les directions équivalentes si l'on a affaire à un biaxe.

Soient φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$ les directions, $2a$ et $2b$ les longueurs des axes d'une vibration elliptique. Cherchons les conditions pour que cette vibration, représentée par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} y\cos\varphi - x\sin\varphi = b\cos 2\pi\dfrac{t}{T}, \\ x\cos\varphi + y\sin\varphi = a\sin 2\pi\dfrac{t}{T}, \end{cases}$$

soit une vibration privilégiée, c'est-à-dire se transporte parallèlement à elle-même, sans déformation ni rotation, avec une vitesse de propagation déterminée.

La vibration a pour composantes, selon les axes de coordonnées,

$$(2)\quad \begin{cases} x = -b\sin\varphi\cos 2\pi\dfrac{t}{T} + a\cos\varphi\sin 2\pi\dfrac{t}{T}, \\ y = b\cos\varphi\cos 2\pi\dfrac{t}{T} + a\sin\varphi\sin 2\pi\dfrac{t}{T}. \end{cases}$$

Après avoir traversé l'épaisseur l du milieu :

1° En raison du pouvoir actif seul, la vibration elliptique aurait tourné d'un angle $l\omega$, ω étant le pouvoir actif pour l'épaisseur 1. Il suffit, pour exprimer ce résultat, de faire tourner les axes de $l\omega$, c'est-à-dire de remplacer φ par $\varphi + l\omega$;

2° En raison de la biréfringence seule, la phase varie de lu pour la composante x, de lv pour la composante y; u et v étant les variations de phase pour l'épaisseur 1, égales aux inverses des longueurs d'onde des vibrations x et y.

D'après le principe de l'indépendance des effets simultanés, la vibration devient donc

$$(3)\quad \begin{cases} x = -b\sin(\varphi + l\omega)\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - lu\right) \\ \qquad + a\cos(\varphi + l\omega)\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - lu\right), \\ y = b\cos(\varphi + l\omega)\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - lv\right) \\ \qquad + a\sin(\varphi + l\omega)\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - lv\right). \end{cases}$$

La vibration (3) ne doit différer de la vibration (2) que par le retard dû à la propagation; la vitesse de propagation devant être déterminée, ce retard est proportionnel à l'épaisseur l; je l'appelle $l\varepsilon T$. ε sera la variation de phase de la vibration pour l'épaisseur 1.

La vibration (2) doit, si elle est privilégiée, être identique à la vibration (4) obtenue en remplaçant dans (3) t par $t + l\varepsilon T$.

$$(4)\quad \begin{cases} x = -b\sin(\varphi + l\omega)\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lu\right) \\ \qquad + a\cos(\varphi + l\omega)\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lu\right), \\ y = \quad b\cos(\varphi + l\omega)\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lv\right) \\ \qquad + a\sin(\varphi + l\omega)\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lv\right). \end{cases}$$

Les équations (2) et (4) doivent être identiques pour toutes valeurs de t et de l. Telle est la condition qui exprime que la vibration considérée est privilégiée.

Comme nous avons supposé que le pouvoir actif et la biréfringence sont petits, nous devrons considérer $l\omega$ et $l(u - v)$ comme des quantités petites.

En particulier, (2) et (4) doivent être identiques pour $t = 0$.

$$(5)\quad \begin{cases} -b\sin\varphi = -b\sin(\varphi + l\omega)\cos 2\pi l(\varepsilon - u) \\ \qquad\qquad + a\cos(\varphi + l\omega)\sin 2\pi l(\varepsilon - u), \\ \ \ b\cos\varphi = \quad b\cos(\varphi + l\omega)\cos 2\pi l(\varepsilon - v) \\ \qquad\qquad + a\sin(\varphi + l\omega)\sin 2\pi l(\varepsilon - v). \end{cases}$$

Les seconds membres doivent être indépendants de l, donc leurs dérivées par rapport à l sont nulles; elles sont nulles, en particulier, pour $l = 0$,

$$(6)\qquad -b\omega\cos\varphi + 2\pi a(\varepsilon - u)\cos\varphi = 0,$$

$$(7)\qquad -b\omega\sin\varphi + 2\pi a(\varepsilon - v)\sin\varphi = 0.$$

Je suis d'ailleurs bien dans les conditions de pouvoir actif et biréfringence faibles, puisque $l\omega$ et $l(u - v)$ sont nuls.

Les équations (6) et (7) se décomposent; on doit réaliser une des conditions

$$(8)\qquad b\omega = 2\pi a(\varepsilon - u),$$

$$(9)\qquad \cos\varphi = 0$$

et une des conditions

$$(10)\qquad b\omega = 2\pi a(\varepsilon - v),$$

$$(11)\qquad \sin\varphi = 0.$$

Les conditions (8) et (10) sont incompatibles si la biréfringence n'est pas nulle; les conditions (9) et (11) sont également incompatibles. Donc nous devons réaliser simultanément les conditions (8) et (11) ou les conditions (9) et (10).

Dans les deux cas, on arrive au même résultat; je me contenterai de faire les calculs dans l'un d'eux.

Soient réalisées les conditions

$$(11)\qquad \sin\varphi = 0,$$

$$(8)\qquad b\omega = 2\pi a(\varepsilon - u):$$

les équations (2) et (4) deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\ y = b \cos 2\pi \dfrac{t}{T}; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x = -b \sin l\omega \cos 2\pi \left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lu\right) \\ \qquad + a \cos l\omega \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lu\right), \\ y = b \cos l\omega \cos 2\pi \left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lv\right) \\ \qquad + a \sin l\omega \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} + l\varepsilon - lv\right). \end{cases}$$

Pour que la vibration soit privilégiée, ces équations doivent être identiques pour toutes valeurs de t et de l.

En particulier, il doit y avoir identité pour $t = \dfrac{T}{4}\cdot$ Donc

$$(12)\qquad a = b \sin l\omega \sin 2\pi l(\varepsilon - u) + a \cos l\omega \cos 2\pi l(\varepsilon - u),$$

$$(13)\qquad 0 = -b \cos l\omega \sin 2\pi l(\varepsilon - v) + a \sin l\omega \cos 2\pi l(\varepsilon - v).$$

(12) se vérifie aux quantités du second ordre près; en effet, d'après la condition (8), $\varepsilon - u$ est de même ordre que ω; donc $l\omega$ et $2\pi l(\varepsilon - u)$ sont des quantités très petites. Le produit de leurs sinus est donc négligeable; le produit de leurs cosinus multiplié par a ne diffère de a que de quantités du second ordre.

(13) peut s'écrire

$$\tag{13} \operatorname{tang} 2\pi l(\varepsilon - v) = \frac{a}{b} \operatorname{tang} l\omega.$$

$l\omega$ est très petit, donc aussi $2\pi l(\varepsilon - v)$; aux quantités du second ordre près, on a donc, en remplaçant les tangentes par les arcs,

$$\tag{14} a\omega = 2\pi b(\varepsilon - v).$$

Ces conditions remplies, l'identité entre les ellipses (2) et (4) est complète, car elles ont mêmes axes.

Les conditions à remplir par la vibration privilégiée sont donc les conditions (8), (11) et (14).

Posant $m = \frac{b}{a}$, elles s'écrivent

$$\tag{11} \sin\varphi = 0,$$

$$\tag{8} 2\pi(\varepsilon - u) = m\omega,$$

$$\tag{14} 2\pi(\varepsilon - v) = \frac{1}{m}\omega.$$

L'équation (11) donne la direction de ses axes; les équations (8) et (11) donnent le rapport m des axes et la variation de phase ε de la vibration pour une épaisseur égale à l'unité.

On tirera m de l'équation

$$\tag{15} m^2 - 2\pi \frac{(v - u)}{\omega} m - 1 = 0,$$

obtenue en éliminant ε entre (8) et (14).

Il y a deux racines réelles, de signes contraires et inverses l'une de l'autre.

A chacune correspondent une infinité d'ellipses homothétiques constituant des vibrations privilégiées; à la racine positive, des vibrations sinistrorsum; à la racine négative, des vibrations dextrorsum. Les ellipses des deux systèmes sont semblables et ont leurs axes rectangulaires, les racines étant inverses.

Soient m la racine positive, m' la négative.

Pour les vibrations sinistrorsum privilégiées, la variation de phase due à la propagation est

$$\tag{16} \varepsilon = u + m\frac{\omega}{2\pi}.$$

Pour les vibrations dextrorsum, (8) donnerait

$$(17) \qquad \varepsilon' = u + m' \frac{\omega}{2\pi}.$$

Les vibrations privilégiées prendront pour une épaisseur 1 une différence de phase

$$\varepsilon - \varepsilon' = (m - m') \frac{\omega}{2\pi}.$$

D'ailleurs, dans l'équation (15),

$$m - m' = +2\sqrt{1 + \frac{\pi^2(v-u)^2}{\omega^2}},$$

donc

$$(18) \qquad \varepsilon - \varepsilon' = \pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + (v-u)^2}.$$

On doit prendre le signe + ou le signe —, selon que ω est positif ou négatif; c'est-à-dire que la vibration qui prend l'avance est de même sens que la rotation due au pouvoir actif de la substance.

Si $v = u$ tend vers o, m tend vers $+1$, m' vers -1, $\varepsilon - \varepsilon'$ vers $\frac{\omega}{\pi}$. Donc, dans un milieu actif non biréfringent, les vibrations privilégiées sont circulaires et de sens contraires; la différence de phase pour une épaisseur 1 est $\frac{\omega}{\pi}$.

L'égalité (18) peut donc s'énoncer :

Le carré de la différence de phase des vibrations privilégiées est égal à la somme des carrés :

1° De la différence de phase $(v - u)$ due à la double réfraction seule sur les vibrations rectilignes;

2° De la différence de phase $\frac{\omega}{\pi}$ due au pouvoir rotatoire seul sur les vibrations circulaires.

Ce résultat a été indiqué par M. Gouy.

La méthode que nous avons suivie nous permet, en outre, d'évaluer les variations de phase ε et ε'

$$\varepsilon = u + m\frac{\omega}{2\pi} = u + \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{\pi(v-u)}{\omega} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2(v-u)^2}{\omega^2}}\right]$$
$$= \frac{u+v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + (v-u)^2},$$

et de même

$$\varepsilon' = \frac{u+v}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + (v-u)^2}.$$

Il en résulte que

$$\varepsilon + \varepsilon' = u + v.$$

La moyenne des variations de phase pour les vibrations privilégiées ne dépend pas de l'activité du milieu.

Nous pouvons également obtenir les vitesses de propagation des vibrations privilégiées; en effet,

$$\varepsilon = \frac{1}{VT},$$

V étant la vitesse de propagation pour les vibrations sinistrorsum

$$\frac{1}{V} = T\left[\frac{u+v}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + (v-u)^2}\right],$$

et pour les vibrations dextrorsum

$$\frac{1}{V'} = T\left[\frac{u+v}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + (v-u)^2}\right].$$

La moyenne des inverses des vitesses de propagation pour les vibrations privilégiées ne dépend pas de l'activité du milieu.

En résumé, nous avons établi l'existence dans un milieu actif et biréfringent de deux systèmes de vibrations privilégiées. Ces vibrations ayant des vitesses différentes se sépareront à la transmission; cette double réfraction elliptique est toujours peu marquée. L'existence des vibrations conjuguées hypothétiques d'Airy résulte donc de la superposition, admise comme un fait, des pouvoirs actif et biréfringent.

SUR UN ÉTALON THERMO-ÉLECTRIQUE DE FORCE ÉLECTROMOTRICE;

Par M. Henri BAGARD.

On a déjà pensé à utiliser les éléments thermo-électriques comme étalons de force électromotrice. Mais ceux qu'on a employés jusqu'ici étant formés de deux métaux, d'une part, les forces électromotrices ainsi obtenues étaient extrêmement faibles et, d'autre part, elles variaient avec les échantillons des métaux employés.

Je me suis proposé de rechercher si un élément thermo-électrique, constitué par deux liquides, possède, pour deux températures déterminées des surfaces de contact, une force électromotrice bien définie, et je me suis appliqué à former, en même temps, un élément impolarisable. En prenant un amalgame de zinc d'une faible teneur en zinc et une solution concentrée de sulfate de zinc, j'ai obtenu une force électromotrice considérable, l'élément étant impolarisable. Pour des raisons que j'indiquerai plus loin, je me suis arrêté à la proportion de 0,0005 de zinc pour 1 de mercure dans l'amalgame, et comme, toutes choses égales d'ailleurs, la force électromotrice est d'autant plus grande que le sulfate de zinc est plus concentré, j'ai adopté une solution de sulfate de zinc saturée à 0°. Je dissous le zinc dans le mercure sous une couche de sulfate de zinc qui empêche l'oxydation et que j'enlève rapidement au moyen de papier buvard au moment de me servir de l'amalgame. L'élément est construit de la façon suivante : dans trois tubes A, B, C, fermés à leur partie inférieure, se trouvent superposés l'amalgame et le sulfate; le tube A est porté à la température d'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique, température que je désignerai, dans la suite, par T; les tubes B et C sont maintenus dans la glace fondante. Le sulfate de A communique avec celui de B par un siphon rempli de ce liquide; de même, les amalgames A et C communiquent entre eux par un siphon rempli d'amalgame. Deux électrodes de platine isolées plongent dans les amalgames B et C entre lesquels il n'existe, par conséquent, comme force électromotrice, que la force électromotrice thermo-électrique. Le sulfate qui recouvre l'amalgame C est

uniquement destiné à protéger celui-ci contre l'altération qu'il subirait au contact de l'air; enfin, le sulfate de A est recouvert par une couche de paraffine qui supprime l'évaporation. Dans c couple, l'amalgame chaud est, à l'extérieur, le pôle positif.

Plusieurs éléments préparés isolément et comparés entre eux à différentes époques ont toujours donné une force électromotrice identique à $0^{vol},0001$ près, et sont restés impolarisables. On est donc en droit de considérer l'élément comme un étalon de force électromotrice. J'ai étudié la marche de la force électromotrice lorsque, l'une des surfaces de contact étant maintenue à 0°, l'autre est portée à une température t variant entre 0° et 100°. Pour cela, je déterminais le rapport de la force électromotrice d'un élément fonctionnant entre ces températures 0 et $t°$ à celle de l'étalon, en compensant successivement chacune d'elles par une force électromotrice prise sur le circuit d'un daniell renfermant une résistance de 10000^{ω}. Voici quelques-uns des nombres ainsi obtenus pour $T = 99°,3$.

t.	$f(t) = \frac{E_0^t}{E_0^T}$,
15°,7	0,148
33,6	0,320
40,7	0,392
48,6	0,470
54,3	0,528

En prenant $T = 99°,3$, la fonction $f(t)$ est rigoureusement représentée par la formule à deux termes

$$f(t) = 0,00930\,t + 0,00000774\,t^2. \tag{1}$$

Ainsi la courbe représentative est, comme dans le cas de la plupart des couples bimétalliques, une branche de parabole, et cette courbe tourne sa convexité vers l'axe des températures.

J'ai ensuite mesuré en valeur absolue la force électromotrice E_0^T du couple entre 0 et la température d'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique. Pour effectuer cette mesure, je compensais E_0^T par une force électromotrice égale prise aux extrémités d'une résistance ρ égale à l'ohm légal, par un courant dont je mesurais l'intensité par l'électrolyse de l'azotate d'argent. J'employais, comme instrument de zéro, un électromètre capillaire

sensible au $\frac{1}{10000}$ de volt; je m'assurais plusieurs fois, dans chaque expérience, que la résistance ρ était exactement d'un ohm en lui substituant rapidement et pendant un temps très court l'ohm légal maintenu à zéro, et je faisais varier la résistance totale du circuit de façon que l'électromètre restât au zéro pendant toute la durée de l'expérience. J'ai ainsi trouvé, comme moyenne de plusieurs mesures, et en m'appuyant sur la formule (1),

$$E_0^{100} = 0^v,1167,$$

l'erreur à craindre sur le résultat étant de $0^v,0001$. La valeur de E_0^{100} est donc environ cent fois plus grande pour le couple étudié que pour le couple fer-cuivre, qui donne une force électromotrice voisine de $0^v,0011$. De cette valeur, on déduit, par la formule (1), la valeur de la force électromotrice E_0^t pour les températures comprises entre 0 et 100°,

$$E_0^t = 0,001077\,t + 0,00000090\,t^2. \tag{2}$$

Il importait de savoir comment varie la force électromotrice du couple lorsque la teneur en zinc de l'amalgame varie. Pour cela, j'ai comparé des éléments renfermant des amalgames de différentes teneurs à l'étalon étudié par la méthode d'opposition déjà employée pour l'étude de la marche du couple en fonction de la température. Lorsque la proportion de zinc est inférieure à 0,00005, l'élément est polarisable. Pour des teneurs plus fortes, l'élément devient impolarisable, et la force électromotrice diminue d'une façon continue, ainsi que le montrent les nombres du Tableau suivant :

Masse de zinc pour 1 de mercure.	E_0^{100}.
	v
0,00025	0,1197
0,00035	0,1183
0,00045	0,1171
0,00050	0,1167
0,00055	0,1164
0,00075	0,1150

On voit que, dans le voisinage de la teneur 0,0005, la variation de E_0^{100} n'atteint pas $0^v,0001$ quand la proportion de zinc varie de 0,00001, ou de $\frac{1}{50}$ de sa valeur.

En résumé, l'élément que j'ai étudié a une force électromotrice absolument constante entre deux températures données; il pourra être fermé sans se polariser, et la valeur de sa force électromotrice entre les températures 0 et t^{o} sera donnée par la formule (2). La proportion de zinc 0,0005 que j'ai adoptée est assez éloignée des valeurs pour lesquelles l'élément devient polarisable, et la force électromotrice a une valeur suffisante pour être avantageuse dans la pratique. Enfin, il n'est pas nécessaire d'apporter une très grande précision dans la pesée du zinc à dissoudre dans un poids donné de mercure ([1]).

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-CHIMIQUE RUSSE.

Tome XXIII, n°s 1, 2, 3, 4 et 5; année 1891.

R. COLLEY. — Appareil pour l'observation des oscillations électriques lentes, p. 1-16, avec figures.

L'auteur décrit le modèle perfectionné, construit par M. Edelmann à Munich, de l'appareil qui a servi en 1885 pour les recherches sur les oscillations électriques. L'appareil n'est destiné qu'à l'observation des oscillations lentes (de quelques centaines par seconde). Un miroir léger, semblable à celui du galvanomètre de Thomson, est suspendu au milieu d'une bobine horizontale. Un microscope horizontal, à micromètre oculaire sur verre, permet d'observer dans ce miroir l'image d'un trou fortement éclairé, fait dans la périphérie d'un disque en cuivre, mis en rotation rapide autour d'un axe horizontal par un mécanisme d'horlogerie. L'élément de la trajectoire du trou lumineux, dont l'image est visible dans le champ visuel du microscope, peut être considéré comme rectiligne et vertical, tandis que la déflexion du miroir par le courant observé, produit à un moment déterminé par le mouvement du disque, communique à cette image un mouvement horizontal alternatif. La sinusoïde résultante est mesurée par le micromètre oculaire.

([1]) Ce travail a été exécuté au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Nancy.

R. COLLEY. — Contribution à la théorie de l'appareil de Rhumkorff, p. 7-30.

L'auteur expose ici, *in extenso*, ses recherches déjà publiées en résumé dans le *Journ. de la Soc. phys.-chim. russe*, t. XXII, p. 98-102 (1).

S. MAKAROFF. — Sur la détermination des poids spécifiques de l'eau de mer, p. 30-86.

Le contre-amiral Makaroff a recueilli un grand nombre d'observations des poids spécifiques de l'eau de mer, pendant son voyage autour du monde sur la corvette *Vitiaz* de 1886 à 1889. Les poids spécifiques ont été déterminés sur place, à l'aide d'une série d'aréomètres divisés en 0,0002, mais dont les indications variaient souvent d'une demi-division, quand on répétait l'observation sur le même échantillon dans des conditions aussi identiques que possible. L'auteur discute longuement toutes les causes possibles des erreurs d'un aréomètre et introduit, dans ses calculs même, les corrections dépassant beaucoup la limite de précision des observations directes. Pour faciliter ses calculs, l'auteur a combiné plusieurs tables de réduction d'après les données de Lentz, Thorpe et Rucker, Ekmann, et autres.

N. JOUKOWSKY. — Sur le mouvement d'un liquide soumis à une condition donnée sur la ligne du courant, p. 89-100.

L'auteur applique, après l'avoir modifiée, la méthode de Kirchhoff pour la définition du mouvement d'un liquide à vitesse constante, donnée sur la ligne inconnue du courant, pour quelques cas de mouvements sous l'action des forces.

W. TURINE. — Sur l'influence des forces magnétiques et électriques sur la concentration des dissolutions placées dans le champ de leur action, p. 101-121.

L'expérience a donné, jusqu'à présent, des résultats négatifs quand on essayait de constater l'action des forces électriques et magnétiques sur la concentration des dissolutions. L'auteur s'est

---

(1) Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. V, p. 536.

proposé de traiter la question par le calcul. Il considère un condensateur sphérique, chargé au potentiel u, placé dans une enveloppe élastique susceptible de produire l'osmose et remplie d'une dissolution qui pénètre librement entre les armatures du condensateur. Cette enveloppe extérieure est plongée dans une masse de dissolvant pur, et soumise à une pression hydrostatique p. Le potentiel u et la pression p recevant les accroissements du et dp, l'auteur suppose que le système parcourt un cycle réversible quelconque à une température constante. Cela posé, il démontre à l'aide des formules de Thermodynamique que la concentration de la dissolution est fonction de l'intensité du champ électrique ou magnétique. Il affirme aussi que les résultats restent les mêmes, si l'enveloppe perméable est remplacée par une paroi imperméable, en verre.

N. KASANKINE. — Contribution à la question de l'influence de la concentration des dissolutions sur leur ascension capillaire, p. 122-124.

M. Kasankine a comparé aux données des expériences de divers auteurs les valeurs du coefficient K, calculées d'après la formule

$$K = \frac{v^{\frac{2}{3}}(H - h)}{d^{\frac{5}{3}}}.$$

H et h désignent ici les hauteurs d'ascension de l'eau pure et de la dissolution en question dans un même tube capillaire, v le volume de la dissolution contenant une gramme-molécule du sel et d son poids spécifique. L'auteur considère ce coefficient comme constant; en réalité, les différences de ses valeurs, calculées pour diverses concentrations de la solution du même sel, ne dépassent point 1 pour 100 pour le chlorure de barium, d'après les données de Volkmann; mais, pour d'autres composés, ces différences varient entre 3 pour 100 et 30 pour 100.

J. NORKEWITSCH-IODKO. — Expériences avec le téléphone, p. 126.

Si l'on met une des électrodes d'une bobine de Rhumkorff en communication avec une pointe, et si l'observateur tient dans sa main le bout d'un long conducteur isolé attaché à la deuxième

électrode, un téléphone isolé qu'il tient dans l'autre main commence à résonner. Une deuxième personne, en appliquant une oreille au téléphone, entend le bruit du fonctionnement de la bobine. Le corps de l'observateur remplit ici le rôle d'un condensateur. L'auteur a démontré cette expérience dans la séance de la Société physico-chimique du 12-25 février 1891.

N. PIROGOFF. — Sur le viriel des forces, p. 117-151.

Le Mémoire présent forme la continuation des recherches de l'auteur sur la théorie des gaz.

TH. SELIWANOFF. — Études sur la détermination des hautes températures, p. 152-169.

V. Meyer et Langer ont publié, en 1885, une série de recherches pyrochimiques, faites à des températures s'élevant jusqu'à 1722° C., qui ont été déterminées par un thermomètre à azote en platine et calculées à l'aide du coefficient de dilatation de ce métal mesuré entre des limites de température beaucoup moins élevées. L'auteur a cherché à déterminer ce coefficient sans mesurer directement la température, en se bornant à chauffer le platine aussi fortement que possible dans un fourneau au coke de cornue à gaz, avec courant forcé obtenu à l'aide d'un ventilateur à main. Tout le système étant aussi semblable que possible à celui de MM. Meyer et Langer, les températures maxima, obtenues dans les deux cas, devaient être identiques. La barre de platine dépassait le fourneau des deux côtés, et deux vis micrométriques, fixées sur son fondement, servaient à mesurer l'accroissement de sa longueur. On se servait d'un courant faible et d'un téléphone pour constater le contact entre la pointe de la vis et le barreau. Pour compenser la dilatation des deux bouts de la barre, chauffés à des températures décroissantes inconnues, l'auteur a disposé à côté deux barres plus courtes, dont les extrémités intérieures butaient contre deux briques réfractaires fixées au milieu du fourneau.

A l'extérieur, la dilatation de ces barres compensatrices était mesurée par des vis micrométriques, semblables à celles de la barre principale. L'auteur supposait que les deux briques, fixées sur le fondement du fourneau constamment refroidi par le courant

d'air insufflé par en bas, n'ont pas varié de position pendant l'expérience.

Le coefficient de dilatation du platine entre 0° et 1670° C., obtenu ainsi, est égal à 0,00000975, et, d'après ce chiffre, les températures calculées par MM. Meyer et Langer sont d'à peu près 20° C. trop hautes. W. LERMANTOFF.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Philosophical Magazine.

5e série, t. XXXIII; janvier 1892.

Février 1892.

A.-W. Rücker. — *Sur la densité et la composition de l'acide sulfurique étendu*, p. 204.

Lord Rayleigh. — *Sur la théorie des forces superficielles*. II. *Fluides compressibles*, p. 209.

H.-L. Callandar. — *Quelques expériences avec un pyromètre de platine sur les points de fusion de l'or et de l'argent*, p. 220.

Wiedemann's Annalen.

T. XLV; n° 1, 1892.

E. Warburg. — *Sur la force électrique aux électrodes, et sur l'électrisation du gaz dans la décharge par aigrettes*, p. 1.

H. Hertz. — *Sur le passage des rayons cathodiques à travers de minces couches de métal*, p. 28.

Fr. Stenger. — *Force électromotrice inverse de l'arc électrique*, p. 33.

S. Henrichsen. — *Sur le magnétisme des combinaisons organiques*, p. 38.

E. Cohn. — *Électrodynamique des conducteurs*, p. 55.

J. Klemencic. — *Réflexion des rayons de force électriques sur des plaques de soufre et sur des plaques de métal*, p. 62.

A. Abt. — *Comparaison des propriétés magnétiques de l'acier et de la magnétite de Moravie*, p. 80.

W.-C. Röntgen. — *Sur la constitution de l'eau liquide*, p. 91.

W.-C. Röntgen. — *Recherches sur l'influence exercée par la pression sur quelques phénomènes physiques*, p. 98.

E. Blasius. — *La Géométrie de position appliquée à la Cristallographie*, p. 108.

C. Brodman. — *Recherches sur le coefficient de frottement des liquides*, p. 159.

F. Braun. — *Remarques sur la réponse de M. Pellat*, p. 185.

M.-Th. Edelmann. — *Pendule de Foucault et appareil pour projeter l'expérience de Foucault*, p. 187.

B. Walter. — *Réponse aux remarques de M. Böhlendorf*, p. 189.

A. Muller. — *Sur un Mémoire de M. J.-O. Thompson*, p. 191.

SUR LES LOIS DE L'INTENSITÉ DE LA LUMIÈRE ÉMISE PAR LES CORPS PHOSPHORESCENTS;

PAR M. HENRI BECQUEREL.

Les phénomènes de phosphorescence, de même que les phénomènes d'absorption de la lumière offrent, pour les physiciens, un intérêt particulier, parce qu'ils sont de nature à donner des renseignements précieux sur la structure intime de la matière et sur les mouvements intermoléculaires.

Mon père est, comme on le sait, le premier qui ait abordé l'étude de la lumière émise par les corps phosphorescents. En comparant l'extinction de la phosphorescence au refroidissement des corps, il avait montré que, au bout d'un temps très court, l'intensité de la lumière est approximativement représentée par l'expression $i = i_0 e^{-\alpha t}$, dans laquelle α est un coefficient particulier pour chaque substance, et t le temps écoulé depuis le moment où l'intensité était i_0. Cette relation se vérifie, en effet, d'une manière approchée, lorsqu'on examine un corps dans un phosphoroscope en faisant varier la vitesse de rotation de l'appareil, si l'on se borne à prendre pour valeur de la durée t de l'extinction le temps que les milieux de deux ouvertures consécutives des disques mobiles mettent à passer devant la source lumineuse et devant l'œil de l'observateur, les temps ainsi obtenus ne dépassent pas une fraction de seconde. Mon père avait fait observer, en outre, que la formule précédente ne convient pas pour représenter les intensités décroissantes des lueurs émises par un corps phosphorescent qui, après avoir été exposé à la lumière, reste lumineux dans une chambre noire pendant plusieurs minutes et parfois plusieurs heures. Il avait proposé la formule empirique $i^m(c+t) = ci_0^m$, dans laquelle m et c étaient des constantes spécifiques; mais ce n'était pas encore une expression satisfaisante du phénomène, car, le plus souvent, m et c devaient recevoir diverses valeurs pour représenter les intensités observées avec un même corps et dans une même expérience de quelque durée. Tel était l'état de la question, il y a quelques années, lorsque j'ai été conduit à reprendre l'étude de ces phénomènes.

Vers la même époque, M. Wiedemann chercha à analyser plus complètement les diverses alternatives d'excitation lumineuse et d'extinction dans le phosphoroscope; il admit comme exacte, *a priori*, la relation exponentielle rappelée plus haut et, dans plusieurs publications récentes, il est parti de cette loi pour établir diverses considérations théoriques sur la phosphorescence.

J'avais, de mon côté, fait le même calcul pour le phosphoroscope. En admettant que l'expression $i = i_0 e^{-\alpha t}$ représente la loi d'extinction, on arrive sans peine à établir la loi correspondante pour la période d'excitation lumineuse, et l'on trouve alors que l'intensité de la lumière émise par un corps placé dans un phosphoroscope devrait être représentée par l'expression

$$i = \frac{\mathrm{AL}(1 - e^{-\alpha t})(1 - e^{-\alpha t'})e^{-\alpha\theta}}{\alpha(t' + t'_1)(1 - e^{-\alpha(t + t_1)})}.$$

L représente l'intensité de la lumière incidente, t le temps du passage d'une ouverture de l'un des disques entre le corps étudié et la source de lumière, t' le temps du passage d'un secteur opaque, t_1 et t'_1 les temps du passage d'une ouverture et d'un secteur opaque entre le corps étudié et l'œil de l'observateur, θ le temps qui sépare le moment où cesse l'illumination du corps, du moment où l'on commence à l'apercevoir ([1]). Si la loi sur laquelle on s'est appuyé est exacte, on doit, pour un même corps et pour des vitesses différentes du phosphoroscope, observer des valeurs de i qui conduisent à une valeur constante pour le coefficient α. Or l'expérience ne vérifie pas cette déduction. Les méthodes de calcul et les Tableaux numériques seront publiés prochainement dans un Mémoire plus détaillé : je citerai seulement ici, à titre d'exemple, les nombres obtenus avec l'alumine :

Alumine (rubis).	t (en millièmes de seconde).	10,560		5,940		4,092		2,310		1,237
	α		0,2216		0,3484		0,3862		0,4577	

([1]) Cette formule diffère, par le terme $\frac{1}{t' + t'_1}$, de celle de M. E. Wiedemann, qui est

$$i = \frac{\mathrm{AL}}{\alpha} \cdot \frac{(1 - e^{-\alpha t})(1 - e^{-\alpha t'})e^{-\alpha\theta}}{(1 - e^{-\alpha t}e^{-\alpha t_1})}$$

(*Ann der Physik und Chemie*, t. XXXIV; 1888).

La variation régulière de α montre l'inexactitude de la loi sur laquelle est fondé le calcul.

J'ai cherché à établir, par des considérations mécaniques simples, une relation entre l'intensité de la lumière émise par un corps phosphorescent et le temps écoulé depuis le moment où l'excitation lumineuse a cessé. La lueur émise étant le résultat d'un mouvement vibratoire intermoléculaire, on peut considérer l'extinction de cette lueur et, par suite, la diminution d'amplitude du mouvement, comme l'effet d'une force amortissante intermoléculaire qui serait à chaque instant fonction de la vitesse de la particule vibrante. Si l'on supposait la force d'amortissement proportionnelle à la vitesse, l'équation différentielle du mouvement vibratoire conduirait, pour les intensités, à la relation exponentielle rappelée plus haut, et qui ne satisfait pas à l'expérience.

Supposons que la force amortissante soit proportionnelle au carré de la vitesse, comme cela est approximativement vérifié lorsqu'un corps solide se déplace dans un milieu résistant; en désignant par u le déplacement de la particule vibrante, l'équation différentielle du mouvement sera

$$\frac{d^2u}{dt^2} + ku \mp \gamma\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 0.$$

On sait que la solution de cette équation établit, entre l'amplitude de la $n^{\text{ième}}$ demi-période et l'amplitude initiale, la relation

$$u_n = \frac{u_0}{1 + \frac{4}{3}n\gamma u_0}.$$

Comme le nombre n des demi-périodes est proportionnel au temps et que l'amplitude est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité, on en déduit

$$(1) \qquad u = \frac{u_0}{1 + u_0 bt} = \sqrt{i} = \frac{1}{a + bt}.$$

Cette formule n'est autre que l'expression $i^m(c + t) = ci_0^m$ rappelée plus haut, si l'on y fait $m = \frac{1}{2}$. Or, dans les expériences de mon père, la valeur de m avait toujours été trouvée voisine de $\frac{1}{2}$, et l'on avait même obtenu exactement $\frac{1}{2}$ pour certains corps, notamment des préparations particulières de sulfure de calcium et de strontium.

Pour d'autres corps, la formule (1) paraît ne pas convenir; mais, si l'on observe, comme je l'ai montré antérieurement, que ces corps peuvent être des mélanges de substances différentes, ou de composés différents d'une même substance émettant chacun des lueurs dont la loi d'extinction est différente, on est conduit à penser que l'intensité totale est la somme des intensités partielles de ces lueurs, et à comparer l'intensité observée à une formule de la forme

$$(2) \qquad i = \frac{1}{(a + bt)^2} + \frac{1}{(a' + b't)^2} + \dots.$$

Cette formule représente, d'une manière remarquable, les intensités des lueurs émises par les corps phosphorescents à longue durée.

Je rapporterai seulement ici les comparaisons faites avec les observations de mon père ([1]). Les intensités étaient déduites des distances auxquelles il fallait éloigner une lampe pour obtenir, sur une surface transparente, une intensité égale à celle de la lueur émise par le corps phosphorescent. Soit y cette distance. On a, à un facteur constant près,

$$i = \frac{1}{y^2}.$$

La formule (1) devient

$$y = a + bt;$$

la courbe des données expérimentales est une droite, ce que l'expérience vérifie avec les quelques corps cités plus haut. Pour les mélanges de substances tels que la préparation de sulfure de calcium, donnant par phosphorescence une belle lumière bleue, ou les sulfures de strontium et de baryum, la courbe affecte une forme convexe vers l'axe des y. Les observations relatives au sulfure de calcium bleu que l'on vient de citer sont très bien représentées par la relation

$$i = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(57 + 0,09\,t)^2} = \frac{1}{(7,97 + 0,65\,t)^2},$$

([1]) *Annales de Chimie et de Physique*, t. LXII; 1860.

comme le montre le Tableau suivant : les temps sont exprimés en secondes, les valeurs de y en centimètres.

t.	y observé.	y calculé.
s	cm	cm
0	7,90	7,90
35	28,60	27,34
75	42,30	42,37
170	59,05	61,70
265	72,90	73,76
420	89,65	89,82
700	116,70	116,16
1110	155,35	153,40
1305	176,35	171,59
1525	189,60	190,60
1725	204,80	208,60

La formule permet, comme on le voit, de suivre la diminution d'intensité pendant près d'une demi-heure; les différences entre les nombres observés et les nombres calculés sont de l'ordre de grandeur des erreurs expérimentales.

La quantité totale de lumière émise est

$$Q = \int_0^\infty i\,dt = \int_0^\infty \frac{dt}{(a+bt)^2} = \frac{1}{ab}.$$

En appliquant ce calcul à chacune des matières qui forment le mélange lumineux bleu étudié plus haut, on arrive à ce résultat remarquable que, malgré leur vitesse d'extinction inégale, la quantité totale de lumière émise par chacune d'elles est la même. On a, en effet,

$$57 \times 0,09 = 5,13 \qquad \text{et} \qquad 7,97 \times 0,65 = 5,18.$$

On peut démontrer d'une autre manière que les substances étudiées sont des mélanges de matières ayant des durées d'extinction différentes. Lorsqu'on projette, pendant quelques instants, le spectre solaire sur un écran formé de matière réduite en poudre, et qu'on fait ensuite cesser l'action du spectre, on voit que la phosphorescence a été excitée dans des régions spectrales particulières, qui constituent le spectre d'absorption de la substance, car, pour être actifs, il est nécessaire que les rayons soient absorbés.

Avec la préparation de sulfure de calcium étudiée plus haut, le spectre d'absorption se compose de deux bandes ou régions actives, l'une α près de G, s'étendant entre les longueurs d'onde $\lambda = 455$ et $\lambda = 400$; l'autre β, dans l'ultra-violet de $\lambda = 365$ à $\lambda = 340$. La bande α émet une lueur bleu foncé, β une lueur bleu clair verdâtre. Cependant, si l'action excitatrice du spectre a une durée un peu longue, on voit, sur la moitié la plus réfrangible de α, de 405 à 400, une lueur plus claire qui disparaît rapidement, dont l'existence justifierait la présence d'un troisième terme dans la formule ci-dessus, mais ce terme aurait une influence très faible. Les lueurs émises par les bandes α et β ont des durées de persistance inégales; pour manifester cette inégalité, il suffit de chauffer la matière impressionnée; la phosphorescence devient momentanément plus vive, puis diminue; la bande verte β disparaît rapidement tandis que la bande bleue α reste encore visible pendant très longtemps. Si l'on projette le spectre sur la substance pendant qu'elle est à une température supérieure à 100°, la bande α apparaît seule; aussi le corps paraît-il bleu foncé à chaud, tandis qu'il est bleu clair à la température ordinaire.

Des phénomènes de même ordre se présentent avec les autres préparations de sulfures phosphorescents, de calcium, de strontium, de baryum. Quelques-unes paraissent exemptes de mélanges, et ne donnent qu'une bande d'excitation dans le spectre; un sulfure de calcium ne donne que la bande β, une préparation de sulfure de strontium lumineuse bleue ne donne qu'une bande, et l'intensité de la lumière émise suit presque exactement la formule (1). L'influence de matières différentes mélangées entre elles produit, dans la lumière émise, des changements de couleur analogues à ceux que j'ai étudiés l'année dernière pour les fluorures de calcium, soit lorsqu'on les rend phosphorescents par la chaleur, soit lorsqu'on les examine au phosphoroscope avec des vitesses différentes de rotation de l'appareil.

Pour étudier la loi de déperdition de la lumière émise par les corps phosphorescents, il conviendrait donc d'isoler une radiation de longueur d'onde déterminée, émise sous l'influence excitatrice de radiations monochromatiques d'une longueur également déterminée. Cependant les vérifications qui viennent d'être rapportées donnent une grande probabilité à la formule (1). Celle-ci se vé-

rifie dans ses diverses conséquences; elle montre comment la loi de déperdition varie avec l'intensité initiale et avec la durée de l'excitation lumineuse.

Des considérations analogues à celles qui viennent d'être indiquées permettent d'établir une relation entre l'intensité et le temps pendant que le corps est exposé aux radiations excitatrices. J'ai démontré, autrefois, qu'avec certains corps, tels que les composés d'uranium, les radiations absorbées correspondaient à des mouvements vibratoires harmoniques de ceux des radiations émises par phosphorescence. On pourrait supposer qu'à l'intérieur des corps il se produise des mouvements vibratoires soit permanents, soit prenant naissance sous l'influence de radiations incidentes et cessant en même temps que ces dernières; par une extension de la loi de Kirchhoff, les radiations absorbées seraient celles dont les vibrations seraient soit synchrones, soit harmoniques des vibrations intermoléculaires. Considérons maintenant un corps soumis à l'action de la lumière et qui devient phosphorescent, et admettons que l'éther intermoléculaire ait pris un mouvement vibratoire synchrone de celui qui va naître et qui constituera la phosphorescence. Soit $U = A\cos kt$ l'amplitude du premier mouvement, $u = u_0 \cos kt$ l'amplitude du mouvement qui produit la phosphorescence; la vitesse relative de ce dernier mouvement par rapport au milieu, qui est lui-même en vibration, sera $\left(\frac{du}{dt} - \frac{dU}{dt}\right)$, et, si nous supposons que l'amortissement est proportionnel au carré de cette vitesse, l'équation différentielle du mouvement deviendra

$$\frac{d^2u}{dt^2} + ku \pm \gamma\left(\frac{du}{dt} - \frac{dU}{dt}\right)^2 = 0.$$

On en déduit très simplement, pour représenter la variation d'amplitude pendant l'excitation lumineuse, la relation

$$u = A - \frac{A - u_0}{1 + (A - u_0)\,bt} \text{ [1]}.$$

---

[1] J'avais obtenu, depuis plusieurs années, la plupart des résultats exposés dans cette Note; je comptais, avant de les publier, terminer une série d'expé-

Cette formule demande à être vérifiée par des expériences nouvelles en cours d'exécution.

En résumé, il résulte des considérations qui viennent d'être exposées que l'on peut rendre compte assez exactement de la loi de diminution de l'intensité de la lumière émise par les corps phosphorescents, en admettant que les mouvements intermoléculaires qui produisent la phosphorescence, s'amortissent proportionnellement au carré de la vitesse des particules vibrantes.

SUR L'ENTRAINEMENT DES ONDES LUMINEUSES PAR LA MATIÈRE EN MOUVEMENT;

PAR M. G. FOUSSEREAU.

M. Potier [1] a donné une démonstration de la formule de Fresnel relativement à l'entraînement des ondes par la matière pondérable. Il suppose avec Fresnel que dans les milieux transparents, l'éther peut être considéré comme le produit de la superposition d'un éther libre élastique identique à l'éther du vide, et d'un éther condensé, sans élasticité, entraîné comme un fardeau inerte dans les mouvements de l'éther libre, et partageant le mouvement de translation du corps pondérable. En partant de cette hypothèse, M. Potier établit qu'un mouvement vibratoire pendulaire d'amplitude et de longueur d'onde supposées invariables se transmet avec une vitesse V_1, à travers un milieu pondérable animé d'une vitesse v, dans le sens de la propagation des ondes,

---

riences nouvelles, lorsque j'ai eu connaissance de plusieurs Notes de M. E. Wiedemann, qui contiennent sur la phosphorescence des sulfures alcalino-terreux des considérations théoriques tellement en désaccord avec les anciennes expériences de mon père et les miennes, que j'ai cru devoir avancer l'époque de cette publication.

(1) A. POTIER, *Journal de Physique*, 1re série, t. V, p. 105. *Voir* aussi la discussion mathématique de cette question par M. H. Poincaré (*Théorie mathématique de la lumière*, Chap. VIII). M. Poincaré admet, conformément à la théorie de M. Boussinesq, que la matière elle-même est entraînée dans le mouvement vibratoire de l'éther.

les vitesses v et V_1 étant liées par la formule

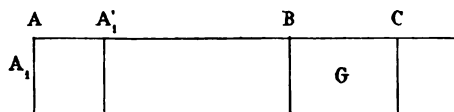
$$(1)\qquad (\rho + \rho')V'^2 = \rho V_1^2 + \rho'(V_1 - v)^2,$$

V' représente la vitesse de propagation des ondes à travers le même milieu supposé en repos, ρ et ρ' les densités de l'éther libre et de l'éther condensé.

Il est possible, en s'appuyant sur l'hypothèse de Fresnel, d'établir une démonstration de la même formule pour un ébranlement quelconque communiqué à l'éther et constituant une onde plane, ou une série d'ondes planes, sans spécifier autre chose que les conditions initiales de cet ébranlement.

Considérons les phénomènes qui se produisent dans un cylindre de section égale à l'unité, dont les génératrices sont dirigées dans le sens de la propagation lumineuse. Prenons pour origine des distances x dans l'éther libre une section droite A, et des distances x_1 dans l'éther condensé la section A_1 qui coïncide avec A à l'origine des temps.

Fig. 1.



Écrivons l'équation du mouvement pour le centre de gravité G d'une tranche BC de longueur infiniment petite dx, comprenant au temps t une certaine portion des deux milieux.

Le déplacement vibratoire s du point G dans l'éther libre doit être regardé comme une fonction de t et de x. L'accélération de ce point est $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. Le déplacement s_1 du même point G dans l'éther condensé doit être regardé comme une fonction de t et de x_1. L'accélération correspondante sera $\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}$, quantité différente de la première, bien que s_1 soit égal à s, parce que les variables sont différentes.

On a donc, en écrivant que la somme des produits des masses par les accélérations est égale à la résultante des forces transportées

en G parallèlement à elles-mêmes,

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \rho' \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \tag{2}$$

E étant l'élasticité de l'éther libre.

Cette équation est satisfaite par des intégrales de la forme

$$s = F\left(t - \frac{x}{V_1}\right), \tag{3}$$

$$s_1 = F_1\left(t - \frac{x_1}{V_1'}\right), \tag{4}$$

V_1 et V_1' étant des fonctions de ρ, ρ' et E.

Au temps t la section origine A_1 du milieu entraîné a parcouru la distance vt et est venue en A_1'. Deux sections appartenant aux deux milieux coïncideront donc au temps t, quand on aura

$$x = x_1 + vt.$$

On aura en même temps

$$s_1 = s.$$

De là résulte entre F et F_1 la relation

$$s_1 = F_1\left(t - \frac{x_1}{V_1'}\right) = F\left[t\left(1 - \frac{v}{V_1}\right) - \frac{x_1}{V_1}\right].$$

Pour déterminer la valeur de V_1, vitesse de propagation des ondes, exprimons que les valeurs de s et de s_1 ainsi déterminées satisfont à l'équation différentielle (2)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F''\left(t - \frac{x}{V_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{v}{V_1}\right)^2 F''\left[t\left(1 - \frac{v}{V_1}\right) - \frac{x_1}{V_1}\right] = \left(1 - \frac{v}{V_1}\right)^2 F''\left(t - \frac{x}{V_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{V_1^2} F''\left(t - \frac{x}{V_1}\right).$$

L'équation (2) devient, en divisant les deux membres par $\frac{1}{V_1^2} F''\left(t - \frac{x}{V_1}\right)$,

$$\rho V_1^2 + \rho'(V_1 - v)^2 = E,$$

et si V' est la vitesse de propagation dans le cas particulier où la

matière est immobile

$$E = (\rho + \rho')V'^2 = \rho V_1^2 + \rho'(V_1 - v)^2.$$

Cette formule est identique à l'équation (1).

Les variations subies par la vitesse V', quand on change la longueur d'onde de la lumière considérée exigent, comme le fait remarquer M. Potier, que l'on attribue au coefficient ρ' des valeurs variables avec la longueur d'onde. Les valeurs de V_1, auxquelles on est ainsi conduit, sont précisément celles qu'il faut attribuer à cette vitesse, pour que le phénomène de l'aberration astronomique ne soit pas modifié par la nature du milieu interposé.

APLANÉTISME ET ACHROMATISME;

PAR M. ANDRÉ BROCA.

Aplanétisme.

I. *Principes généraux. Utilité des points aplanétiques au quatrième ordre près.* — Euler a étudié les aberrations focales des lentilles minces. Il en a déduit des règles très nettes pour la construction de l'objectif de la lunette astronomique ; mais, quand il s'agit du microscope, les épaisseurs des lentilles ne sont plus négligeables, les lentilles ne travaillent plus toutes à leur foyer, les calculs d'Euler ne s'appliquent plus.

J'ai cherché à introduire dans les calculs l'épaisseur et la position du point lumineux et à en tirer des résultats pratiques.

La première question est de savoir jusqu'à quel point on peut réaliser l'aplanétisme. Je vais établir à ce sujet deux théorèmes :

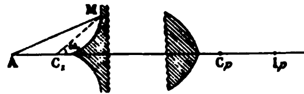
THÉORÈME I. — LEMME. *Tout système optique possède un nombre déterminé de points réels ou imaginaires situés sur une droite déterminée et jouissant d'une propriété exprimable par une équation.*

En effet, le point étant arbitraire sur une droite est déterminé par sa distance à un point fixe. Nous pourrons toujours déter-

miner cette arbitraire de façon à satisfaire à l'équation de condition.

THÉORÈME. — *Tout système centré de révolution possède des points réels ou imaginaires, situés sur son axe, pour lesquels l'aberration de courbure est du quatrième ordre par rapport à l'ouverture angulaire de la première surface (fig. 1).*

Fig. 1.



En effet, si l'on se donne un rayon par le point A où il coupe l'axe, et le point M où il perce la première surface, le point I_p, où le dernier réfracté correspondant au rayon AM coupe l'axe, est déterminé. Soit ω_1 l'angle compté autour d'un point C_1 et déterminant le point M. Soit $(\rho_p)_{\omega_1} = C_p I_p$, C_p étant un point fixe. $(\rho_p)_{\omega_1}$ est une fonction paire de ω_1, puisque I_p ne change pas, par symétrie, quand on change ω_1 en $-\omega_1$. Donc, en appelant $(\rho_p)_0$ la limite de $(\rho_p)_{\omega_1}$ pour $\omega_1 = 0$, on a

$$(1) \qquad (\rho_p)_{\omega_1} = (\rho_p)_0 + A_0\omega_1^{2n} + B_0\omega_1^{2n+2l} + \dots,$$

les indices 0 indiquant que les paramètres contenus dans A, B, etc., se rapportent tous aux rayons centraux.

Le cas le plus défavorable est celui où $n = l = 1$. En prenant alors pour équation de condition $A_0 = 0$, le lemme démontre la proposition.

Corollaire. — L'équation $A_0 = 0$ s'obtiendra en dérivant $(\rho_p)_{\omega_1}$ par rapport à ω_1^2, car le développement (1) se confond avec le développement de Maclaurin où ω_1^2 est la variable.

THÉORÈME II. — *Quand on se donne un point sur l'axe d'un système centré sphérique dont on ne limite pas la complication, on peut calculer les données de ce système de manière à rendre très petite l'aberration de sphéricité.*

En effet, s'il y a p sphères, j'aurai $2p - 1$ paramètres, les p rayons de courbure, et les $p - 1$ distances des p centres. Un

rayon AM donne lieu à p réfractés successifs qui donnent les images $I_1, \ldots, I_q, \ldots, I_p$, qui sont toutes déterminées si l'on se donne le système centré et le rayon AM. Il y a, en effet, p équations de conjugaison, exprimant que les I sont les images de A. Ces p équations de conjugaison, si l'on se donne le point A, contiennent $2p - 1$ paramètres. S'il y en a $2p - 1 - q$ déterminés par les conditions de grossissement et d'achromatisme, il en restera q qu'on pourra déterminer pour l'aplanétisme. Soient ω_1, ω'_1, ω''_1, ... q valeurs de ω_1, je pourrai prendre comme équations de conditions les q équations

$$(\rho_p)_0 = (\rho_p)_{\omega_1} = (\rho_p)_{\omega''_1} = \ldots,$$

qui impliquent que l'aberration est du quatrième ordre. D'ailleurs, pour les points ordinaires, la courbe des ρ_p en fonction de ω_1^2 a la forme de la *fig.* 2, pour les points déterminés par $A_0 = 0$, la

Fig. 2.

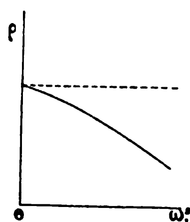
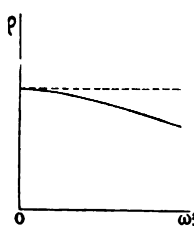
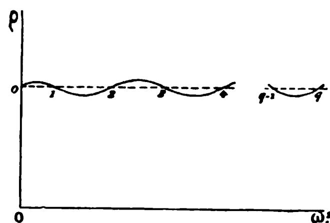


Fig. 3.



forme de la *fig.* 3, dans le dernier cas, la forme de la *fig.* 4. Si

Fig. 4.



les points 1, 2, ..., q sont assez nombreux, on pourra resserrer autant qu'on le voudra la courbe (4).

Posé ainsi, le problème est insoluble, à cause de la complication de la fonction ρ_p.

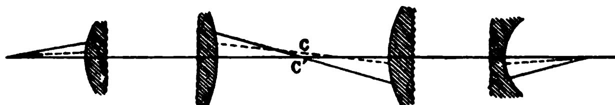
Mais si nous supposons deux systèmes, l'un tel que (1), l'autre tel que (2) (*fig.* 5). Si nous formons en C' l'image C, la *fig.* 6

Fig. 5.



montre qu'il peut y avoir compensation des aberrations. La compensation sera au moins partielle. Si de plus les points C' et C sont des points aplanétiques au quatrième ordre près, l'image

Fig. 6.



totale sera plus aplanétique que si l'on employait un seul des deux systèmes composants. De plus, en ces points, l'aberration change de signe : donc on pourra trouver par un tâtonnement facile, en réglant la distance des deux systèmes composants, une position où la compensation sera très satisfaisante.

II. *Méthode générale de recherche des points aplanétiques au quatrième ordre près, dans les systèmes centrés sphériques.* — Nous prendrons comme origines des angles et des segments les centres des sphères. Le sens positif sera en sens inverse de la propagation de la lumière.

C_q, γ_q sont le centre et le rayon de courbure compté à partir du centre du $q^{\text{ième}}$ dioptre, v_q est la vitesse de la lumière dans ce dioptre; le système est défini par ces données et les segments $a_{q-1} = \overline{C_{q-1}C_q}$. Un point et ses images successives seront définis par

$$\rho_0 = \overline{C_1 A_0}, \qquad \rho_1 = \overline{C_1 I_1}, \qquad \ldots, \qquad \rho_p = \overline{C_p I_p}.$$

Pour un dioptre, il est aisé de voir que la formule générale de conjugaison, quels que soient l'objet et le dioptre, est

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho_1^2[(V_1^2 - V_0^2)\rho_0^2 + 2V_0^2\rho_0 \cos\omega_1 - V_0^2\gamma_1^2] \\ &\qquad - 2V_1^2\rho_0^2\rho_1\gamma_1\cos\omega_1 + V_1^2\rho_0^2\gamma_1^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

si l'on prend pour $\cos\omega_1$ son module.

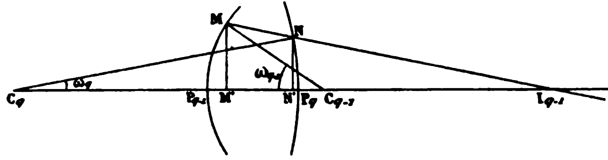
Nous aurons évidemment la relation relative au $q^{\text{ième}}$ dioptre en changeant ρ_0 en $C_q I_{q-1} = -a_{q-1} + \rho_{q-1}$, l'indice 1 en l'indice q et V_0 en V_{q-1}.

J'appelle $[q]$ l'équation ainsi obtenue.

Or il est évident que, lorsqu'on se donne le point A et l'angle ω_1, tous les ω successifs sont déterminés. Cherchons donc la formule qui relie deux ω consécutifs.

Soit MNI_{q-1} (*fig.* 7) un rayon dans le $(q-1)^{\text{ième}}$ dioptre, il

Fig. 7.



définit ω_q et ω_{q-1}. Nous avons

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{I_{q-1}M'}{I_{q-1}N'}.$$

Or

$$MM' = \gamma_{q-1}\sin\omega_{q-1}, \qquad NN' = \gamma_q \sin\omega_q,$$
$$I_{q-1}M' = -\rho_{q-1} + \gamma_{q-1}\cos\omega_{q-1}, \qquad I_{q-1}N' = -\rho_{q-1} + a_{q-1} + \gamma_q\cos\omega_q.$$

Donc

$$\frac{\gamma_{q-1}\sin\omega_{q-1}}{\gamma_q\sin\omega_q} = \frac{-\rho_{q-1} + \gamma_{q-1}\cos\omega_{q-1}}{-\rho_{q-1} + a_{q-1} + \gamma_q\cos\omega_q},$$

d'où

$$(2) \qquad \omega_q = \omega_{q-1}\left(\frac{-\rho_{q-1} + a_{q-1} + \gamma_q}{-\rho_{q-1} + \gamma_{q-1}}\right)\frac{\gamma_{q-1}}{\gamma_q}.$$

Formons maintenant l'équation $A_0 = 0$ de la première partie, par l'équation $[q]$ nous avons ρ_q, qui est une fonction implicite composée de ω_q et de ρ_{q-1}, fonctions de ω_1^2. Donc $A_0 = 0$ sera donnée par p équations

$$\left(\frac{d\rho_q}{d\omega_1^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial\rho_p}{\partial\omega_p^2}\right)_0 \left(\frac{d\omega_p^2}{d\omega_1^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial\rho_p}{\partial\rho_{p-1}}\right)_0 \left(\frac{d\rho_{p-1}}{d\omega_1^2}\right)_0,$$

dont la $p^{\text{ième}}$ aura zéro pour premier terme.

En exprimant chacune des dérivées partielles en fonction de ρ_q et de γ_q, on arrive à des expressions simples et homogènes. Intro-

duisons les variables auxiliaires suivantes

$$y_{q-1} = \frac{\gamma_q}{\gamma_{q-1}}, \qquad \frac{a_q}{\gamma_q} = x_q, \qquad \frac{\rho_q}{\gamma_q} = \alpha_q,$$

il vient, tous calculs faits,

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial \omega_q^2} = \frac{\gamma_q (V_q - V_{q-1})(V_q + V_{q-1}\alpha_q)\alpha_q^2}{2V_q^2(1-\alpha_q)},$$

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial \rho_{q-1}} = \frac{[V_q - (V_q - V_{q-1})\alpha_q]^2}{V_q V_{q-1}},$$

$$\frac{d\omega_q^2}{d\omega_1^2} = \frac{(1-\alpha_q)^2}{(1-\alpha_1)^2} \prod_2^q \frac{V_q^2}{2[V_q - (V_q - V_{q-1})\alpha_q]^2},$$

et l'équation de conjugaison relative aux rayons centraux devient, en choisissant convenablement le double signe,

$$\alpha_q = \frac{V_q(\alpha_{q-1} - x_{q-1})}{(V_q - V_{q-1})(\alpha_{q-1} - x_{q-1}) + V_{q-1} y_{q-1}}.$$

Si au lieu de prendre ainsi le problème on se donne le système centré, les équations précédentes permettront de connaître la valeur du coefficient A_0 en un point déterminé, c'est-à-dire la valeur principale de l'aberration de courbure en ce point.

III. *Application au cas de la lentille. Construction de l'objectif et de l'oculaire du microscope. Conclusions générales.* — Quand on forme l'équation relative à la lentille crown-flint, qui permet de réaliser aussi l'achromatisme, on voit que, en appelant n_1 et n_2 les indices des deux verres, elle se compose de deux sortes de termes : 1° des termes qui, annulés, expriment que le point considéré est supposé aplanétique pour la lentille homogène; 2° des termes qui contiennent en facteur $n_2 - n_1$. Avec les verres actuels on peut choisir $n_2 - n_1$ assez petit pour négliger ces termes. Nous pouvons donc étudier seulement le cas de la lentille homogène.

Dans ce cas-là nous avons deux équations de conjugaison

$$-x + \alpha_1 = \frac{\alpha_2 y}{n - (n-1)\alpha_2}, \qquad \alpha_1 = \frac{\alpha}{n - (n-1)\alpha}$$

et une équation d'aplanétisme, qui peut s'écrire

$$y = \frac{\alpha_1^2(1 + n\alpha_1)(1 - \alpha_1)[n - (n-1)\alpha_2]^4}{n(n + \alpha_2)(1 - \alpha_2)\alpha_2^2}.$$

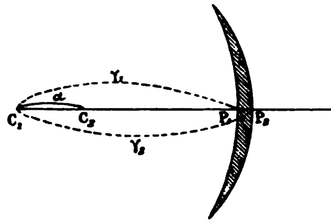
Éliminons α_1, il nous reste les deux équations résolues

$$y = \frac{\alpha^2(n+\alpha)(1-\alpha)[n-(n-1)\alpha_2]^4}{\alpha_2^2(n+\alpha_2)(1-\alpha_2)[n-(n-1)\alpha]^4}, \quad x = \frac{\alpha}{n-(n-1)\alpha} - \frac{\alpha_2 y}{n-(n-1)\alpha},$$

qui représentent une surface, mise sous forme unicursale. Nous pourrons donc construire un abaque, dont les courbes correspondront chacune à une valeur déterminée de α, qui fixe le point lumineux. Dans tout ce qui suit, l'unité est le rayon de courbure du premier dioptre. Un point du plan détermine x et y. La lentille correspondante est donc déterminée, au signe du premier rayon de courbure, et à un coefficient de similitude près. Nous allons montrer qu'il n'y a qu'un seul signe admissible pour le premier rayon de courbure.

En effet, sur la *fig.* 8, l'épaisseur de la lentille est le segment P_1P_2,

Fig. 8.



qui est essentiellement négatif. Or $P_1P_2 = -\gamma_1 + a + \gamma_2$: donc il faut que $-\gamma_1 + \gamma_2 + a < 0$. Divisons par γ_1, il vient deux groupes d'inégalités,

1° $\qquad \gamma_1 > 0, \qquad -1 + x + y < 0,$

2° $\qquad \gamma_1 < 0, \qquad -1 + x + y > 0.$

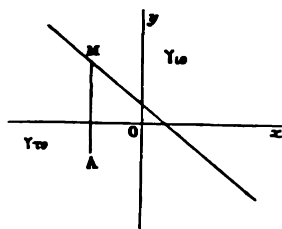
Donc au-dessus de la ligne $-1 + x + y = 0$, $\gamma_1 < 0$; au-dessous, $\gamma_1 > 0$. Donc il n'y a qu'une lentille correspondant à un point déterminé du plan.

La ligne $-1 + x + y = 0$ est le lieu des lentilles de nulle épaisseur. Il est aisé de voir que l'épaisseur d'une lentille A (*fig.* 9) est le segment d'ordonnée MA compris entre cette ligne et le point A.

De nombreux résultats immédiatement vérifiables permettent d'ajouter foi aux calculs précédents et aux résultats suivants :

Les lentilles convergentes minces ont toutes deux points aplanétiques très voisins de leurs surfaces. Ils se comportent donc, au point de vue pratique, comme un point double sans changement de signe de l'aberration.

Fig. 9.



Les lentilles divergentes minces n'ont pas, en général, de points aplanétiques.

Il y a exception à ces règles pour les lentilles minces pour lesquelles $1,9 > y > \frac{1}{1,9}$. Si elles sont convergentes, elles ont quatre points aplanétiques ; si elles sont divergentes, elles en ont deux. Les deux points aplanétiques surajoutés sont voisins l'un de l'autre, ils comprennent donc une région à aberration faible. Ces points donnent toujours des images virtuelles ; les lentilles qui les possèdent sont des ménisques convergents ou divergents.

Ces points ont leurs analogues pour les lentilles épaisses voisines de cette région. Ils jouissent d'ailleurs, dans les lentilles épaisses, de propriétés analogues à celles qu'ils ont dans des lentilles minces.

On pourra employer avec avantage les lentilles convergentes de cette région comme lentilles frontales de microscope. Les plus avantageuses sont celles qui donneront le plus fort grossissement et qui resserreront le plus le faisceau réfracté. Il est aisé de voir que ce sont celles de la droite $x = -\frac{1}{n}$. Le point aplanétique, qui est virtuel, et où $x = -n$ coïncide avec le point aplanétique absolu [1] du premier dioptre, et il est aisé de voir que le deuxième dioptre a ce point pour centre. Donc ce point est aplanétique absolu dans la lentille [2]. L'usage de ces lentilles ne présente donc que des avantages.

---

[1] *Voir* Verdet, t. IV, p. 874.

[2] M. Leroy a fait ouvrir un pli cacheté à ce sujet dans la séance du 1er février 1892 à l'Académie des Sciences.

Il y a d'autres lentilles à points absolus. Elles sont situées sur les neuf droites de l'abaque, et peuvent se ramener à six types irréductibles. Les seules pratiques sont celles qui viennent d'être étudiées, et qui doivent être préconisées pour la construction de l'objectif de microscope.

Maintenant que les principes de construction de l'objectif sont établis par l'étude précédente, cherchons ceux de la construction de l'oculaire.

Une condition physiologique donne évidemment le principe fondamental de cette construction, c'est la condition de moindre fatigue de l'œil observateur. Cette condition exige le relâchement total du muscle ciliaire, la désaccommodation complète. M. Guébhardt a établi (*Journal de Physique*, 2e série, t. 2, p. 266; 1883) que, pour arriver à ce résultat, il fallait que le premier foyer de l'oculaire fût en avant du centre optique de l'œil, c'est-à-dire que le foyer total de l'instrument fût à moins de 12^{mm} en arrière du dernier dioptre. Pour réaliser l'ensemble de ces deux résultats, il faut que l'oculaire travaille à son foyer, et que sa distance focale soit courte. Il faut donc avant tout chercher sur l'abaque les lentilles à foyer aplanétique. Elles sont situées sur la courbe $\alpha = \infty$. Celle-ci présente une partie marquée d'un trait de force sur la région supérieure de l'abaque, et deux parties dans la région négative, trop loin pour trouver place sur la figure, mais dont la position peut se déduire approximativement des courbes cotées -2, $-2,1$, $-2,5$, -3, dont la cote tend vers ∞ assez rapidement. La partie supérieure doit être rejetée tant que les calculs d'achromatisme ne seront faits pour les lentilles épaisses que dans le cas de deux milieux accolés (*voir* plus loin). La partie inférieure de gauche donne des épaisseurs inadmissibles. Enfin la branche de droite m'a donné des résultats admissibles pour l'achromatisme avec des épaisseurs de quinze fois environ le rayon de courbure situé du côté de l'onde plane. Ceci conduit à des épaisseurs considérables, et qui ne sont admissibles que si l'oculaire est très puissant. Or c'est là une condition de bon fonctionnement, d'après ce qui précède. L'emploi des points absolus pour l'objectif permet d'ailleurs de former au foyer de l'oculaire une image à aberrations très petites. Celui-ci pourra donc être construit très puissant, de façon à réaliser à lui seul la plus grande partie du grossissement.

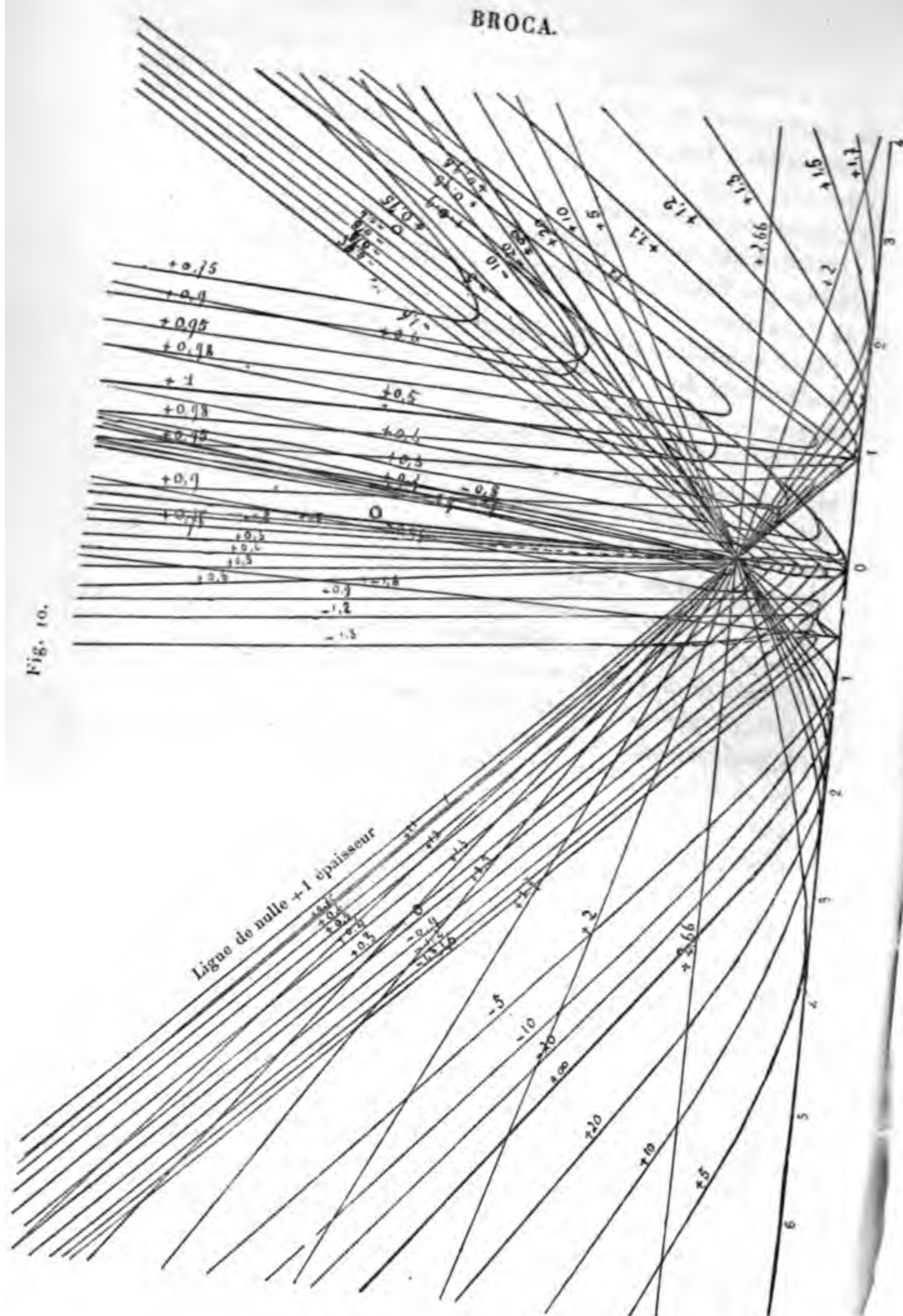


Fig. 10.

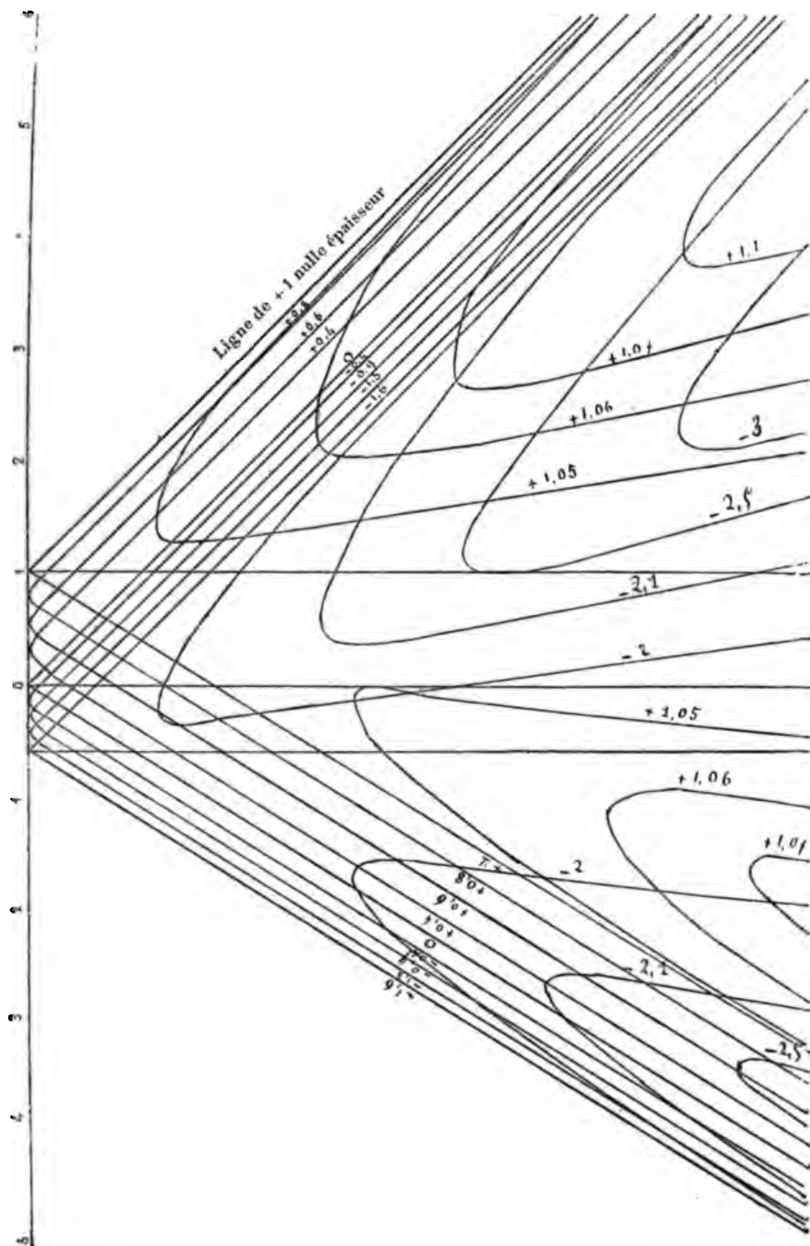

Ligne de +1 nulle épaisseur
+1,1
+1,07
+1,06
+1,05
-3
-2,5
-2,1
-2
+1,05
+1,06
+1,07
-2
-2,1
-2,5

Fig. 11.

Comme d'ailleurs on ne demandera plus à l'objectif une puissance considérable, on pourra le simplifier. L'oculaire ne comprendra qu'une seule lentille double, donc la construction de l'instrument sera très simplifiée.

L'étude précédente permet de montrer que toute construction faite avec des lentilles minces doit donner de moins bons résultats. En effet, l'étude de la fonction A_0 montre que pour $\alpha = \pm \infty$ elle ne change pas de signe. Donc les seuls points de changement de signe des aberrations sont les points donnés par l'abaque. Or on sait le signe de l'aberration focale des lentilles minces. On a donc tous les éléments nécessaires pour discuter la compensation des aberrations de deux lentilles minces. Une étude détaillée montre que cette compensation ne peut avoir lieu qu'aux dépens du grossissement et de la lumière, et que, par conséquent, la solution proposée est meilleure, pour construire un oculaire de microscope, que toute réunion de deux lentilles minces.

Donc, au point de vue de l'aplanétisme des oculaires, l'épaisseur, jusqu'ici négligée, joue le rôle capital, ce qui me semble justifier suffisamment les longs calculs nécessités par cette étude.

Achromatisme.

L'étude précédente de l'aplanétisme conduit, pour les oculaires, à des épaisseurs considérables, qui nécessitent de nouveaux calculs d'achromatisme. Je vais étudier le seul cas que j'aie pu traiter jusqu'ici, celui de la lentille composée d'un crown et d'un flint accolés.

Comme j'ai montré la possibilité d'employer des objectifs peu puissants et par conséquent minces, ce qui permet de les achromatiser par les anciennes formules, je ne m'occuperai que de l'achromatisme des oculaires, c'est-à-dire de l'achromatisme focal (*voir* plus haut).

La lentille complexe contient quatre paramètres, l'aplanétisme exige une condition, j'ai donc à ma disposition trois paramètres. Je peux donc satisfaire à trois équations, par exemple la superposition des foyers jaune et bleu et des plans principaux correspondants, d'un côté de la lentille et la superposition de deux de ces éléments de même nom de l'autre côté, ce qui donnera l'achro-

matisme parfait. Mais ceci est incompatible avec l'aplanétisme focal (*voir* plus loin). Je ne réaliserai donc que les deux premières conditions, par conséquent, les plans principaux et focaux ne seront superposés que d'un côté : les distances focales seront seulement égales de l'autre côté.

Mais si un objet lumineux est placé au foyer achromatique d'un pareil système, les faisceaux jaune et bleu sortiront, non superposés, mais parallèles. Un œil observateur les fera donc converger en un même point de sa rétine, si nous le supposons achromatique et désaccommodé, ce que nous devons faire. Cette approximation sera d'autant meilleure que l'ouverture angulaire employée sur l'œil observateur sera plus faible; les conditions produites par l'emploi des oculaires puissants seront donc très favorables.

Pour résoudre cette question, je pars des formules connues qui donnent les abscisses des éléments cardinaux d'un système centré composé de deux autres, par rapport au deuxième plan principal du deuxième système. La seule précaution à prendre est de changer le signe des rayons de courbure pour garder les mêmes notations que dans la théorie de l'aplanétisme. Ces abscisses sont des fonctions des indices, et ceux-ci, d'après tous les auteurs qui ont écrit sur la dispersion, sont de la forme $n = l + m\mu + p\mu^2$, ou $\mu = \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$, λ étant la longueur d'onde, μ est une quantité très petite. En annulant $\frac{dA}{d\mu}$ (A est l'abscisse d'un élément cardinal), on écrit que l'abscisse A, considérée comme fonction de μ, présente un maximum ou un minimum pour la valeur de μ qui détermine les n mis dans l'équation $\frac{dA}{d\mu} = 0$. Supposons que cette valeur de μ corresponde à un certain vert, nous aurons la courbe *fig.* 10 qui montre que la dispersion totale des éléments cardinaux est très faible et qu'elle est nulle pour le jaune et le bleu, si le vert a été bien choisi.

Pratiquement, quelle que soit la valeur de μ, si elle est moyenne, une légère retouche suffira pour corriger l'erreur résiduelle.

Appliquons ceci, aux formules connues (¹). Si Φ_2 est la distance

(¹) Appelons n_1, n_2 les indices, γ_1, γ_2, γ_3 les rayons de courbure des trois dioptres, e_1, e_2 les épaisseurs des deux lentilles (quantités essentiellement néga-

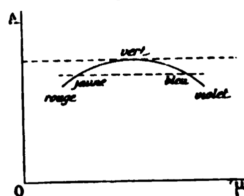
focale du système et Ψ_2 l'abscisse de son plan principal par rapport au pôle du troisième dioptre, si de plus $n_1 = l_1 + m_1\mu + p_1\mu^2$, $n_2 = l_2 + m_2\mu + p_2\mu^2$, les équations d'achromatisme d'un côté seront

$$m_1 \frac{d\Phi_2}{dn_1} + m_2 \frac{d\Phi_2}{dn_2} = 0, \tag{1}$$

$$m_1 \frac{d\Psi_2}{dn_1} + m_2 \frac{d\Psi_2}{dn_2} = 0. \tag{2}$$

Ces dérivées se calculent facilement de proche en proche.

Fig. 12.



Les équations développées obtenues en combinant convenablement (1) et (2) contiennent n_1, n_2, m_1, m_2. Or on a actuellement des verres dont les indices moyens sont très voisins et les dispersions très différentes. Donc nous aurons une équation aux valeurs principales, qui sera souvent suffisante dans la pratique, en introduisant l'hypothèse $n_1 = n_2$. Les équations se simplifient beaucoup

---

tives), φ''_1, φ'_1; φ''_2, φ'_2; φ''_3, φ'_3 les distances focales des trois dioptres, Φ_1, Ψ_1 la distance focale du premier système de deux dioptres et l'abscisse de son plan principal par rapport au pôle du deuxième dioptre, Φ_2 la distance focale du système total, Ψ_2 l'abscisse de son plan principal par rapport au pôle du troisième dioptre, les formules qui relient ces quantités sont

$$\varphi''_1 = \frac{-n_1\gamma_1}{n_1 - 1}, \qquad \varphi''_2 = \frac{-n_2\gamma_2}{n_2 - n_1}, \qquad \varphi''_3 = \frac{\gamma_3}{n_2 - 1},$$

$$\varphi'_1 = \frac{\gamma_1}{n_1 - 1}, \qquad \varphi'_2 = \frac{n_1\gamma_2}{n_2 - n_1}, \qquad \varphi'_3 = \frac{-n_2\gamma_3}{n_2 - 1},$$

en posant $\tau_1 = -\Psi_1 + e_2$

$$\Phi_1 = \frac{\varphi''_2\varphi''_1}{\varphi''_1 - e_1 - \varphi'_2}, \qquad \Phi_2 = \frac{\Gamma_1\varphi''_3}{\Gamma_1 - \tau_1 - \varphi'_3},$$

$$\Psi_1 = -\frac{\varphi''_2 e_1}{\varphi''_1 - e_1 - \varphi'_2}, \qquad \Psi_2 = -\frac{\varphi''_3\tau_1}{\Gamma_1 - \tau_1 - \varphi'_3}$$

et deviennent

$$(3) \qquad m_1\gamma_3 e_1 - m_2 e_2[(n_1 - 1)(\gamma_3 - e_1 - e_2) - n_1\gamma_1] = 0,$$

$$(4) \qquad m_1\gamma_2(e_1 + e_2) + (m_2 - m_1)e_2[n\gamma_1 + (n-1)(e_1 - \gamma_2)] = 0.$$

Si nous nous donnons $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$ et $\frac{e_1+e_2}{\gamma_1}$, la première équation est linéaire en $\frac{e_1}{e_2}$ et la deuxième en γ_2. La solution est donc de la plus grande simplicité. Discutons maintenant la solution. Posons comme dans la discussion de l'aplanétisme

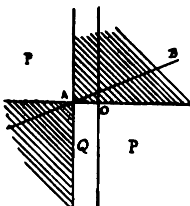
$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = y, \qquad \frac{e_1+e_2}{\gamma_1} = -1 + x + y,$$

l'équation (3) devient

$$\frac{e_1}{e_2} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{1+(n-1)x}{y};$$

$\frac{e_1}{e_2}$ est essentiellement positif, donc il n'y aura de solution admissible que dans la région du plan où y et $[1+(n-1)x]$ seront de signes contraires. Il n'y aura de solution que dans les régions non hachées de la *fig.* 13. Les régions hachées ne sont pas achromatisables.

Fig. 13.



Si nous renversions le sens de la lumière, il faudrait, pour avoir la relation, faire le changement, $(\gamma_1, -\gamma_3)$, (e_1, e_2), $(\gamma_2, -\gamma_2)$, (m_1, m_2) et inversement, ce qui donnerait

$$\frac{e_1}{e_2} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{1}{y-(n-1)x}.$$

Pour la compatibilité avec la relation (5) il faut que

$$\frac{1+(n-1)}{y} = \frac{1}{y-(n-1)x},$$

courbe qui se décompose en l'axe des y et la droite AB

$$y = (n - 1)x + 1.$$

La seule partie de ce système de droites qui soit dans la région achromatisable est la partie négative de l'axe des y. Donc cette droite sera le lieu des lentilles telles que, si on les achromatise d'un côté, elles le sont par le fait même de l'autre. Ce sont les lentilles biconvexes à surfaces homocentriques. Cette droite ne coupe pas la courbe d'aplanétisme focal. Nous ne réaliserons donc pour les points de cette courbe que l'achromatisme d'un seul côté.

Un de ces points détermine $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ et $\frac{e_1 + e_2}{\gamma_1}$; nous pourrons donc résoudre commodément (3) et (4).

L'application de ces formules montre que, pour la région supérieure de la courbe d'aplanétisme focal, la surface de séparation crown-flint serait extrêmement petite. Cela présenterait donc de grandes difficultés de construction, et ne permettrait d'admettre qu'un pinceau lumineux. Il en est de même des points de la même courbe située près de son asymptote à 45°. Mais pour les points situés sur la branche parabolique de la même courbe après le maximum, les solutions deviennent parfaitement admissibles, à partir du moment où $e = -15$ environ. Le troisième rayon de courbure est environ 60 fois plus grand que le premier, dans cette région.

Cette théorie de l'achromatisme, tout imparfaite qu'elle soit, nous permet donc d'employer les points aplanétiques des lentilles dans la construction du microscope. Peut-être des calculs plus complets permettront-ils un jour d'aborder la théorie des objectifs épais, qui présenteraient un sérieux avantage en admettant plus de lumière; mais je crois que, pour la construction de l'oculaire, il sera toujours inutile de la compliquer en allant plus loin que je ne viens de le faire : l'achromatisation d'un seul côté suffira toujours pour l'oculaire d'un instrument convenablement construit.

MESURES COMPARATIVES D'INDICES PAR LE PRISME ET LA RÉFLEXION TOTALE;

PAR M. H. DUFET.

Introduction.

La mesure des indices de réfraction par la réflexion totale présente, surtout dans le cas des corps biréfringents, de tels avantages, qu'elle tend à se substituer à la méthode du prisme. Elle permet en effet bien plus facilement que cette dernière, dans le cas des corps cristallisés, la détermination de l'orientation optique, et principalement si l'on fait usage de l'appareil de M. Pulfrich, la précision que l'on peut obtenir par les lectures paraît au moins égale à celle que peuvent donner les mesures les plus soignées par le prisme.

Une objection cependant persiste, formulée par divers physiciens et en particulier par M. Mascart dans son récent Traité d'Optique, c'est l'influence possible d'une modification par le polissage de la surface réfléchissante. Je ne crois pas que l'on ait fait d'expériences suivies pour répondre à cette objection. On a fait sans doute des mesures comparatives et pu montrer que les mesures d'indices d'un même corps par la réflexion totale ne diffèrent pas plus des mesures par le prisme que celles-ci ne diffèrent entre elles; il ressort déjà de ces recherches que l'effet du poli, s'il existe, doit être bien petit. J'ai cherché à instituer un système d'expériences me permettant de décider sur l'existence de cet effet et de déterminer, le cas échéant, la grandeur de l'erreur possible. Il fallait pour cela opérer concurremment par les deux méthodes sur le même échantillon, en demandant à chacune d'elles toute la précision dont elle est capable.

Pour le prisme, j'ai utilisé un goniomètre de Brunner donnant les 10 secondes et par estime les 5 secondes. Si cet appareil, bien réglé sur l'infini, donne exactement la mesure de la déviation minimum dans un prisme à faces bien planes et convenablement placé de manière à n'utiliser que la partie centrale des lentilles, il permet moins exactement de déterminer l'angle à l'aide du colli-

mateur, à cause du défaut d'aplanétisme des lentilles et de l'excentricité forcée du faisceau. Il y a longtemps que l'on emploie de préférence la réflexion sous incidence normale; mais cette méthode n'est possible qu'avec des faces assez grandes et bien réfléchissantes, et, en général, je n'ai pu l'employer. Sur les prismes dont je me suis servi, surtout pour les substances tendres, le poli n'était pas poussé à fond de manière à ne pas altérer la planité, et de plus les faces étaient en grande partie recouvertes de vernis noir mat, afin d'obtenir des images parfaites de la fente. Avec le grossissement assez fort de la lunette (21 fois) et une longueur focale de 29^{cm} pour le collimateur, n'observant aucun dépointement, j'étais assuré de n'avoir pas d'erreur sensible pour la collimation. Reste l'influence des défauts d'aplanétisme et d'achromatisme des lentilles. J'ai commencé par déterminer, avec le plus grand soin, comme je l'indiquerai tout à l'heure, l'indice ordinaire pour la raie D d'un prisme de quartz, qui m'a servi de type dans toutes mes mesures. Pour le sel gemme, l'alun, etc., les prismes, de même angle que le prisme de quartz (60°), étaient noircis partiellement de manière à donner des images parfaites, et l'indice déterminé à l'aide du collimateur. A ce prisme était alors substitué le prisme de quartz, noirci de la même manière, et occupant exactement la même position sur la plate-forme du goniomètre; la différence entre l'indice mesuré dans ces conditions pour le quartz, et l'indice admis d'après les recherches plus complètes, donnait un terme correctif pour l'indice mesuré de la substance. Je me suis assuré que dans ces conditions, en faisant varier notablement le tirage de la lunette et du collimateur ainsi que la place occupée par les prismes, on retrouve toujours après correction la même valeur pour l'indice cherché.

Pour la réflexion totale, j'ai toujours employé le réflectomètre de Pulfrich, avec le cylindre le moins réfringent. J'en ai déterminé l'indice de deux manières, à l'aide du prisme de quartz, et directement sur le prisme de comparaison fourni par le constructeur.

Il faut, bien entendu, tenir compte des variations de la température donnée par un thermomètre placé très près de la lame ou du prisme à étudier; le réservoir plongeait dans un petit tube plein de liquide, de manière à donner au thermomètre une vitesse de variation comparable à celle du prisme lui-même.

I. *Étude du prisme de quartz.* — Le prisme, à base équilatérale et poli sur ses trois faces, a ses arêtes bien parallèles ; les images passent toutes les trois dans le champ de la lunette à une distance du point de croisée inférieure à une minute. La somme des trois angles est donc rigoureusement égale à 180°. Il suffit dès lors de mesurer deux à deux les différences des trois angles.

La lunette était munie pour ces mesures d'un oculaire à fil mobile ; la tare de la vis micrométrique a été déterminée à plusieurs reprises et j'ai trouvé qu'une division du tambour correspondait à 2",895. Le prisme est placé exactement au centre de la plateforme, les faces étant noircies de manière à ne réserver que la partie centrale qui était parfaitement plane. La lunette est amenée successivement dans deux positions toujours les mêmes, distantes de 120°, et l'on mesure à l'aide du micromètre pour chacun des angles du prisme l'excès positif ou négatif de l'angle des rayons réfléchis sur l'angle des deux positions de la lunette. Ainsi, dans une expérience, en appelant α, β, γ les trois angles du prisme, ε l'erreur *constante* introduite par les défauts de collimation, d'aplanétisme, etc., je trouve

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 120^\circ + \varepsilon + 226'',4, \\ 2\beta &= 120 + \varepsilon + 102,2, \\ 2\gamma &= 120 + \varepsilon - 371,7, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de ce que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 60^\circ.\ 2'.\ 0'',4 \\ \beta &= 60.\ 0.58,3 \\ \gamma &= 59.57.\ 1,3 \end{aligned}\right\}\ \varepsilon = 14'',4.$$

Cette méthode est analogue à celle employée par M. Macé de Lépinay (¹).

On peut aussi, à l'aide du micromètre, mesurer les différences des déviations minima sur les trois angles et en déduire les différences des angles eux-mêmes, avec la valeur suffisamment connue de l'indice du quartz. J'ai trouvé ainsi dans une expérience

$$\begin{aligned} \alpha &= 60^\circ.\ 1'.56'',7, \\ \beta &= 60.\ 1.\ 1,5, \\ \gamma &= 59.57.\ 1,8. \end{aligned}$$

(¹) Macé de Lépinay, *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. VI, p. 190.

On mesure alors la déviation minimum, en centrant mieux le prisme, de manière que pour chaque angle le faisceau qui le traverse vienne de la partie centrale du collimateur et tombe sur la partie centrale de la lunette. Il n'y avait aucun changement à faire dans le tirage pour mettre au point la raie du sodium. J'ai ainsi pour la température de 18°C. :

Angles (moy. de 5 séries).	Déviation min. (moy. de 4 séries).	Indice ordinaire.	Moyenne.
$\alpha = 60°.\ 1'.58''$......	$41°.7'.28'',5$	1,544230	
$\beta = 60.\ 0.59$......	$41.6.28$	1,544244	1,544240
$\gamma = 59.57.\ 3$......	$41.2.\ 8$	1,544246	

J'arrive ainsi exactement au même nombre que M. Macé de Lépinay; il donne en effet, pour la température de 15°, 1,54425. D'après les mesures que j'ai faites, il y a quelques années, de la variation d'indice de quartz ([1]), l'indice ordinaire, par rapport à l'air à la même température que le quartz, diminue de 0,0000047 par degré entre 15° et 20°; on aurait à 20° :

1,544227 (Macé de Lépinay).
1,544231 (Dufet).

Je prends dans ce qui suit, pour l'indice du quartz, la valeur

$$n = 1,54423[1 - 0,0000047(t - 20)].$$

II. *Indice du cylindre.* — A la température de 15°, l'angle de réflexion totale pour le quartz a été trouvé égal à 28°7'0''. D'autre part, la position du zéro dans le limbe vertical de l'appareil de Pulfrich, par rapport à la surface supérieure du cylindre, a été déterminée par autocollimation, et trouvée égale à $-1°10''$. D'où pour l'angle de réflexion et l'indice du cylindre, les valeurs

$$i = 28°5'50'',$$
$$n = 1,614475.$$

L'indice du cylindre a été déterminé également à l'aide du prisme de comparaison; l'angle de ce prisme est 60°10'20'', valeur trouvée identique, soit par l'emploi de la réflexion normale, soit

([1]) *Journal de Physique*, 2e série, t. IV, p. 391; 1885.

par des pointés sur une mire distante de 4^{km} (paratonnerre de la tour Eiffel). La déviation pour le milieu de l'intervalle des raies $D_1 D_2$ est à 18°C. 47°53′31″,25, d'où l'indice 1,614492.

Cet indice varie sensiblement avec la température; j'ai pendant l'hiver transporté mon goniomètre avec le prisme réglé dans une salle non chauffée, et j'ai obtenu entre les températures de 15° et de 3° une différence de 50″ dans la double déviation. Malgré la petitesse de cette variation, on peut la regarder comme exacte à $\frac{1}{10}$ de sa valeur, puisque rien absolument n'avait été changé dans la position du prisme et des lunettes. On en déduit

$$\frac{dn}{dt} = +0,0000059,$$

valeur qui concorde avec les résultats donnés par M. Fizeau pour des flints d'indice analogue.

En ramenant avec cette valeur la mesure précédente d'indice à 15°, température des expériences sur le cylindre, on trouve le nombre identique

$$n_{15} = 1,614474.$$

Il est permis, en présence de cette concordance complète, de se servir du quartz dans les mesures de réflexion totale pour déterminer le zéro de l'appareil de Pulfrich; j'ai d'ailleurs montré (¹) qu'il n'y avait pas de différenee appréciable entre les indices des quartz limpides employés pour l'Optique. Soient alors φ l'incidence de réflexion totale calculée pour une température donnée, i l'incidence observée pour le quartz, n son indice, I l'incidence et N l'indice pour la substance à étudier, on aura évidemment, d'après la formule qui donne l'indice dans l'appareil Pulfrich

$$n^2 - N^2 = \sin(I - i)\sin(I - i + 2\varphi).$$

J'ai calculé les valeurs de φ pour les températures de 15° à 23° ce qui me donne la Table suivante :

(¹) *Bulletin de la Soc. de Minér.*, t. XIII, p. 271.

t.	φ.
15°	28°.5′.50″
16	5.58
17	6. 6
18	6.14
19	6.22
20	6.31
21	6.39
22	6.47
23	6.55

III. *Verres.* — D'après ce qui précède, la méthode du prisme et la réflexion totale me conduisent exactement au même résultat pour le quartz; il en est de même pour quelques verres que j'ai étudiés. Les mesures ont été faites à la température de 15°. Deux des prismes avaient les trois faces polies; les incidences observées, pour la réflexion totale, sont corrigées par l'emploi d'un quartz de comparaison.

	Indice par le prisme.		Réflexion totale.
A. Flint léger	1,558349 1,558369 1,558365	Moy. 1,55836	1,55836
B. Crown	1,528901 1,528887 1,528872	Moy. 1,52889	1,52891
C. Crown léger	1,51575		1,51572

IV. *Spath d'Islande.* — Ce corps mériterait une étude approfondie; j'ai dû me borner dans ce travail à l'indice extraordinaire que je pouvais seul atteindre avec le cylindre dont je me servais. L'appareil de M. Pulfrich permet d'ailleurs très simplement de le mesurer sur une plaque quelconque, en prenant le maximum de l'angle de réflexion totale; en faisant les mesures dans une étendue d'une dizaine de degrés aux environs du maximum, on peut le déterminer graphiquement par une courbe à grande échelle, qui permet d'utiliser toutes les observations.

J'ai ramené toutes les observations à la température de 20° au moyen du coefficient donné par M. Fizeau [1], et que M. Offret a

[1] FIZEAU, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3e série, t. LXVI, p. 429.

retrouvé identique (¹), qui, pour l'air chaud, est $\frac{dn}{dt} = +0,000012$.

Le poli ne paraît pas modifier la surface, au moins quand l'on se sert de potée d'étain, qui donne au polissage des faces plus planes que le rouge d'Angleterre. J'ai comparé une lame de clivage parfaitement plane aux deux faces d'une lame détachée du même fragment, polies l'une à la potée d'étain, l'autre au rouge.

Je trouve :

Clivage.	Potée.	Rouge.
1,48645	1,48645	»
1,48645	1,48645	1,48650
1,48646	1,48646	»
1,48647	»	1,48648
1,48646	»	»

Avec d'autres lames polies :

Parallèle à l'axe.................	1,48647
Presque normale à l'axe.........	1,48649
Parallèle au clivage I............	1,48646
» » II....... ...	1,48644

Ces nombres paraissent donc sensiblement constants; il me paraît d'ailleurs peu vraisemblable que l'indice varie d'un échantillon à l'autre, étant donné que tout le spath utilisé pour l'Optique provient du même gisement. Les divergences assez notables que l'on trouve entre les résultats des divers expérimentateurs doivent tenir aux erreurs d'expérience, si difficiles à éviter avec une substance comme le spath. Les nombres que j'obtiens se rapprochent beaucoup du nombre obtenu par M. Carvallo (²) dans des mesures très soignées. Il donne, pour 22°, 1,48653 (mesuré), et 1,48650 (calculé d'après toutes les observations). Ce chiffre donnerait, à 20°, 1,486476.

V. *Sel gemme.* — Si les propriétés de la surface ne paraissent pas altérées d'une manière appréciable dans les substances dures comme le verre, et dans le spath, il n'en est plus de même dans

(¹) Offret, *Bull. de la Soc. de Minér.*, t. XIII, p. 520.

(²) *Ann. scientif. de l'École Norm. sup.*, t. VII. Supplément, p. 3 et suiv.

des corps plus tendres. Je rapporterai d'abord mes mesures sur le sel gemme, qui ont été les plus complètes.

J'ai opéré sur du sel gemme parfaitement limpide, sans inclusions visibles, qui provient de la mine de Saint-Pandelon (Landes).

Pour l'indice de réfraction, j'ai suivi la marche indiquée plus haut, en ramenant les résultats à la température de 18°; j'ai admis pour cela la valeur de $\frac{dn}{dt}$ donnée par Stefan (¹) $\left[\frac{dn}{dt} = -0,0000373\right]$, ce qui suffit, vu la petitesse des corrections.

Température.	Quartz de comparaison mesuré.	calculé.	Correction.	Sel gemme. mesuré.	corrigé.	ramené à 18°.	Différence.
20°,0.	1,544138	1,544230	+ 9,8	1,544150	1,544242	1,544316	— 1,7
20,5.	1,544220	1,544228	+ 0,8	1,544220	1,544228	1,544321	— 1,2
17,8.	1,544290	1,544240	+ 5,0	1,544417	1,544367	1,544360	+ 2,7
17,0.	»	»	+ 5,0	1,544446	1,544396	1,544359	+ 2,6
16,5.	1,544300	1,544246	— 5,4	1,544440	1,544386	1,544331	— 0,2
17,2.	»	»	— 5,4	1,544423	1,544369	1,544339	+ 0,6
15,0.	»	»	— 5,4	1,544478	1,544424	1,544312	— 2,1
16,5.	1,544221	1,544246	+ 2,5	1,544354	1,544379	1,544324	— 0,9

La moyenne générale est

$$n = 1,544333.$$

La colonne marquée *Différence* donne l'écart entre chaque mesure et la moyenne, en unités du cinquième ordre. En présence de la difficulté de connaître très exactement la température du prisme, on trouvera sans doute la concordance très satisfaisante.

Pour la méthode de la réflexion totale, surtout dans l'appareil de Pulfrich où le grossissement et, par suite, la précision sont relativement considérables, il faut avoir des plaques parfaitement planes et bien polies. Ces conditions sont difficiles à réaliser avec des plaques de clivage, quelque homogène que paraisse la substance; je suis cependant arrivé avec quelque peine à obtenir deux plaques de clivage donnant des images parfaites. Les résultats concordent avec ceux du prisme; j'ai obtenu dans trois séries de lectures :

(¹) STEFAN, *Wien. Sit.-Berich.*, t. LXIII, II, p. 239.

Température.	i — I.	N.	N à 18°.
18°	1°.19'	1,544342	1,544342
18	1.24	1,545348	1,544348
17,5	1.35	1,544365	1,544346

La différence avec la méthode du prisme, environ une unité du cinquième ordre décimal, rentre absolument dans les erreurs d'expérience, les conditions dans lesquelles on mesure la température dans les deux cas n'étant pas identiques, malgré l'emploi du même thermomètre.

Si, au lieu d'employer des plaques de clivage, on emploie des plaques polies, l'indice trouvé par réflexion totale est toujours un peu plus fort que par le prisme. Le meilleur mode de polissage consiste à frotter le cristal sur une plaque de verre dépoli à grains très fins et bien plane, après l'avoir légèrement humectée avec l'haleine; la dissolution concentrée se dessèche et, en continuant à frotter sur le sel ainsi déposé, on arrive à avoir des plaques tout à fait planes et d'un beau poli. Il faut à la fin de l'opération frotter assez énergiquement, et c'est sans doute à ce moment que la surface s'altère; l'effet est moins marqué sur des plaques doucies avec précaution et polies soit avec du tripoli très fin, soit avec du carbonate de chaux précipité, étalé sur une étoffe de soie bien tendue sur une lame de verre. Ce dernier procédé donne cependant des faces moins planes.

Voici le Tableau d'un certain nombre de mesures, faites le plus souvent avec les faces mêmes de mes prismes. Les mesures marquées * portent sur des plaques polies légèrement au tripoli ou à la craie.

Plaques parallèles au clivage [Face p (100)].

Température.	i — I.	N.	N à 18° C.	Δ.
*16°.....	2°.20'	1,544431	1,544367	+ 3,4 × 10^{-5}
*19.....	1.15	1,544332	1,544369	+ 3,6
19.....	1.35	1,544358	1,554395	+ 6,2
18.....	2. 7,5	1,544401	1,544401	+ 6,8
19.....	1.55	1,544385	1,544422	+ 8,9
19.....	2. 0	1,544391	1,544428	+ 9,5
18.....	2.45	1,544453	1,544453	+ 12,0
19.....	2.20	1,544417	1,544454	+ 12,1
19.....	2.39	1,544442	1,544479	+ 14,6
17.....	3.39	1,544529	1,544492	+ 15,9

Plaques parallèles à b^1 (110).

Température.	$i-$ I.	N.	N à 18°C.	Δ.
*15°.....	3'.35"	1,544534	1,544422	+ 8,9
18.....	2.35	1,544440	1,544440	+ 10,7
19.....	2.20	1,544417	1,544454	+ 12,1
19.....	2.36	1,544438	1,444475	+ 14,2
19.....	2.46	1,544451	1,544488	+ 15,5
18.....	3.28	1,544509	1,544509	+ 17,6
17,8...	3.45	1,544532	1,544525	+ 19,2
18.....	4. 2	1,544554	1,544554	+ 22,1

Plaques parallèles à a^1 (111).

19,8...	2. 0	1,544387	1,544444	+ 11,1
19.....	2.14	1,544409	1,544446	+ 11,3
19,5. .	2.22	1,544417	1,544472	+ 13,9
19.....	2.40	1,544443	1,444480	+ 14,7

On voit par les résultats inscrits dans ce Tableau que les différences avec la valeur trouvée par le prisme, sur des échantillons identiques, est toujours positive; l'erreur sur chaque pointé, sel gemme et quartz de comparaison, ne dépasse pas 10″, chaque valeur étant la moyenne d'un certain nombre de lectures (6 ou 8); il en résulte pour Δ une erreur qui peut atteindre deux à trois unités, qui par suite est inférieure aux valeurs trouvées. Il paraît donc bien y avoir une augmentation de l'indice, plus sensible pour les plaques b^1 que pour les plaques p, ce qui est en rapport avec la différence marquée des coefficients d'élasticité du sel gemme suivant différentes directions.

Cette différence entre les faces b^1 et p peut se constater directement, à l'aide de prismes dont les faces sont taillées parallèlement à ces plans. Le prisme étant posé sur le cylindre du réflectomètre, on fait une série de mesures alternées sur les deux faces. Les causes d'erreur accidentelles, telles que température, centrage, etc., sont éliminées; je trouve ainsi pour différence d'indice entre b^1 et p.

Poli au tripoli.	Moyenne.	Poli sur verre.	Moyenne.
$10^{-5}\times$ + 5,1		+ 6,8	
+ 5,2		+ 8,8	
+ 6,7	5,5	+ 6,7	6,6
+ 4,7		+ 4,6	
+ 5,5		+ 6,2	
+ 5,7			

Au contraire, deux faces *p* sur un même prisme ne donnent qu'une différence s'élevant au maximum à $2,6 \times 10^{-5}$.

VI. *Sylvine.* — La sylvine m'a donné des résultats analogues à ceux du sel gemme. Un prisme taillé dans un cristal de Stassfurt m'a donné :

t.	*n.*
22°,5	1,490190
23°	1,470185

La correction calculée à l'aide d'une mesure sur le quartz de comparaison atteint seulement $10^{-5} \times 1,1$. Avec la valeur — 0,0000346 donnée pour $\frac{dn}{dt}$ par M. Stefan, j'obtiens à 20° :

$$\left.\begin{matrix} 1,490288 \\ 1,490300 \end{matrix}\right\} \text{Moyenne } 1,490294.$$

Je n'ai pu obtenir, avec mon prisme, de lames de clivage suffisamment planes pour donner de bonnes limites au réflectomètre. Les mesures faites sur les faces du prisme m'ont conduit, comme pour le sel gemme, à des valeurs plus élevées que la méthode du prisme, avec des différences de même ordre, et variables avec la manière dont s'effectuait le polissage.

Températures.	N.	N à 20°.	Δ.
23°,5 (1)	1,490245	1,490366	$+ 7,2 \times 10^{-5}$
18,0	1,490446	1,490367	+ 7,3
19,0	1,490406	1,490371	+ 7,7
23,5	1,490274	1,490395	+ 10,1
19,5	1,490464	1,490447	+ 15,3
23,0	1,470361	1,490465	+ 17,1

VII. *Gypse.* — J'ai déterminé l'indice moyen par réflexion totale sur une lame de clivage qui m'avait servi dans mon étude sur les *Constantes optiques du gypse de Montmartre* (2). J'avais, dans ce Mémoire, donné pour l'indice moyen la valeur 1,52260 à 19°C., en l'estimant approchée à ± 2 unités du cinquième ordre décimal.

(1) Poli très doux au tripoli.
(2) *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 292; 1888.

Les mesures par réflexion totale sont complètement d'accord avec ce nombre; je les ai ramenées à 19° à l'aide du coefficient de variation que j'ai donné, $\frac{dn}{dt} = -0,0000414$ (pour l'air chaud).

Températures.	N.	N à 19°.	Moyenne.
17°,5......	1,522689	1,522627	
18,0......	1,522652	1,522611	
23,0......	1,522450	1,522616	1,52262
23,5......	1,522440	1,522627	
23,5......	1,522437	1,522624	

Étant données la variation considérable de l'indice par la température et la difficulté de l'apprécier avec rigueur, on peut regarder cette concordance comme complète.

Pour avoir des lames polies appartenant au même fragment, j'ai utilisé les faces d'un des prismes qui m'avaient servi dans les recherches précitées. Les faces sont normales au plan du clivage facile; l'une est perpendiculaire, pour la température ordinaire, à la bissectrice aiguë, les deux autres sensiblement normales aux axes optiques. Je n'ai pu observer que sur l'une de ces dernières. Par des observations alternées avec la lame de clivage, je trouve :

	$i - I$.	Δ_n.
Face normale à la bissectrice....	1'.35"	$+ 13,7 \times 10^{-5}$
	1.40	+ 14,4
	1.55	+ 15,9
Face normale à l'axe.............	0.55	+ 7,9
	1.25	+ 12,3

Le gypse paraît donc se comporter comme le sel gemme et la sylvine; il ne semble pas d'ailleurs que la biréfringence soit altérée sensiblement. A la température de 23°,5, j'ai obtenu sur la face perpendiculaire à la bissectrice aiguë, pour la différence entre les indices maximum et moyen, 0,007088. Ce nombre concorde absolument avec celui que j'ai trouvé autrefois, 0,00702 à 19°C., ce qui, à 23°,5, donne 0,007094.

VIII. *Alun.* — Dans un gros cristal d'alun de potasse parfaitement limpide, j'ai taillé un prisme de 60° environ dont les faces m'ont également servi pour les mesures de réflexion totale. J'ai

pris, pour ramener toutes les mesures à la même température de 20°, le coefficient donné par Stefan :

$$\frac{dn}{dt} = -0,0000134.$$

Dans trois séries de mesures où les faces avaient été chaque fois refaites, j'ai obtenu :

Températures.	N.	N à 20°.	Moyenne.
20°,0..........	1,456217	1,456217	
21,5..........	1,456203	1,456223	1,456220
23,4..........	1,456173	1,456219	

Les deux premiers nombres ont subi une petite correction déterminée, comme je l'ai dit plus haut, avec le prisme de quartz ; cette correction vaut $-0,5 \times 10^{-5}$ pour le premier, $+1,3 \times 10^{-5}$ pour le second, et m'a paru sensiblement nulle pour le troisième.

Par réflexion totale, on trouve encore quelques différences d'après le mode de polissage employé, mais elles sont moindres que dans les corps précédents. En polissant la lame doucie avec du tripoli très fin ou du rouge d'Angleterre, on retrouve le même nombre qu'avec le prisme ; l'indice s'élève un peu quand on polit le sel sur une lame de verre, ainsi que je l'ai indiqué plus haut, à propos du sel gemme et d'autant que le frottement exercé à la fin de l'opération a été plus énergique. C'est le cas des deux observations marquées d'un (*) dans le Tableau suivant. La colonne Δ donne, comme dans les Tableaux précédents, la différence avec la moyenne donnée par le prisme.

Mode de polissage.	Températures.	I — *i*.	N.	N à 20°.	Δ.
Rouge	23°,5	16°.5'.55"	1,456155	1,456202	$-1,8 \times 10^{-5}$
Tripoli...	21,5	16.5.35	1,456205	1,456225	+ 0,5
» ...	23,0	16.5.40	1,456182	1,456222	+ 0,2
Verre....	21,5	16.5.50	1,456253	1,456273	+ 5,3
»	20,5	16.5.00	1,456267	1,456274	+ 5,4
»	23,0	16.5.00	1,456249	1,456289	+ 6,9
*»	19,0	16.4.25	1,456337	1,456324	+ 10,4
*»	21,5	16.4.25	1,456322	1,456342	+ 12,2

Conclusions. — Dans les observations qui précèdent, j'ai donné les indices avec six décimales, mais il est évident que la

dernière ne compte guère que pour montrer si l'on doit forcer ou non la cinquième. Les écarts, cependant, entre les deux méthodes ne me paraissent pas douteux, et mes nombres peuvent au moins donner une idée approchée de leur valeur. Elle est, comme on le voit, toujours petite, parfois nulle, même dans des substances tendres.

Au point de vue pratique, je crois avoir démontré que l'on peut se servir en général avec toute sécurité de la méthode de la réflexion totale, quand on emploie les appareils ordinaires, qui permettent à peine d'atteindre à la quatrième décimale. Il sera bon, avec des appareils plus précis, comme celui de M. Pulfrich, de prendre quelques précautions et de n'employer que les modes de polissage qui risquent le moins de comprimer les surfaces.

Quant à la cause de ces phénomènes, il me paraît difficile de l'attribuer à une altération toute superficielle; l'effet d'altérations de ce genre se fait sentir dans d'autres cas, par exemple dans la détermination de l'angle de polarisation. On sait, par de nombreux travaux, l'influence considérable qu'a sur cet angle le mode de polissage employé et les traces de matière étrangère qui restent adhérentes à la surface; si l'on voulait conclure des variations de cet angle à des variations correspondantes pour l'indice, on en trouverait de beaucoup plus grandes que celles que j'ai constatées. Il semblerait donc résulter de cette contradiction apparente que les deux phénomènes ne sont pas dus à la même cause et qu'en particulier l'épaisseur de la couche dans laquelle se produisent les phénomènes de réflexion totale est plus considérable que celle où se produit la séparation des vibrations réfléchies et transmises.

J'ajouterai que les causes modifiantes sont très différentes dans les deux cas. Le polissage sur la substance elle-même, comme cela se produit, somme toute, dans le polissage que j'emploie avec un verre dépoli, détermine dans les phénomènes que j'ai étudiés la variation maximum, tandis qu'au contraire c'est celui qui a la plus faible action sur l'angle de polarisation. On comprend bien, d'ailleurs, qu'à une déformation homogène qui produirait une variation de densité répondant à une variation sensible d'indice pourrait ne correspondre qu'une variation tout à fait insensible de l'angle de polarisation. Par exemple, avec un corps d'indice 1,5

et de densité 2,5, à une variation de la densité égale à 0,001, correspondraient une variation d'indice de 0,0002, supérieure à la plupart de celles que j'ai observées, et une variation de 15″ dans l'angle de polarisation complète.

Je pense que dans mes expériences la compression résultant du polissage produit une variation non homogène, plus ou moins analogue à l'écrouissage des métaux, s'étendant à une profondeur très faible en valeur absolue, qui n'aurait pas besoin de dépasser quelques millièmes de millimètre, mais qui constituerait un phénomène différent des altérations purement superficielles. La grandeur des variations d'indice observées, la manière dont elles se produisent et surtout leur sens me paraissent d'accord avec cette hypothèse.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY;

T. XLIX; décembre 1890 à mai 1891.

S.-U. PICKERING. — Détermination de la chaleur spécifique et de la chaleur de fusion de quelques substances pour éprouver l'exactitude du zéro absolu de Person, p. 11.

Person a montré en 1847 [1] que la chaleur de fusion d'un corps doit diminuer à mesure que la température s'abaisse, l'abaissement par degré étant égal à la différence entre les chaleurs spécifiques du corps à l'état liquide et à l'état solide. Il en résulte qu'il doit exister une température pour laquelle la chaleur de fusion est nulle; cette température est donnée par la formule $\theta = t - \frac{l}{C - c}$, dans laquelle t désigne la température de fusion de la substance, l sa chaleur de fusion à t°, C sa chaleur spécifique à l'état liquide, c sa chaleur spécifique à l'état solide. A cette température, un liquide ne pourrait se solidifier puisqu'il n'y aurait aucune différence entre la substance à l'état liquide et à l'état solide. Person en conclut qu'à cette température la substance ne contiendrait aucune chaleur; cette température serait le zéro absolu. D'après ses recherches, cette température serait en

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, [3], t. XXI, p. 315.

outre la même pour toutes les substances et sensiblement égale à — 160° C.

M. Pickering préfère donner à cette température le nom de *température de non-cristallisation*. Il a étudié l'acide sulfurique, l'acide sulfurique monohydraté, l'azotate de calcium tétrahydraté, la benzine et la naphtaline et a déterminé directement, pour ces différentes substances, les quantités C, *c* et *l* à une même température, la température *t* de fusion. La Table suivante indique les valeurs de $t - \frac{l}{C - c}$ déterminées par plusieurs séries d'observations :

Acide sulfurique	— 369° ± 47
Acide sulfurique monohydraté	— 177 ± 2
Azotate de calcium tétrahydraté	— 234 ± 9
Naphtaline	— 214 ± 50

Dans le cas de la benzine, C — *c* est une quantité négative.

Il résulte de ces déterminations que la *température de non-cristallisation* ne peut être regardée comme une constante pour tous les corps.

M. et Mme HUGGINS. — Recherches sur les étoiles à raies brillantes de Wolf et Rayet dans la constellation du Cygne, p. 33.

Les auteurs ont observé les spectres des trois étoiles :

4001	B. D. + 35°
4013	B. D. + 35
3956	B. D. + 36

dans lesquels MM. Wolf et Rayet [1] ont découvert des raies brillantes au milieu d'un spectre continu et celui d'une étoile : D. M. + 37°, n° 3821, découverte en 1884 par le Dr Copeland [2], et dont le spectre est semblable à celui des étoiles de Wolf et Rayet.

Pour l'étoile 4001, ils ont constaté que la bande brillante de la

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 292; 1867.

(2) *Monthly Notices R. A. S.*, t. XLV, p. 91; 1884.

partie bleue du spectre va de λ 465,5 à λ 471,5; la partie la plus brillante de la bande va de λ 468 à λ 469, et l'éclat diminue très rapidement à partir de cette longueur d'onde.

La bande de l'étoile **4013** se compose de deux parties : l'une très brillante qui va de λ 464 à λ 466, et dont le maximum d'éclat coïncide sensiblement avec λ 465; l'autre, très pâle, de λ 468,5 à λ 470,5, ayant un maximum d'intensité à son extrémité la plus réfrangible où elle se termine brusquement.

La bande de l'étoile **3956** a son maximum d'éclat vers λ 464,5. Il y a également une bande secondaire d'éclat beaucoup plus faible que dans le cas de l'étoile **4013**.

La bande bleue brillante du spectre de l'étoile du Dr Copeland va de λ 467 à λ 470,5. Elle ne semble pas s'étendre vers le rouge tout à fait aussi loin que celle de l'étoile **4001**. Il y a aussi une faible bande entre λ 464 et λ 467.

En examinant à nouveau le spectre de l'étoile **4001**, les auteurs virent une faible bande brillante à la même place que pour l'étoile du Dr Copeland, c'est-à-dire dans la partie la plus réfrangible de la bande bleue des étoiles **4013** et **3956**.

Ils arrivent à cette conclusion que la bande bleue brillante des quatre étoiles qu'ils ont observées ne coïncide pas avec la bande bleue de la flamme de la lampe Bunsen.

H.-L. CALLENDAR et E.-H. GRIFFITHS. — Détermination du point d'ébullition du soufre et méthode d'étalonnage des thermomètres de platine à résistance électrique, p. 56.

Les expériences de divers physiciens ont montré que les thermomètres à résistance électrique fournissent la méthode la plus commode et la plus exacte pour mesurer les températures entre des limites très éloignées.

M. Callendar a établi dans une précédente Communication (1). que si t désigne la température donnée par le thermomètre à air. p_t la température donnée par le thermomètre de platine à résistance électrique, la différence entre ces deux indications peut

(1) *Philosophical Transactions*, A, p. 161; 1887.

être représentée, entre 0° et 700°, par la formule

$$t - p_t = \delta\left[\left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100}\right],$$

δ ayant, pour un fil particulier, la valeur 1,570.

Les auteurs se sont proposé de déterminer cette constante, pour un thermomètre particulier, au moyen d'une observation unique effectuée à une température fixe déterminée autre que 0° et 100°. Ils ont choisi le point d'ébullition du soufre qu'ils ont déterminé avec beaucoup de soin; ils ont en outre décrit la méthode et les appareils qui leur ont paru les plus propres à comparer les thermomètres de platine avec le thermomètre à air.

Ils ont trouvé que la température de la vapeur saturée de soufre bouillant librement sous une pression de 760^{mm} de mercure ramenée à 0° C. et déterminée par le thermomètre à air à pression constante normale est de 444°,53, l'intensité de la pesanteur étant de 980,61 C. G. S. au niveau de la mer et à la latitude de 45°. Cette température est inférieure de près de 4° à celle qui a été trouvée par Regnault (1); les auteurs croient cependant qu'elle est exacte à 0°,1 C. près, et que l'on peut en toute sécurité s'en servir pour étalonner les thermomètres de platine par la méthode indiquée.

A.-B. BASSET. — Réflexion et réfraction de la lumière à la surface d'un milieu aimanté, p. 76.

Le Dr Kerr (2) a observé certaines particularités dans un rayon de lumière polarisée réfléchi par la surface polie d'un électro-aimant. Ces particularités disparaissaient lorsque le courant était interrompu et devenaient inverses lorsque la direction du courant d'aimantation était renversée.

Les résultats obtenus étaient complexes; ils étaient troublés par l'influence de la réflexion métallique. Or, il existe plusieurs substances non métalliques, comme les solutions concentrées de certains composés du fer, qui sont capables, lorsqu'elles sont ai-

(1) *Mémoires de l'Institut*, t. XXVI, p. 526.
(2) *Philosophical Magazine*, mai 1877 et mars 1878.

mantées, de produire un effet sur la lumière; l'explication théorique de l'action magnétique de ces substances est exempte des difficultés qui proviennent de la réflexion métallique.

M. Basset expose une théorie applicable aux milieux de cette espèce, et il compare les résultats obtenus avec ceux des expériences de Kerr.

Il trouve que, conformément aux expériences de Kerr :

1° La lumière réfléchie est polarisée elliptiquement;

2° Lorsque l'aimantation est parallèle à la surface réfléchissante, aucun effet n'est produit dans le cas de l'incidence normale ou quand le plan d'incidence est perpendiculaire à la direction de l'aimantation;

3° Lorsque le plan d'incidence est parallèle à la direction de l'aimantation et la lumière polarisée dans le plan d'incidence, le terme magnétique augmente à partir de l'incidence rasante, passe par un maximum et diminue ensuite jusqu'à l'incidence normale.

M. Basset trouve que, contrairement à l'expérience, l'intensité de la lumière réfléchie ne change pas quand on renverse le sens du courant d'aimantation.

E. MATTHEY. — Sur la métallurgie du bismuth, p. 78.

Le bismuth renferme fréquemment de petites quantités de cuivre et la présence de ce dernier élément, même dans de très faibles proportions, est toujours nuisible.

Jusqu'à présent, on n'avait pu éliminer le cuivre que par voie humide, procédé coûteux et fort long en pratique. Il était de la plus haute importance de trouver une méthode par voie sèche, qui permît de traiter rapidement le bismuth cuprifère et d'effectuer la séparation dans des conditions avantageuses au point de vue commercial.

M. E. Matthey avait décrit, en 1887 ([1]), une méthode qui permettait de séparer le cuivre du bismuth par fusion avec le sulfure de bismuth. Cette méthode nécessitait l'emploi d'une température

---

([1]) *Proceedings of the Royal Society*, t. XLIII, p. 172; 1887.

assez élevée pour produire la fusion complète du sulfure de bismuth, ce qui occasionnait, à moins de prendre de très minutieuses précautions, une grande perte de bismuth par volatilisation.

Dans la méthode proposée actuellement par M. Matthey, on fond l'alliage et, à une température un peu supérieure à son point de fusion, on ajoute une faible proportion de monosulfure de sodium. La masse est alors soigneusement remuée de manière à amener chaque portion de l'alliage en contact avec le sulfure fondu.

Si, après une heure environ d'agitation, on analyse un échantillon de l'alliage fondu, on trouve que la quantité de cuivre a considérablement diminué.

En enlevant la pellicule de scories qui s'élève à la surface, ajoutant de nouveau une faible proportion de monosulfure de sodium et continuant à agiter, on arrive à éliminer toute trace de cuivre.

T. ANDREWS. — Passivité du fer et de l'acier, 2e Partie, p. 120.

Dans la première Partie de ce Mémoire (1), l'auteur a montré l'influence de l'aimantation sur la passivité du fer et de l'acier. Dans le Mémoire actuel, il étudie l'effet de température et l'influence de la concentration de l'acide nitrique.

Les expériences ont montré que le fer forgé est moins passif dans l'acide nitrique chaud, de densité 1,42, que l'acier doux fondu. Le fer et l'acier ne perdent pas complètement leur passivité, même à 175°F. Le passage de l'état passif à l'état actif a lieu à une température qui, d'après des expériences antérieures, est égale à 195°F.

Le fer forgé est moins passif dans l'acide nitrique faible que la plupart des aciers essayés; la passivité de l'acier Bessemer est la même que celle du fer forgé.

(1) *Proceedings of the Royal Society*, t. XLVIII, p. 116. *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 295.

A. WRIGHT et C. THOMPSON. — Sur certains alliages ternaires (3e partie). Alliages de bismuth, de zinc et d'antimoine; alliages de bismuth, de zinc et d'argent, p. 156.

A. WRIGHT, C. THOMPSON et J.-T. LÉON. — Sur certains alliages ternaires (4e partie). Méthode (suggérée par M. Stokes) de représentation graphique de la manière dont certains alliages de trois métaux fondus ensemble se séparent d'eux-mêmes en deux alliages ternaires, avec les expériences ultérieures qu'elle a inspirées, p. 174.

Dans la première Partie du Mémoire actuel, les auteurs ont étendu leurs recherches antérieures sur les alliages de bismuth. Ils ont d'abord déterminé la solubilité du zinc dans le bismuth et celle du bismuth dans le zinc, et trouvé qu'aux températures moyennes de 650°, 750° et 800°, la première était de 14,2, 15,8 et 15,83 pour 100; la seconde de 2,32, 2,47 et 2,52 pour 100.

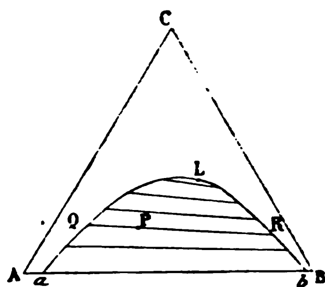
La présence de l'étain augmente ces deux solubilités. Les alliages ternaires : zinc, étain, bismuth, se comportent autrement que les alliages : plomb, zinc et étain, précédemment étudiés; dans les deux alliages en lesquels se sépare le mélange, le plus léger contient toujours moins d'étain que le plus lourd. L'alliage : bismuth, zinc et argent donne lieu, comme l'alliage : plomb, zinc et étain à la formation des deux alliages : $AgZn^5$ et Ag^4Zn^5.

Dans la deuxième Partie du Mémoire, M. G. Stokes décrit la manière suivante de représenter les résultats de l'observation :

Imaginons que des poids égaux aux quantités relatives des trois métaux A, B, C qui forment le mélange primitif soient appliqués aux sommets d'un triangle équilatéral. La résultante de ces poids est appliquée en un point P situé à l'intérieur du triangle. A chaque proportion différente de A, B, C (les lettres désignant des poids), correspondra une position différente du point P qui pourra représenter la composition d'un alliage réel ou virtuel formé par les trois métaux. Si l'on considère l'un des métaux, C par exemple, comme pouvant dissoudre en toutes proportions les deux autres A et B, il ne peut y avoir qu'un seul alliage homogène lorsque la quantité de C ne s'abaisse pas au-dessous d'une certaine valeur. Dans les autres cas, l'alliage se sépare en deux autres qui, analysés, seront représentés sur le diagramme par les deux points Q et R. La droite QR devra, par construction, passer par le point P qui représente un alliage idéal des trois métaux.

En répétant la même construction pour des proportions différentes des trois métaux, les points Q, R seront situés sur une courbe *a*QLR*b* coupant AB en deux points *a*, *b* représentant : le premier une solution saturée de B dans A, le second une solution saturée de A dans B. M. Stokes appelle cette courbe la *courbe critique* et les points Q et R des *points conjugués*. La courbe critique et les lignes QR représentent le résultat complet des expériences.

Fig. 1.



A l'intérieur de la courbe critique, on n'obtient qu'un seul alliage homogène, à l'extérieur un mélange de deux alliages.

Les recherches faites avec le plomb, le zinc et l'étain n'ont donné que des points Q, R non exactement situés sur la courbe critique; les points obtenus sont appelés *points associés*, pour les distinguer des points conjugués.

Les auteurs ont trouvé qu'il existe une série de mélanges qui donnent, par la séparation, le même alliage lourd mais des alliages légers différents; résultat que M. Stokes croit pouvoir expliquer par le mélange imparfait des métaux primitifs et la difficulté de mélanger ces derniers lorsqu'ils sont fondus.

Les recherches des auteurs sur les mélanges de chloroforme, d'eau et d'acide acétique qui présentent les mêmes particularités, donnèrent des résultats analogues.

Nous renvoyons au Mémoire original pour les nombres et les figures explicatives. RENÉ PAILLOT.

SUR LA MESURE OPTIQUE DES TEMPÉRATURES ÉLEVÉES;

PAR M. H. LE CHATELIER.

Un procédé de mesure qui permettrait de déterminer les températures élevées d'une façon à la fois simple et précise serait pour certaines industries d'une utilité incontestable. Dans la trempe de l'acier, la cuisson de la porcelaine, la fabrication du chlore par le procédé Deacon, un écart de température de 20° seulement suffit pour occasionner des insuccès complets. Aussi depuis que j'ai indiqué dans quelles conditions les couples thermo-électriques, dont l'emploi avait été proposé en 1826 par Becquerel, mais n'avait pas donné jusqu'ici des résultats satisfaisants, pouvaient servir à mesurer avec précision les températures élevées, l'usage de ces pyromètres électriques s'est rapidement répandu dans l'industrie. On ne peut méconnaître cependant que des instruments délicats comme le sont nécessairement les appareils électriques ne conviennent guère pour être mis en main des ouvriers.

J'ai été sollicité de différents côtés de reprendre cette question en me plaçant plus spécialement au point de vue des besoins industriels; telle est l'origine des nouvelles recherches que j'ai entreprises sur la Pyrométrie.

Une revision rapide des divers procédés qui peuvent servir à la mesure des températures élevées montre immédiatement que les procédés optiques seuls peuvent donner une solution satisfaisante du problème au point de vue industriel. Ils dispensent en effet de l'emploi de corps thermométriques spéciaux dont aucun ne peut résister longtemps aux températures élevées réalisées dans certains foyers. Ils n'exigent pas, entre le four et l'opérateur de connexion matérielle toujours difficile à établir dans une usine où les ouvriers et les appareils circulent en tous sens, parfois avec une grande rapidité.

L'intensité des radiations lumineuses émises par les corps incandescents croît avec la température, leur *éclat* augmente. Cette intensité croît inégalement pour les radiations de longueurs d'ordres différents; la *nuance* des corps varie donc aussi avec la température. On peut, des mesures d'éclat ou des mesures de

nuance, chercher à déduire une estimation de la température.

Pouillet, en 1836, a dressé une Table des températures correspondant à ces différents éclats et à ces différentes nuances qu'il appréciait à la vue simple. Cette Table, aussi exacte qu'elle peut l'être avec un procédé aussi rudimentaire de mesures optiques, est encore en usage aujourd'hui.

Ed. Becquerel, en 1864, à la suite de ses recherches sur l'irradiation des corps incandescents, a énoncé la possibilité de se faire une idée des températures élevées au moyen de mesures photométriques de l'intensité lumineuse des radiations rouges émises par les corps incandescents. Il a cherché à faire l'application de cette méthode à la détermination du point de fusion du palladium et du platine, de la température de la chaux exposée à la flamme du mélange oxhydrique et de la température du charbon de l'arc voltaïque. Mais cette tentative n'a pas abouti, en raison de l'insuffisance des procédés de mesure de température dont il disposait, et du peu d'élasticité de la méthode photométrique employée, qui n'a permis de faire porter les expériences que sur un intervalle de température de 250°.

Depuis, la mise en œuvre de cette méthode pyrométrique n'a plus été tentée. M. Violle a cependant fait faire un pas important à la question en démontrant l'inexactitude de la loi du rayonnement de Dulong que les expériences de Ed. Becquerel semblaient confirmer.

M. Crova, en 1879, a tenté d'obtenir la détermination des températures élevées par des mesures de la variation relative de l'intensité de radiations différentes (rouge et verte); mais cette tentative a échoué en raison de son manque de précision et de la complexité trop grande des appareils.

Aujourd'hui encore on n'utilise les radiations des corps incandescents que par le procédé de Pouillet ou des procédés analogues, c'est-à-dire en estimant l'intensité ou plutôt la nuance des radiations soit à la vue simple, soit en aidant l'œil par un verre de cobalt, ou un quartz entre deux nicols (lunette Nouel et Mesuré), qui, en interceptant les radiations de réfrangibilité moyenne, exagèrent la variation de nuance des corps incandescents. Ces procédés permettent à quelques ouvriers et contremaîtres très expérimentés d'obtenir des résultats assez satisfaisants, mais ils exposent les observateurs

qui n'ont pas fait un apprentissage longtemps prolongé à des erreurs de plusieurs centaines de degrés.

Pour obtenir un pyromètre réellement pratique, il faut compléter l'œil par l'adjonction d'un appareil de mesure qui soit très précis tout en restant suffisamment simple et ne demande pas, pour son emploi, un apprentissage longtemps prolongé. Tel est le problème dont j'ai cherché la solution.

La mesure des variations de nuance, c'est-à-dire des variations inégales d'intensité de radiations différentes, ne peut, comme il est aisé de s'en rendre compte, conduire à aucun résultat précis, parce que le phénomène mesuré éprouve des changements trop peu supérieurs aux erreurs d'observation. D'après M. Violle, le rapport des intensités des radiations $\lambda = 656$ (rouge) et $\lambda = 482$ (bleu) varie dans le rapport de 1 à 4,5 pour un intervalle de température de 700°. Or, l'incertitude sur les mesures de ce rapport ne peut pas être pratiquement inférieure à 10 pour 100, ce qui entraînerait déjà une erreur de 50°, sans tenir compte d'autres causes d'erreurs également importantes qui sont inhérentes à ce mode d'observation.

La variation absolue d'intensité de radiations de longueur d'onde déterminée, des radiations rouges par exemple, atteint au contraire pour le même intervalle de température de 700° entre 1000° et 1700° le rapport de 1 à 300. Elle s'élève entre 600° et 1800° de 1 à 1 000 000. On conçoit donc toute la sensibilité que peut présenter une méthode pyrométrique basée sur la mesure absolue des radiations. Si, depuis Ed. Becquerel, on ne s'est plus préoccupé de cette méthode, cela tient, sans doute, à des défauts qui doivent certainement être pris en considération au point de vue théorique, mais qui n'ont pas, dans la pratique, l'importance que l'on pouvait redouter. Ces critiques ont été formulées avec beaucoup de netteté par M. Crova; elles sont la conséquence immédiate des travaux de Kirchhoff sur la radiation. Ce savant a établi que les radiations émises par un corps incandescent ne dépendent pas seulement de sa température, mais aussi de sa nature, de l'état de sa surface et surtout, ce que l'on oublie trop souvent, de la température de l'enceinte qui l'environne. Il n'y a que les corps *noirs*, c'est-à-dire les corps dont le pouvoir absorbant et par suite aussi le pouvoir émissif est maximum, pour lesquels l'éclat

ne dépend que de la température. Or, il se trouve, ainsi que je l'établirai plus loin, que le fer oxydé, le plus intéressant des produits industriels et le plus intéressé aux mesures pyrométriques, est un semblable corps noir.

J'ai eu à me préoccuper au cours de ces recherches :

1° De la méthode photométrique;

2° Des pouvoirs émissifs;

3° De la loi du rayonnement des corps incandescents.

Je donnerai en finissant les résultats que j'ai obtenus dans différentes usines, soit avec le pyromètre optique, soit antérieurement avec le pyromètre thermo-électrique.

Photomètre. — Les nécessités de l'emploi industriel exigent que l'on procède par comparaison directe entre l'image de l'objet étudié et celle d'une source de lumière employée comme repère fixe. Les spectro-photomètres, dont l'installation est longue et délicate, sont nécessairement condamnés : ils ne permettraient jamais l'observation de phénomènes aussi fugitifs que la coulée de l'acier, le déplacement d'un rail au laminage.

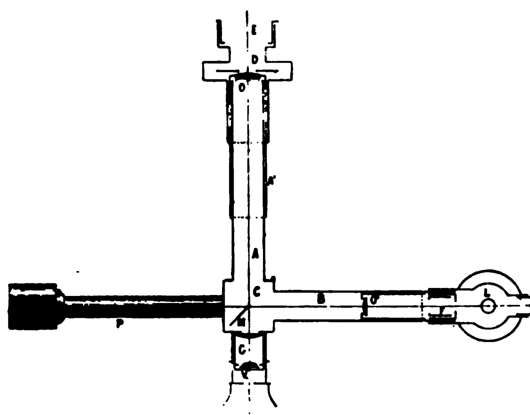
Pour ramener à l'égalité des intensités lumineuses qui peuvent varier dans le rapport de 1 à 1000000, on ne peut songer à un autre procédé que l'emploi de verres absorbants superposés en plus ou moins grand nombre. Pour les variations intermédiaires à l'intervalle de deux verres consécutifs, on peut se servir de prismes de Nicol ou d'un diaphragme œil-de-chat. Le second procédé seul m'a paru suffisamment exact et pratique. La difficulté du réglage et la facile détérioration des prismes de Nicol, la polarisation partielle de la lumière émise par les corps incandescents sont autant de motifs dont chacun d'eux suffirait pour faire proscrire l'emploi des polariseurs.

Enfin il est indispensable d'opérer pour ces comparaisons sur des radiations monochromatiques; ces radiations doivent être rouges parce que les seuls verres monochromatiques sont de cette nuance; les radiations rouges ont d'autre part l'avantage d'être les premières qui se développent dans les corps incandescents; leur emploi permet donc de faire porter les mesures sur le plus grand intervalle possible de température.

Ces diverses dispositions, qui paraissent s'imposer pour un pho-

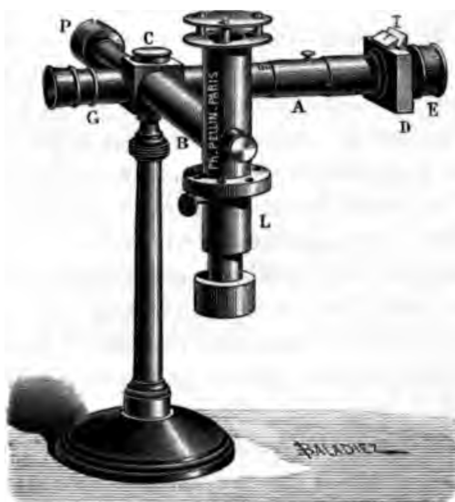
tomètre pyrométrique, se trouvent réalisées dans le photomètre

Fig. 1.



de M. Cornu, je n'ai donc eu qu'à prendre cet instrument en en modifiant seulement la forme extérieure pour l'adapter aux besoins des usines ([1]).

Fig. 2.



Le microscope qui sert dans l'appareil de M. Cornu à viser les

([1]) Cet appareil a été construit par M. Ph. Pellin.

images du corps incandescent et de la source de lumière a été remplacé par un simple oculaire G. La lampe à pétrole indépendante a été remplacée par une petite lampe portative L à essence qui est attachée à l'appareil et est entourée d'une enveloppe qui la préserve contre les courants d'air. Le photomètre constitue ainsi une lunette portative qui peut à volonté être tenue à la main ou portée par un pied.

Des difficultés sérieuses se sont présentées tant pour le choix du verre rouge V placé devant l'oculaire G, que pour celui des verres absorbants foncés E placés devant l'œil-de-chat D. Il y a peu de verres rouges qui, pour des mesures portant sur des lumières très différentes, soient suffisamment monochromatiques sans être en même temps trop foncés pour permettre de bonnes mesures photométriques. J'ai réussi cependant à en trouver de convenables parmi les verres rouges qui sont employés dans les lanternes photographiques.

Pour les verres absorbants foncés, il m'a été impossible d'en trouver dans le commerce, qui n'altèrent pas considérablement la nuance des radiations rouges transmises. Ce défaut m'a paru tenir à la présence dans ces verres de cobalt ou d'un trop grand excès de manganèse. Je ne serais pas arrivé à triompher de cette difficulté capitale sans le gracieux concours de M. Appert, qui a bien voulu essayer, d'après les indications que je lui ai données, une série de composition de verres différents et a réussi à en trouver une qui donne d'excellents résultats. Les oxydes colorants sont un mélange d'oxyde de fer et d'oxyde de cuivre avec une petite quantité d'oxyde de manganèse et de nickel.

Pour exprimer les intensités lumineuses, il faut adopter, comme unité, un étalon défini de lumière facile à employer et à reproduire. La lampe Carcel est d'un usage bien compliqué pour les usines et sa flamme présente un éclat très irrégulier d'un point à l'autre. Je me suis servi de la petite lampe étalon à l'acétate d'amyle que j'ai adoptée sur la foi de ce que j'en avais lu dans les livres, mais, pratiquement, c'est un étalon détestable. Dans les laboratoires, réglé avec un soin extrême, il donne peut-être des résultats satisfaisants, employé sans précautions spéciales, il ne peut fournir qu'une intensité très irrégulière; la lampe en métal se couvre rapidement de vert-de-gris, la mèche s'imprègne de sel de cuivre et ne laisse

plus monter le liquide; enfin, il faut préparer soi-même l'acétate pour être certain de sa pureté. Pour des expériences industrielles, une bougie ordinaire ou une petite lampe à l'essence de pétrole donne une intensité lumineuse bien plus constante. J'ai pris dans mes expériences, comme point de visée, la partie la plus lumineuse de la région axiale, laissant de côté le voisinage des bords près desquels l'intensité varie rapidement.

J'ai obtenu ainsi pour différentes sources lumineuses, qui pourront servir d'étalons auxiliaires, les résultats suivants :

Acétate d'amyle. Bougie stéarique. Bougie de gaz.	Lampe Pigeon à essence de pétrole.	Lampe Carcel.	Becs de gaz Bengel, Sugg.	Platine fondant dans une flamme oxhydrique.
1	1,10	1,9	0,74	15

Le résultat relatif au platine est un peu incertain, par suite de l'éclat propre de la flamme du chalumeau oxhydrique que j'employais.

Mesures d'intensité. — Pour faire avec ce photomètre une mesure d'intensité, on procède de la façon suivante :

On doit commencer, si besoin est, par régler le miroir au moyen des trois vis calantes, de façon que le faisceau lumineux provenant de la lampe et réfléchi par le miroir et celui venant directement de l'objet visé pénètrent intégralement dans l'œil. Cette condition est remplie si les images données par l'oculaire des deux objectifs se superposent entre elles et sont situées sur l'axe de la lunette. On le vérifie en visant avec une loupe ces deux images qui se forment un peu en arrière de l'anneau oculaire. Il faut, bien entendu, pour rendre visibles les deux objectifs, les éclairer, l'un avec la lampe, l'autre avec une source lumineuse quelconque. Si la superposition n'existe pas, on la rétablit au moyen des vis qui fixent le miroir. L'appareil doit, s'il ne reçoit pas de chocs, rester indéfiniment réglé.

La lampe de comparaison du photomètre doit, pour donner des indications constantes, avoir une hauteur de flamme régulière, par exemple égale à la hauteur de la fenêtre rectangulaire placée en avant de la lampe. Son image doit être exactement coupée en deux par l'arête du miroir, résultat que l'on obtient en faisant tourner la lampe dans sa monture où elle est excentrée. Enfin, il

faut, avant de faire une mesure, attendre une dizaine de minutes que la lampe ait pris son échauffement normal ; c'est alors seulement que la flamme présente un éclat constant.

Pour faire une mesure, on vise avec la lunette l'objet lumineux, de façon que son image soit coupée par l'arête du miroir et soit amenée ainsi en contact avec l'image de la flamme. On fait, avec le bouton inférieur, varier l'ouverture de l'œil-de-chat jusqu'à ce que l'égalité d'intensité des deux images soit obtenue.

Soit n le nombre de divisions donnant l'ouverture de l'œil-de-chat à ce moment ; soit n' le nombre correspondant en visant la flamme de la lampe étalon à l'acétate d'amyle, l'intensité mesurée sera

$$I = \left(\frac{n'}{n}\right)^2,$$

c'est-à-dire égale au rapport inverse de l'ouverture superficielle de l'œil-de-chat.

Si, ce qui est le cas général, les objets visés ne sont pas à la même distance et exigent une mise au point différente, on aura, en appelant f et f' les distances focales des images de l'objet et de la lampe étalon

$$I = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{f}{f'}\right)^2.$$

Enfin, si l'on a besoin de se servir pour compléter l'œil-de-chat de verres foncés absorbants, il faudra commencer par déterminer leur coefficient d'absorption. Pour cela, on visera un objet d'intensité appropriée en interposant ou non le verre foncé devant l'œil-de-chat. Soit N l'ouverture de l'œil-de-chat sans verre foncé et N' avec un semblable verre. Le coefficient d'absorption K du verre sera

$$K = \left(\frac{N'}{N}\right)^2.$$

Dans une mesure faite avec p verres devant l'œil-de-chat, l'intensité sera

$$I = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \left(\frac{1}{K}\right)^p.$$

S'il s'agit au contraire d'un objet peu lumineux et que les verres doivent être placés devant la lampe (dans la monture qui porte

la fenêtre rectangulaire), l'intensité sera donnée par la formule

$$I = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{f}{f'}\right)^2 K\rho.$$

Lorsque l'on veut viser des objets très petits, il y a intérêt, pour avoir une image suffisamment large, à se placer très près; dans ce cas, on dispose en avant de l'œil-de-chat, sur la monture des verres foncés, une seconde lentille semblable à l'objectif du photomètre. On peut alors en mettant l'objet visé à son foyer principal, obtenir dans le photomètre une image en vraie grandeur. C'est ainsi que j'ai procédé dans toutes les expériences de graduation qui seront rapportées plus loin. Cette lentille supplémentaire absorbe environ 10 pour 100 de l'intensité lumineuse.

Pouvoirs émissifs. — Avant de chercher à établir la graduation d'un semblable pyromètre optique, c'est-à-dire la relation qui existe entre l'intensité de la radiation des corps incandescents et leur température, il est indispensable d'étudier leurs pouvoirs émissifs. Le pouvoir émissif est le rapport de l'intensité des radiations émises par un corps incandescent dans une enceinte froide à celle des radiations émises par le même corps placé au milieu d'une enceinte de même température et aperçu par une ouverture infiniment petite percée dans cette enceinte. J'ai essayé d'abord de déterminer ce rapport en mesurant l'éclat d'une soudure de couple thermo-électrique recouvert de corps différents et chauffé soit dans la flamme d'un bec Bunsen, soit au milieu d'un tube de terre chauffé par l'extérieur. Le bec Bunsen, en raison de la transparence de sa flamme pour les radiations lumineuses, réalise le cas de l'enceinte froide; mais cette méthode ne donne aucun résultat précis, parce que la plus légère incertitude sur la mesure des températures entraîne de très grandes variations dans les intensités lumineuses à comparer. En outre, il est impossible de réaliser au laboratoire des enceintes à température rigoureusement uniforme; les inégalités de température entraînent pour les corps à faible pouvoir émissif, et partant à fort pouvoir diffusant, des variations considérables d'éclat. Voici, par exemple, des résultats obtenus dans un tube en terre à la température de 800° :

Corps rayonnants.	Intensités lumineuses.
Fe^3O^4	1
Pd	1,32
Ag	1,9

Les éclats de ces trois corps ont donc varié du simple au double et, contrairement à ce que l'on pourrait supposer par un examen trop rapide, c'est un corps à faible pouvoir émissif, l'argent, qui a le plus grand éclat. Cela indique simplement qu'il était éclairé par des parties de l'enceinte plus chaude que lui.

Dans le même ordre d'idées, un petit morceau de platine fondant m'a donné sensiblement le même éclat, chauffé à l'air libre ou dans un tube en chaux. Pour expliquer ce résultat, il suffit d'admettre que l'enceinte en chaux a une température de 300° inférieure à celle du platine. Cela est parfaitement admissible en raison du refroidissement extérieur de l'enveloppe. Pour mesurer les pouvoirs émissifs, j'ai utilisé la remarque suivante de Kirchhoff. L'intérieur des fissures d'un corps peut être considéré comme renfermé dans une enveloppe de température uniforme, sous la réserve, bien entendu, que l'ouverture des fissures soit assez petite. Le pouvoir émissif d'un corps est donc, à la température considérée, égal au rapport de l'intensité lumineuse de la surface à celle du fond des fissures profondes.

Pour faire ces mesures de pouvoir émissif, j'ai employé des petites sphères ou des petits cylindres de 5^{mm} de diamètre perforés, suivant un diamètre, d'un trou de 1^{mm} de diamètre et 4^{mm} de profondeur.

J'ai obtenu les résultats suivants pour les radiations rouges au voisinage de 1300°.

Corps.	Pouvoir émissif.
Fe^3O^4, C	1
Pd	0,6
Pt mat	0,4
Pt poli, argile blanche	0,25
MgO	0,1

Ces nombres montrent que l'on peut, pour le fer rouge, toujours oxydé à sa surface, considérer le pouvoir émissif comme égal à l'unité. L'intensité des radiations est, par suite, indépen-

dante de la température de l'enceinte, de l'éclat de la surface, propriété précieuse pour les mesures optiques de température.

Au cours de ces recherches, j'ai observé une vérification intéressante des théories de Kirchhoff. Pour les corps solides comme pour les gaz, les radiations émises avec le plus d'intensité sont aussi celles qui sont le plus énergiquement absorbées. De telle sorte que la couleur d'un corps incandescent est, dans une certaine mesure, complémentaire de la couleur qu'il présente quand il est éclairé par de la lumière blanche. L'oxyde de zinc, qui paraît jaune quand il est éclairé par de la lumière blanche après avoir été un peu chauffé, la magnésie, etc., paraissent bleus lorsqu'ils sont portés à l'incandescence. On reconnaît très aisément la nuance spécifique d'un corps incandescent en comparant la couleur de la surface du corps échauffé dans une flamme transparente à la couleur que présente le fond des fissures, laquelle est fonction de la température seule et indépendante de la nature du corps considéré.

Graduation. — Pour graduer le pyromètre optique, je me suis servi de mes couples thermo-électriques dont la soudure était recouverte de différents corps Fe^3O^4, Pd, Pt, etc.

Une première série d'expériences faites dans un tube chauffé extérieurement aussi régulièrement que possible avec un couple recouvert de Fe^3O^4 a donné les résultats suivants :

Intensités.	Températures.
0,0076	840°
0,029	920
0,064	960
2,6	1350

Mais la difficulté d'obtenir une régularité suffisante de la température de l'enceinte n'a pas permis de faire jusqu'ici, d'une façon complète, cette série de mesures, qui serait évidemment la plus intéressante.

Une seconde série d'expériences a été faite en fondant, sur la soudure du couple, une petite quantité de Fe^3O^4 et la chauffant, pour les mesures, dans la flamme transparente d'un chalumeau à air ou à oxygène. Les résultats ne diffèrent pas d'une façon sen-

sible de ceux obtenus dans le four, ce qui confirme le pouvoir émissif maximum trouvé pour Fe^3O^4. Il ne s'est point produit de changement dans le pouvoir émissif de cet oxyde à son point de fusion, 1340°.

Les résultats des observations peuvent être représentés par la formule

$$I = 10^{6,7}.T^{-\frac{3210}{T}}.$$

Intensités.	Températures observées.	Températures calculées.	Écarts entre le calcul et l'observation.
0,00038	680°	671°	+ 9°
0,00074	700	702	— 2
0,002	760	755	+ 5
0,0054	810	815	— 5
0,0056	820	817	+ 3
0,01	860	853	+ 7
0,034	940	939	+ 1
0,060	980	982	— 2
0,105	1020	1026	— 6
0,19	1080	1078	+ 2
0,67	1220	1205	+15
1,17	1270	1265	+ 5
6,45	1495	1490	+ 5
31,0	1775	1757	+18

Une troisième série d'expériences a été faite avec le platine mat, en fondant un globule de ce métal sur la soudure du couple, le martelant pour obtenir une surface plane, recouvrant cette surface de platine pulvérulent provenant de la décomposition du chlorure et chauffant ce platine à 1500° pour l'amener à un état d'agrégation stable.

On a rapproché, dans le même Tableau, l'éclat d'un fil de platine fondant dans la flamme du chalumeau oxhydrique. L'éclat observé semble exagéré car il se place assez bien sur la courbe des expériences précédentes relatives au platine mat : il devrait être plus faible et se rapporter au platine poli ; peut-être l'éclat de certains points de la flamme oxhydrique a-t-il donné lieu à des réflexions qui ont faussé les mesures. Cependant l'expérience répétée plusieurs fois a donné des résultats concordants :

	Intensités.	Températures.
	0,00031	730°
	0,0011	800
	0,0032	855
	0,0043	880
	0,011	950
	0,073	1080
	0,205	1180
	0,210	1200
	0,480	1290
	0,60	1300
	1,40	1420
	1,90	1450
	2,80	1500
Platine fondant	15,0	1775

Une dernière série d'expériences relatives au palladium a donné es résultats suivants :

	Intensités.	Températures
	0,00022	700°
	0,0005	735
	0,001	760
	0,0033	840
	0,0091	895
	0,041	1000
	0,087	1060
	0,24	1120
	0,31	1160
	1,17	1310
	1,7	1350
Pd fondant	4,8	1500

Le Tableau suivant donne, de 100° en 100°, l'intensité des radiations rouges émises par les corps d'un pouvoir émissif égal à l'unité. Ces nombres ont été calculés au moyen de la formule d'interpolation donnée plus haut.

Intensités.	Températures.
0,00008	600°
0,00073	700
0,0046	800
0,020	900
0,078	1000
0,24	1100
0,64	1200
1,63	1300
3,35	1400
6,7	1500
12,9	1600
22,4	1700
39,0	1800
60,0	1900
93,0	2000
1800	3000
9700	4000
28000	5000
56000	6000
100000	7000
150000	8000
224000	9000
305000	10000

Ces données sont résumées dans le Tableau graphique ci-contre :

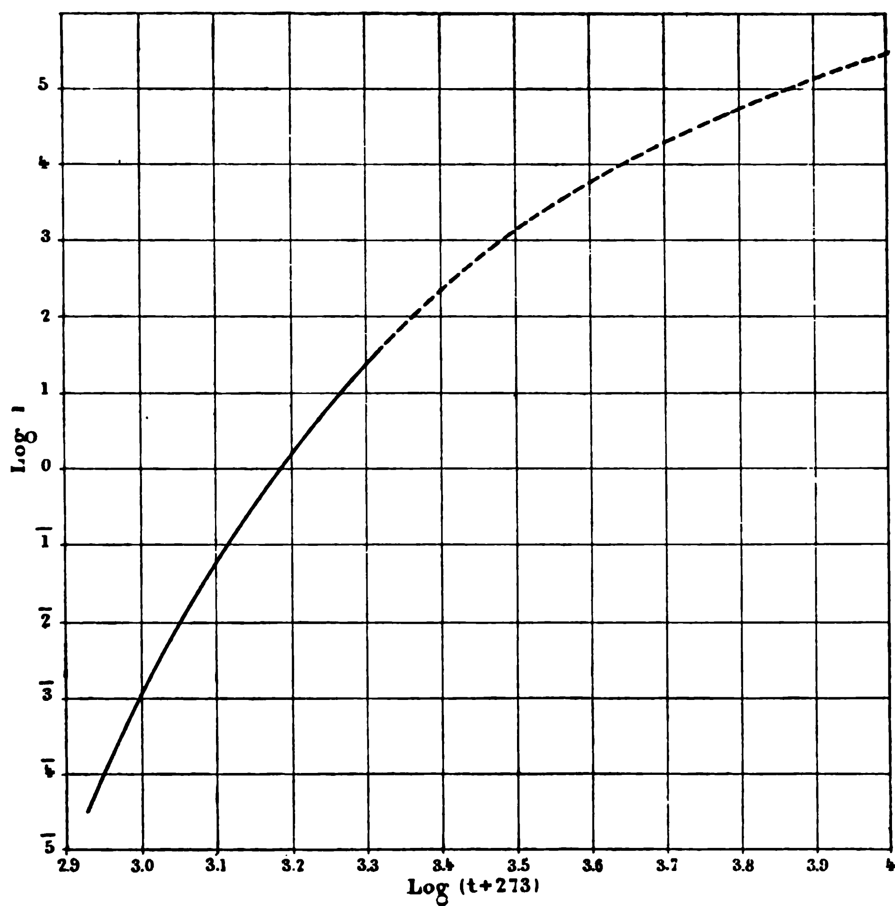
Il peut être intéressant de rapprocher ces résultats de ceux qui ont été obtenus antérieurement par M. Violle sur le même sujet. Les expériences de ce savant ont toutes porté sur des corps incandescents placés dans une enceinte chaude; elles se rapportent donc à la série de mes mesures sur le rayonnement de Fe^3O^4. Ces dernières ont d'ailleurs porté sur des radiations sensiblement monochromatiques ($\lambda = 650$) grâce à l'emploi *simultané* du verre rouge et de verres absorbants convenablement choisis; elles doivent donc être comparées aux expériences de M. Violle relatives à la radiation $\lambda = 565$ et non, comme on pourrait le croire à première vue, à celles qui ont été faites avec un simple verre rouge; ce verre donne pour le maximum de la radiation lumineuse transmise un λ variable avec la température du corps incandescent.

Les données ci-dessous sont exprimées dans chaque série en

fonction de la radiation correspondant à 1000° prise pour unité.

Températures.	Intensité. Violle.	Le Châtelier.	Rapports.
775	0,113	0,037	3,05
954	0,55	0,54	1,02
1045	1,80	1,65	1,09
1500	85,00	86,00	0,99
1775	280,00	385,00	0,72

Fig. 3.



La méthode photométrique que j'ai employée ne me permettant pas de répondre des mesures d'intensité à plus de 10 pour 100

près, les résultats relatifs aux trois températures 954, 1045, 1500 doivent être considérés comme concordants. Le désaccord est au contraire absolu pour les deux températures extrêmes. M. Violle considère comme très incertaines ses mesures relatives à la température de 775, parce que le photomètre employé ne se prêtait pas à l'étude des radiations aussi faibles; la formule d'interpolation qu'il avait donnée pour représenter l'ensemble de ses expériences conduirait à la valeur 0,045, qui se rapproche beaucoup de la mienne. Le nombre trouvé par ce savant pour la température de 1775 me paraît incontestablement trop faible; j'attribue ce résultat au défaut d'équilibre des températures dans les fours où la fusion du platine était obtenue. La voûte du four est certainement plus froide que le métal frappé directement par le jet du chalumeau oxhydrique. Il suffit d'un écart de température de 200° pour rendre compte de la différence qui existe entre nos déterminations.

Expériences dans les usines. — Les méthodes pyrométriques, optiques et thermo-électriques, que j'ai étudiées, m'ont permis d'effectuer la mesure précise des températures développées dans les foyers industriels. Les résultats ainsi obtenus sont, pour certaines industries, en contradiction absolue avec les estimations faites antérieurement, et ne seront sans doute pas acceptés sans contestation. Je serais heureux si leur publication pouvait provoquer des expériences contradictoires sur le même sujet (¹).

Les températures données ici sont rapportées à l'échelle définie par les points fixes de M. Violle.

Soufre	Or.	Palladium.	Platine.
448°	1045°	1500°	1775°

(¹) Je n'ai pu mener à bien ces recherches qu'avec le gracieux concours d'industriels qui ont consenti à m'ouvrir leurs usines, malgré le dérangement inévitable que de semblables expériences occasionnent toujours.

Qu'il me soit permis d'adresser tout particulièrement mes remerciements aux directeurs et ingénieurs des usines à fer du Creusot, de Saint-Chamond, d'Unieux et de Denain, des verreries de Clichy-Levallois et Folembray, de la manufacture nationale de Sèvres et de la fabrique de porcelaine de Mehun-sur-Yèvre, de la Compagnie parisienne pour l'éclairage et le chauffage au gaz, de la briqueterie d'Auberville (Calvados), de la fonderie de la rue Oberkampf (Paris).

Points de fusion :

Fonte		Acier		
blanche de Suède.	grise de moulage.	doux $c = 0,1$.	demi-dur $c = 0,3$.	dur $c = 0,9$.
1135°	1220°	1475°	1455°	1410°

Acier manganèse à 13 pour 100.	Ferronickel à 25 pour 100.	Bronze d'Al à 10 pour 100.	Bronze de Sn à 20 pour 100.	Laiton de Zn à 35 pour 100.
1260°	1230°	980°	790°	880°

Cornue Bessemer :

Flamme d'un convertisseur Robert.

Période des étincelles.	Fin d'opération.
1330°	1580°

Bessemer de 6 tonnes.

Coulée de la scorie.	Coulées de l'acier dans la poche.	Coulées de l'acier dans le moule.	Solidification de l'oxyde des battitures.	Four à réchauffer.	Lingot sous le marteau-pilon.
1580°	1640°	1580°	1340°	1200°	1080°

Laminage d'un rail.

Arrivée au dégrossisseur.	Cinquième cannelure.	Retour au four.	Arrivée au prépareur.	Passage du prépareur au finisseur.	Sortie du finisseur. Ame.	Sortie du finisseur. Ailes.
1195°	1130°	1110°	1250°	1150°	1100°	1000°

Four Siemens-Martin. — Coulée d'acier demi-dur :

Gaz des gazogènes. Sortie du gazogène.	Gaz des gazogènes. Entrée du récupérateur.	Gaz des gazogènes. Sortie du récupérateur.	Air sortant du récupérateur.	Fumées allant à la cheminée.
720°	400°	1200°	1000°	300°

Four. Fin de fusion de la fonte.	Four. Affinage de l'acier.	Coulée de l'acier dans la poche. Commencement.	Coulée de l'acier dans la poche. Fin.	Coulée de l'acier dans le moule.
1420°	1500°	1580°	1490°	1520°

Pour l'acier doux, les températures sont plus élevées de 50°, et l'on observe le même écart entre le commencement et la fin de la coulée, ce qui indique, d'une façon certaine, que le bain d'acier dans la partie centrale du four est plus chaud que vers les extrémités. Dans les fours Siemens-Pernod, c'est au contraire la fin de la coulée qui est la plus chaude.

Four Siemens à creusets pour acier. — Intervalle des creusets : 1600°.

Four à puddler rotatif :

Coulée de la fonte		Loupe en
dans la poche.	dans le four.	fin d'opération.
1340°	1230°	1330°

Haut fourneau marchant en fonte grise pour Bessemer :

Ouvrage en face	Coulée de la fonte.	
de la tuyère.	Commencement.	Fin.
1930°	1400°	1570°

Four à pots pour verrerie :

Four entre	Verre dans les pots.		Verre à vitre à
les pots.	Affinage.	Travail.	l'étendage.
1375°	1310°	1045°	600°

Four Siemens à bassin pour verrerie :

Four.	Verre fondu	Recuit des bouteilles.
1400°	1310°	585°

Four Siemens pour gaz d'éclairage, chauffé par gazogène au coke :

Four.		Cornue en fin de distillation		Fumées allant
Sommet.	Bas.	à 1m du tampon.	à 1m,50 du tampon.	à la cheminée.
1190°	1045°	875°	950°	680°

Four à porcelaine dure. — Fin de la cuisson : 1370°.

Je me suis assuré que des porcelaines dures de diverses provenances : Sèvres, Mehun-sur-Yèvre, Bayeux, avaient à peu près exactement le même point de cuisson.

Four Hoffmann à briques rouges. — Cuisson : 1100°.

Les températures données ici sont bien inférieures à celles qui sont le plus généralement admises pour les industries en question : 2000° pour l'acier (1); 1800° pour la porcelaine (2); 1200° pour le gaz d'éclairage. L'exagération de ces derniers chiffres tient à plusieurs causes. Entre différentes déterminations de températures non concordantes, on choisit de préférence les plus élevées, par suite d'un sentiment instinctif qui conduit à admettre une quasi-proportionnalité entre la température d'un corps et son éclat ou la quantité de combustible dépensé pour l'échauffer, tandis qu'en réalité ces deux grandeurs croissent suivant une fonction extrêmement rapide de la température. En second lieu, le procédé le plus fréquemment employé jusqu'ici dans l'industrie, pour les mesures pyrométriques, a été la méthode calorimétrique, en se servant des morceaux de fer dont on supposait à tort la chaleur spécifique invariable. Enfin des causes d'erreurs particulières sont venues fausser des comparaisons dans lesquelles on utilisait le point de fusion du palladium ou du platine. Ainsi la température du Bessemer avait été fixée par Langley à 2000°, parce que le platine paraissait fondre rapidement dans sa flamme. J'ai reconnu qu'il ne fondait pas, mais se dissolvait dans les gouttelettes d'acier fondu entraîné par le courant gazeux. De même, le palladium passe pour fondre dans différents fours où en réalité il se transforme, sans fusion, en une mousse spongieuse, par le fait d'hydrogénation ou d'oxydation passagère.

Électricité. — Quelques expériences faites sur les lampes à incandescence m'ont donné les résultats suivants :

Lampes à incandescence : 1800°.

---

(1) M. Grüner avait déjà indiqué pour le four Siemens-Martin la température de 1500°, en partant de la quantité de chaleur abandonnée par le métal pendant son refroidissement.

(2) M. Vogt avait reconnu depuis longtemps déjà que la température de cuisson de la porcelaine dure ne dépassait pas 1550°.

Cette mesure a été faite sur une lampe en marche normale, servant à l'éclairage de l'École Polytechnique.

Les lampes, très poussées, peuvent dépasser 2100°. Les lampes ainsi surmenées éprouvent immédiatement une diminution permanente de résistance qui s'est élevée à 10 pour 100 dans la lampe expérimentée.

La variation de résistance d'une lampe à incandescence de 10 volts a été pour diverses températures trouvée égale à :

Températures.	Résistances.
15°	1
700	0,75
1000	0,66
1400	0,57
1800	0,49
2100	0,44

Les lampes à arcs ont donné pour le point le plus chaud des charbons une température de 4100° qui est indépendante de l'intensité du courant et du système des lampes. Dans les arcs à courant continu la pointe négative est plus froide et atteint seulement 3000°. Ces résultats sont d'accord avec ceux qui avaient été obtenus antérieurement par M. Rossetti.

Soleil. — La même méthode optique appliquée à la détermination de la température effective du Soleil m'a donné, en me servant par extrapolation de la formule donnée plus haut, le chiffre de 7600°.

Ce chiffre a été déduit de trois séries de mesures de la radiation solaire, qui ont conduit pour l'intensité des radiations rouges en dehors de l'atmosphère à la valeur 125000.

Voici l'une de ces séries :

Observation du 19 mars 1892.

Heure.	Hauteur du Soleil.	Intensités.
2	35	83000
3	28,30	73000
3,30	25	66000
4,12	18	56000
4,30	15	42000
4,40	14	35000
5	10,30	31000
5,15	8,15	22000
5,25	7	15000

La température du Soleil dont il est question ici est la température *effective*, c'est-à-dire, comme l'a proposé M. Violle, la température que devrait avoir un corps du pouvoir émissif égal à l'unité pour nous renvoyer des radiations de même intensité que le Soleil. La température réelle de la photosphère est plus élevée, car une partie de ses radiations sont arrêtées par l'atmosphère solaire moins chaude.

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA POLARISATION ROTATOIRE NATURELLE DES CORPS TRANSPARENTS;

PAR M. D. GOLDHAMMER.

1. La théorie électromagnétique complète du phénomène nommé ci-dessus ne nous est pas connue. La théorie de M. J.-W. Gibbs [1] est intimement liée avec sa théorie de la dispersion de la lumière et se rapporte seulement aux milieux indéfinis. La théorie proposée dernièrement par M. Basset [2] explique plutôt les phénomènes de la polarisation rotatoire *magnétique* que de la polarisation rotatoire *naturelle;* de même n'est-elle appliquée qu'à un corps indéfini.

Nous nous proposons de développer la théorie complète dudit phénomène.

2. Soient :

P, Q, R les composantes suivant les axes x, y, z de la force électromotrice dans un milieu transparent, propageant les vibrations lumineuses;

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ les composantes de la polarisation diélectrique [3];

u, v, w les composantes de la densité du courant;

U, V, W les composantes du vecteur potentiel de Maxwell [4];

---

[1] J.-W. GIBBS, *Americ. Journ. of Science*, t. XXIII, p. 460; 1882.

[2] BASSET, *Phil. Mag.*, (5), t. XXX, p. 152; 1890. — *Journal de Physique*, 1891.

[3] f, g, h de Maxwell.

[4] F, G, H de Maxwell.

D la constante diélectrique du milieu, supposé isotrope (¹);
f le potentiel de la polarisation diélectrique (²), toutes les quantités mesurées en unités *électrostatiques* C.G.S.

On suppose la perméabilité magnétique du milieu considéré, $\mu = 1$, en unités électromagnétiques C.G.S.

3. Les équations de la théorie électromagnétique de la lumière (³) sont pour un non-conducteur isotrope

$$(1) \qquad \mathfrak{f} = \frac{D}{4\pi}P, \qquad \mathfrak{g} = \frac{D}{4\pi}Q, \qquad \mathfrak{h} = \frac{D}{4\pi}R,$$

$$(2) \qquad u = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t},$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(4) \quad P = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \quad Q = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial V}{\partial t}, \quad R = -\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

$$(5) \qquad \Delta U = -4\pi u, \qquad \Delta V = -4\pi v, \qquad \Delta W = -4\pi w,$$

$\mathfrak{v}_0$ étant la vitesse de la lumière dans l'éther.

A travers la surface de séparation de deux milieux différents restent continus U, V, W, leurs dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z; f et ses dérivées du premier ordre prises dans le plan tangent à la surface et enfin la composante du courant, normale à la surface de séparation.

Il est évident que cette dernière condition n'est compatible avec les équations (5) que si l'on pose

$$(6) \qquad U = u + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad V = v + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad W = w + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(7) \qquad \Delta \varphi = 0,$$

d'où il suit

$$(8) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

L'équation (1) est la seule qui contient une constante spéci-

(¹) Ψ de Maxwell.
(²) K de Maxwell.
(³) MAXWELL, *Treatise on Electr. and Magn*, t. II.

fique du milieu; pour un corps cristallisé, ayant les axes x, y, z pour axes de symétrie, Maxwell prend

$$\mathfrak{r} = \frac{D_x}{4\pi} P, \qquad \mathfrak{y} = \frac{D_y}{4\pi}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{D_z}{4\pi}.$$

4. Pour un milieu cristallisé de même espèce, doué en outre de la propriété rotatoire, nous admettons en place de (1)

$$(9) \qquad \begin{cases} P = \dfrac{4\pi}{D_x}\mathfrak{r} + p_3 \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - p_2 \dfrac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}, \\ Q = \dfrac{4\pi}{D_y}\mathfrak{y} + p_1 \dfrac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - p_3 \dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial z}, \\ R = \dfrac{4\pi}{D_z}\mathfrak{z} + p_2 \dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y} - p_1 \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}, \end{cases}$$

p_1, p_2, p_3 étant de nouvelles constantes du milieu, dépendant (comme le font D_x, D_y, D_z) de la longueur d'onde de la lumière employée.

L'élimination de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ et P, Q, R de (9), à l'aide de (2), (5), (4), nous donne maintenant

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta\left(\dfrac{4\pi}{D_x} u + p_3 \dfrac{\partial v}{\partial z} - p_2 \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) - \dfrac{4\pi}{\mathfrak{v}_0^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\pi \dfrac{\partial^2}{\partial t\, \partial x}\left(f + \dfrac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right), \\ \Delta\left(\dfrac{4\pi}{D_y} v + p_1 \dfrac{\partial w}{\partial x} - p_3 \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) - \dfrac{4\pi}{\mathfrak{v}_0^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 4\pi \dfrac{\partial^2}{\partial t\, \partial y}\left(f + \dfrac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right), \\ \Delta\left(\dfrac{4\pi}{D_z} w + p_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} - p_1 \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) - \dfrac{4\pi}{\mathfrak{v}_0^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4\pi \dfrac{\partial^2}{\partial t\, \partial z}\left(f + \dfrac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right). \end{cases}$$

Comme u, v, w et ϕ sont des fonctions entièrement de différente espèce, nous devons poser

$$(11) \qquad \begin{cases} f = f' + f'', \\ \Delta f' = 0, \end{cases}$$

d'où il suit

$$(12) \qquad f' + \frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Si l'on pose encore, pour abréger,

$$(13) \qquad \frac{\mathfrak{v}_0^2}{D_x} = \mathfrak{v}_x^2, \qquad \frac{\mathfrak{v}_0^2}{D_y} = \mathfrak{v}_y^2, \qquad \frac{\mathfrak{v}_0^2}{D_z} = \mathfrak{v}_z^2,$$

$$(14) \qquad \frac{\mathfrak{v}_0^2}{4\pi} p_1 = p'_1, \qquad \frac{\mathfrak{v}_0^2}{4\pi} p_2 = p'_2, \qquad \frac{\mathfrak{v}_0^2}{4\pi} p_3 = p'_3,$$

on obtient en vertu de (8)

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_0^2 \dfrac{\partial f''}{\partial t} = \mathfrak{v}_x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{v}_y^2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{v}_z^2 \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \qquad + p'_1 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + p'_2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + p'_3 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right. \end{cases}$$

et après quelques transformations

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{v}_x^2 \Delta u - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{v}_x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{v}_y^2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{v}_z^2 \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial h}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathfrak{v}_y^2 \Delta v - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{v}_x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{v}_y^2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{v}_z^2 \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial h}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathfrak{v}_z^2 \Delta w - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{v}_x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{v}_y^2 \dfrac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{v}_z^2 \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial h}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right); \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial h} = p'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p'_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + p'_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

3. Pour les cristaux à deux axes optiques on a p_1, p_2, p_3 différents; pour ceux à un axe (soit l'axe des z), on prend

$$\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_y, \qquad p'_1 = p'_2 = 0;$$

pour les corps isotropes on doit avoir

$$\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z, \qquad p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'.$$

Étant donnée la direction de propagation d'une onde plane, polarisée rectilignement, on trouve par l'équation (16) les deux vitesses inégales $\mathfrak{w}_1$ et $\mathfrak{w}_2$, qui correspondent généralement à deux rayons polarisés elliptiquement. La polarisation devient circulaire : *a*, pour la direction d'un des axes optiques des cristaux à deux axes; *b*, pour la direction de l'axe des cristaux uniaxiaux; x étant l'angle que fait la direction de la propagation de l'onde avec l'axe, on a dans ce cas généralement

$$(17)\quad \begin{cases} \mathfrak{w}_1^2 = \mathfrak{v}_x^2 + \dfrac{1}{2}(\mathfrak{v}_z^2 - \mathfrak{v}_x^2)\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\mathfrak{v}_z^2 - \mathfrak{v}_x^2)^2 \sin^4 x + 4q^2}, \\ \mathfrak{w}_2^2 = \mathfrak{v}_x^2 + \dfrac{1}{2}(\mathfrak{v}_z^2 - \mathfrak{v}_x^2)\sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\mathfrak{v}_z^2 - \mathfrak{v}_x^2)^2 \sin^4 x + 4q^2}, \\ q = \dfrac{2\pi}{\mathfrak{w} F} p'_3 \cos^2 x, \\ 2\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2. \end{cases}$$

c, pour toute direction de propagation de l'onde dans les corps

isotropes; alors on trouve

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathfrak{w}_1^2 = \mathfrak{w}^2 + q, \qquad \mathfrak{w}_2^2 = \mathfrak{w}^2 - q; \qquad q = \dfrac{2\pi}{\mathfrak{w}F}p', \\ f'' = 0. \end{cases}$$

Les quantités de l'ordre p^2 sont négligées.

6. Les amplitudes des deux rayons considérés ne sont pas généralement égales; mais la différence étant très petite (de l'ordre p), on peut considérer les deux rayons circulaires comme constituant un seul rayon polarisé rectilignement, dont le plan de polarisation a tourné de l'angle φ

$$(19)\qquad \varphi = \frac{\pi d}{F}\left(\frac{1}{\mathfrak{w}_1} - \frac{1}{\mathfrak{w}_2}\right),$$

proportionnellement au trajet d du rayon dans le milieu.

Si N_0 est l'indice de réfraction du rayon ordinaire dans le quartz, par rapport à l'éther, N l'indice d'un milieu isotrope comme la solution de sucre et λ la longueur d'onde de la lumière employée (dans l'éther), on tire aisément de (19), à l'aide de (17) et (18), les angles de la rotation du plan de la polarisation dans les deux cas

$$(20)\qquad \begin{cases} \varphi = -\dfrac{\pi d}{2}\dfrac{N_0^4}{\lambda^2}p_3, \\ \varphi = -\dfrac{\pi d}{2}\dfrac{N^4}{\lambda^2}p. \end{cases}$$

Nous réservons le problème de la réflexion pour une seconde Note.

SUR UNE SIMILITUDE DANS LES FONCTIONS DES MACHINES;

PAR M. E. CARVALLO.

1. Pour étudier les machines dynamo, les praticiens ont intérêt à en représenter les principales fonctions par des courbes telles que les *caractéristiques* de M. Marcel Deprez. Quand on passe d'une machine à une autre, la courbe conserve généralement la même nature: *Pour passer de la première courbe à la deuxième,*

il suffit de changer les échelles des coordonnées. C'est cette sorte de *similitude* qu'il s'agit d'expliquer. M. Lucas y est parvenu par un changement de variable pour deux cas qui m'ont suggéré un théorème général.

2. M. Lucas calcule un cas théorique simple d'alternateur (*Traité pratique d'Électricité,* Baudry, 1892). Si l'on regarde l'intensité moyenne du courant I comme fonction de la vitesse de rotation de la machine, c'est-à-dire de sa période T, en laissant constante la résistance totale R, on a une *courbe d'intensité.* M. Lucas obtient, pour la représenter, la formule

$$(1) \qquad I^2 = \frac{\dfrac{2\pi^2 Q^2}{T^2}}{R^2 + \dfrac{4\pi^2 L^2}{T^2}},$$

où Q est le flux inducteur maximum, et L le coefficient de self-induction de l'induit. Puis, il fait le changement de variables

$$(2) \qquad x = \frac{2\pi L}{R}\frac{1}{T}, \qquad y = \frac{L\sqrt{2}}{Q} I$$

et obtient

$$(3) \qquad x^2 y^2 + y^2 - x^2 = 0.$$

La courbe (3) est indépendante des données de la machine. La courbe (1) s'en déduit en changeant les deux échelles des coordonnées, et ce changement dépend des constantes caractéristiques de la machine. La similitude est donc établie. M. Lucas traite par la même méthode les *courbes de puissance.*

3. Voici maintenant ma démonstration générale. Soit

$$(1) \qquad f(X, Y, A_1, A_2, \ldots) = 0$$

l'équation qui lie les variables X, Y aux constantes A_1, A_2, ... caractéristiques de la machine. Pour une autre machine du même type, on aura de nouvelles constantes B_1, B_2, ... et la nouvelle équation sera

$$(2) \qquad f(X, Y, B_1, B_2, \ldots) = 0.$$

Comme toute équation de la Physique, l'équation (2) est homogène par rapport aux trois grandeurs fondamentales : longueur, temps et masse. Si donc on choisit de nouvelles unités pour ces trois grandeurs, et si l'on représente par des petites lettres les nouvelles mesures des quantités représentées d'abord par les grandes lettres, on aura encore

$$(2)' \qquad f(x, y, b_1, b_2, \ldots) = 0.$$

Maintenant on peut disposer des trois unités fondamentales de façon à donner à trois nombres b_1, b_2, b_3 des valeurs égales aux nombres A_1, A_2, A_3, qui mesurent les constantes homologues de la première machine, dans le premier système d'unités. Dès maintenant on est conduit à supposer que l'équation (1) ne contient pas plus de trois constantes caractéristiques de la machine. Dans cette hypothèse, l'équation (2)' de la deuxième machine devient identique à l'équation (1) de la première. Seulement, dans la deuxième machine, les variables x et y sont évaluées dans un système d'unités différent de celui qui a servi à mesurer les variables homologues X et Y de la première. Ce changement d'unités est représenté graphiquement par un changement dans les échelles des coordonnées de la courbe caractéristique (2)'. En résumé, le seul principe d'homogénéité conduit à ce théorème général :

Si l'équation caractéristique d'une fonction d'un type de machines ne contient pas plus de trois constantes caractéristiques, les courbes des diverses machines de ce type se déduisent les unes des autres en changeant seulement les échelles des coordonnées.

Dans ce théorème général rentrent les deux exemples de M. Lucas : les équations de ces exemples sont à trois termes et, par suite, ne présentent que deux coefficients.

4. Le théorème est soumis à une restriction que la démonstration met en évidence : *il faut que les mesures des trois constantes caractéristiques soient des fonctions, indépendantes entre elles, des trois unités fondamentales.* Ce n'est pas le cas de l'équation différentielle du courant dans les alternateurs étudiés

ci-dessus, savoir

$$I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} - \frac{E_0}{R}\sin 2\pi\frac{t}{T} = 0,$$

où I est l'intensité à l'époque t, E_0 la force électromotrice maximum d'induction; L, R, T le coefficient de self-induction, la résistance de l'induit et la période.

L'équation contient bien trois coefficients seulement : $\frac{L}{R}$, $\frac{E_0}{R}$, $\frac{2\pi}{T}$; mais le premier et le dernier ont pour représentation symbolique

$$\frac{L}{R} = [T], \qquad \frac{2\pi}{T} = [T^{-1}].$$

Ils dépendent seulement du temps. On ne pourra donc pas choisir les unités fondamentales de façon à donner simultanément à ces deux coefficients des valeurs arbitraires. La démonstration générale échoue ainsi que les transformations de M. Lucas.

NOUVEL ENREGISTREUR (APPLIQUÉ A UN BAROMÈTRE) [1];

PAR M. H. SENTIS.

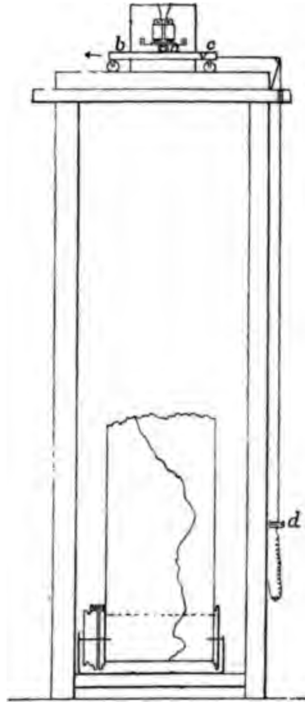
Baromètre. — L'instrument dont nous nous proposons d'enregistrer les indications est un baromètre à siphon formé de deux gros tubes de même diamètre réunis par un tube capillaire (*fig.* 3). Il est facile de s'assurer que si le niveau dans la branche ouverte arrive, pour la pression moyenne du lieu où l'on se trouve, au milieu de la distance des plans A et B, la position de ce niveau est sensiblement indépendante de la température et le baromètre est, par suite, ramené à zéro. On voit (*fig.* 2) que ce baromètre est installé le long d'un des montants de l'appareil. Sur le mercure de la petite branche repose un cylindre de fer relié par un fil de platine à un levier décuplateur. Ce levier est extrêmement léger

---

(1) J'ai construit cet appareil au laboratoire de la Faculté de Grenoble avec l'aide de M. Labatut préparateur. Un menuisier a exécuté le bâti et les pièces en bois tourné.

(moins de 3^{gr}). Je l'ai formé, d'un côté, avec une lame de liège découpée en secteur de cercle de 4^{cm} de rayon, et de l'autre avec deux chènevottes, une rectiligne de 40^{cm} et une autre fendue en deux dans sa longueur, de manière à constituer un canal, collée

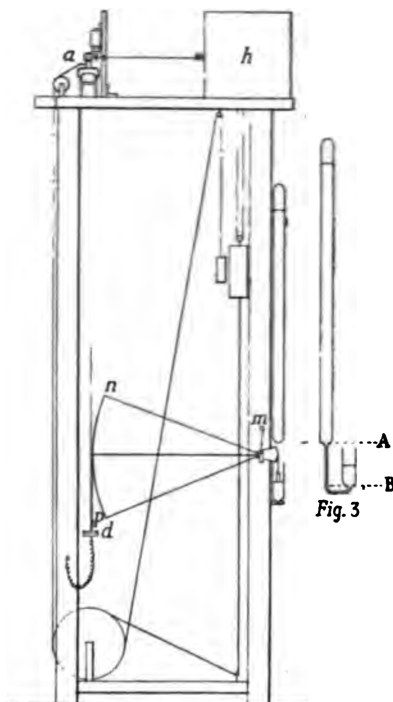
Fig. 1.



perpendiculairement à la première et courbée en arc par des fils de soie. Un fil d'argent très fin part du bouton m, suit les fils de soie supérieurs jusqu'en n, puis descend le long de la chènevotte courbe et se termine à une pointe p en platine entourée d'un peu de cire en quantité suffisante pour contre-balancer presque exactement le poids du flotteur, qui dès lors ne déprime pas le mercure. Le frottement d'un semblable levier, tournant autour de deux pointes d'aiguilles, est très faible. On voit que la variation barométrique se traduira par une variation quintuple dans la hauteur de la pointe p; c'est celle-ci que l'appareil doit enregistrer.

Enregistreur. — Un chariot *bc*, formé d'une règle de bois bien dressée, de 25^{cm} de longueur, repose sur deux rails. Sur ce chariot appuie légèrement un rouleau *a* entouré d'un morceau de tube de caoutchouc. Ce rouleau est centré sur une tige en

Fig. 2.



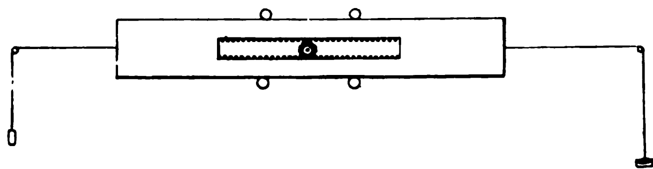
acier qui a été fixée sur le prolongement de l'axe des heures d'une horloge à poids *h*; de sorte que cette horloge fait avancer le chariot dans le sens de la flèche et monter un godet en liège *d* plein de mercure. La *fig.* 2 montre que ce mercure va finir par se trouver en contact avec la pointe *p*. A ce moment, le courant de six éléments Leclanché passe de cette pointe dans le mercure et, de là, dans un électro-aimant dont l'armature maintenait le rouleau *a* appuyé sur le chariot. Le rouleau est alors soulevé et le chariot, devenu libre, recule sous l'action du poids du godet; mais, aussitôt que la pointe *p* a quitté le mercure, le rouleau s'abat

de nouveau sur le chariot et lui fait reprendre sa marche en avant. Une plume fixée au chariot se maintiendra donc à une distance constante de la pointe *p*. La plume repose sur une longue bande de papier enroulée sur un cylindre de bois. (Il a été supprimé *fig.* 1). La descente du poids de l'horloge est utilisée pour dérouler cette bande de papier, en l'enroulant sur un gros cylindre de carton placé au bas de l'appareil. Le fil qui soutient le godet *d* est un fil de platine dont la longueur est choisie de manière à compenser l'effet de la température sur les fils du levier du baromètre. La vis *v*, à laquelle aboutit ce fil, sert pour le réglage. Il serait bon de protéger le quatre faces de l'appareil, à l'aide de portes, celle de devant étant vitrée.

Ce baromètre enregistreur se maintient rigoureusement d'accord avec le baromètre normal, et la simplicité de son mécanisme le rend, pour ainsi dire, indérangeable. A ces deux avantages, il faut ajouter celui de pouvoir être construit à peu de frais. Il convient de changer le mercure du godet toutes les semaines, quand on remonte l'horloge, car ce mercure finit par s'oxyder par suite des étincelles, et le courant ne passant plus que quand la pointe a un peu pénétré, le trait devient trop large.

Enregistrement à distance. — La *fig.* 4 représente une mo-

Fig. 4.



dification du chariot qui permettrait l'enregistrement à distance. C'est une lame guidée par quatre poulies et présentant une fenêtre longitudinale dont les bords portent une crémaillère très fine. Le rouleau est également finement dentelé sur son pourtour. Dans sa position normale, il appuie sur le bord inférieur de la fenêtre et fait avancer le chariot, qu'il fera, au contraire, reculer lorsque, soulevé par l'électro-aimant, il appuiera sur le bord supérieur. Que l'on imagine maintenant deux appareils dont les horloges

soient synchronisées; on voit que, si le même courant traverse les deux électro-aimants, les deux chariots auront des mouvements concordants.

***Enregistreur pour galvanomètre.* — On pourrait construire sur le même principe un enregistreur pour galvanomètre. La lame précédente engrènerait latéralement avec une roue dentée concentrique au galvanomètre et un godet à mercure, porté par cette roue, se maintiendrait constamment au contact de l'aiguille du galvanomètre par un mécanisme analogue à celui que j'ai décrit.**

Lord RAYLEIGH. — **Sur la théorie des forces superficielles** (*Phil. Mag.*, t. XXX, p. 285 et 456; 1891).

Cet intéressant Mémoire renferme une étude des idées trop oubliées de Young, une discussion des hypothèses de Laplace et une méthode nouvelle pour traiter les problèmes de capillarité en partant de la considération d'un potentiel.

C'est Young le premier, quoi qu'en ait dit Laplace lui-même, qui a attribué les phénomènes capillaires aux forces qui produisent la cohésion dans les solides et les liquides; ces forces s'opposaient aux actions répulsives dont l'existence est démontrée pour les gaz et dont il admettait l'existence dans tous les corps. On sait aujourd'hui que la pression des gaz ne peut pas s'expliquer par des forces répulsives variant en sens inverse de la distance, mais qu'on doit faire appel au choc des molécules qui se rencontrent; ces actions s'exercent probablement aussi dans les solides et les liquides; si l'on n'en tient pas compte, on ne donne nécessairement qu'une théorie approchée. Quant aux forces attractives, leur existence a été confirmée; dans les gaz même, M. Van der Waals a montré qu'elles étaient nécessaires.

Si l'on admet que les molécules sont au repos, on devra introduire des forces répulsives pour compenser l'attraction : c'est ce qu'avait fait Young. Bien que ces deux systèmes de forces s'équilibrent mutuellement, il n'en résulte pas qu'on pourrait s'affranchir de leur considération, parce que leur origine et la loi de leur variation sont différentes; de même, la terre supposée au repos

est un solide en équilibre; il existe pourtant une pression et des forces dues à l'attraction universelle. Laplace a considéré une pression intrinsèque, jouant le rôle des forces répulsives, et dont la nature intime nous est inconnue; il est néanmoins utile de développer la théorie appuyée sur ces bases.

L'auteur expose la théorie de Laplace, en s'aidant des travaux de Maxwell, de Thomson et de Dupré; il est un point sur lequel on arrive à un résultat différent de celui de Young; le rapport entre les constantes T et R n'est pas le même.

Young avait introduit des forces répulsives qui étaient, comme ses forces attractives, constantes dans un certain rayon, s'annulaient au delà. Il ne semble pas qu'il y ait intérêt à tenter de perfectionner l'œuvre de Laplace, tant que l'on considère les liquides comme incompressibles, car les forces répulsives sont reliées probablement d'une façon intime à la compression.

On peut retrouver plus directement les résultats de Lagrange en introduisant l'expression du potentiel V des forces attractives; l'équation de l'équilibre s'obtient en écrivant que les variations de ce potentiel et de la pression, d'un point à l'autre, sont égales. Par cette voie, on peut traiter très facilement, en particulier, le cas d'une cavité sphérique, pratiquée dans le liquide, dont le rayon ne soit ni très grand ni très petit par rapport au rayon d'activité moléculaire.

Un groupe très important de phénomènes capillaires est constitué par l'extension indéfinie d'un liquide à la surface d'un autre; on a dit que ces faits démontraient l'existence d'une tension superficielle et étaient en contradiction avec la théorie de Laplace. Pour étudier cette question, l'auteur établit d'abord, par la méthode de Dupré, la relation qui existe entre les tensions capillaires de liquides en contact; d'après la règle de Neumann, les normales à la ligne commune de séparation, situées dans les trois plans tangents, sont parallèles aux côtés d'un triangle; or, les expérimentateurs qui se sont occupés de cette question ont constaté que les inégalités nécessaires pour qu'on pût construire ce triangle n'étaient pas satisfaites. On arrive au même résultat en supposant, comme l'avait suggéré Laplace, que la loi de variation des forces attractives ne diffère, d'un corps à un autre, que par un facteur constant proportionnel à la densité de ce corps.

Les résultats de l'hypothèse de Laplace sont donc, sur ce point, confirmés par l'expérience : il en est de même si l'on cherche suivant quelle loi des couches liquides de densité variable doivent se superposer ; on trouve que la densité varie toujours dans le même sens ; mais la relation qu'on obtient entre les trois tensions superficielles n'est pas exacte. Si l'on conserve néanmoins l'hypothèse on pourra démontrer, en considérant le potentiel et sans faire intervenir les tensions, qu'il est impossible que trois fluides soient deux à deux en contact.

L'équilibre pourra subsister si l'un des trois corps en contact est un solide dont la densité est intermédiaire entre celles des deux fluides ; on détermine généralement l'angle de raccordement en faisant intervenir la notion très vague de tension à la surface d'un liquide et d'un solide ; on peut retrouver les mêmes résultats par une voie plus rigoureuse en introduisant l'énergie des couches superficielles ; d'ailleurs, on trouve dans Laplace une façon assez compliquée de traiter le problème en s'affranchissant même de cette considération.

Laplace avait déduit de sa théorie que la hauteur à laquelle s'arrête le liquide supérieur, quand plusieurs liquides sont superposés dans un tube capillaire, ne dépend que des propriétés du liquide inférieur ; Young avait cru démontrer que l'expérience contredisait cette assertion ; elle est cependant exacte. En effet, un petit mouvement de la colonne liquide totale n'a pour résultat que de faire cesser le contact de l'air et du verre sur une certaine longueur et d'établir le contact du verre et du liquide inférieur sur la même longueur ou inversement. Ceci ne s'applique pas, bien entendu, au cas où l'un quelconque des liquides mouille le tube.

Dans le cas où l'on a un seul liquide jouissant de cette propriété, la théorie permet de prévoir l'extension presque indéfinie le long du tube ; la hauteur que le liquide doit atteindre est proportionnelle à K, et Young évaluait cette quantité à 23 000^{atm}. Pour déterminer le niveau inférieur du ménisque, on considérera un déploiement infiniment petit, dans lequel la couche mince ne change pas de fonction ; on retrouve ainsi facilement la loi connue. Quant à la constante K, elle est égale, comme l'a montré Dupré, au travail de désagrégation totale de l'unité de volume ; on en a

une valeur approchée en la prenant égale à l'équivalent mécanique de la chaleur de vaporisation pour les liquides dont la densité de vapeur est relativement faible; pour l'eau on obtient ainsi 25000^{atm}. Van der Waals a donné 11000^{atm}. Connaissant K et T, Young en a déduit, le premier, les dimensions des molécules.

La formation d'une goutte d'huile à la surface de l'eau ne se produit que quand cette surface est recouverte d'une couche mince de ce même liquide; si la couche est un peu épaisse à un certain moment, il se produit des phénomènes particuliers; l'auteur indique dans quelle voie on pourrait chercher leur explication. C. RAVEAU.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY;

T. XLIV. (Fin.)

G.-D. LIVEING et J. DEWAR. — Influence de la pression sur le spectre des flammes, p. 217.

Un cylindre d'acier était muni à l'une de ses extrémités d'un prisme de quartz, à l'autre d'un tube permettant l'inflammation des gaz. Sur les côtés de ce cylindre étaient adaptés deux autres tubes dont l'un servait à amener les gaz et dont l'autre, muni d'un robinet, permettait de faire écouler l'eau produite par la combustion ou de réduire la pression dans le cylindre.

En brûlant de l'hydrogène dans un excès d'oxygène, on obtenait une flamme jaune qui donnait un spectre continu, seulement interrompu par quelques bandes obscures, peu marquées à la pression de 5^{atm}, mais très nettes à la pression de 20^{atm}. Ces bandes étaient les bandes d'absorption de AzO^2 provenant des traces d'air atmosphérique que contenaient l'oxygène et l'hydrogène. A l'exception des bandes et raies brillantes du sodium, le spectre était continu; il s'étendait environ de λ 6200 à λ 4150, la partie la plus brillante étant située à environ λ 5150. Ce spectre augmentait en éclat et en étendue à mesure que la pression augmentait elle-même. Il ne paraissait y avoir aucune relation entre le spectre continu et le spectre linéaire de l'hydrogène. L'éclat n'augmentait

pas au voisinage des raies C, F et G de l'hydrogène. Les expériences ont été poussées jusqu'à une pression de 40^{atm}.

En brûlant de l'oxygène dans un excès d'hydrogène, la couleur de la flamme était bleuâtre. Dans ce cas, le spectre était parfaitement continu, son maximum d'éclat se trouvait dans le vert et l'intensité allait s'affaiblissant graduellement de chaque côté de ce maximum. Aux pressions ordinaires, il s'étendait de λ 6150 dans le rouge à λ 4285 dans le violet. Les raies du sodium manquaient. A mesure que la pression augmentait, l'éclat du spectre augmentait également et à 8^{atm}, il s'étendait de λ 6630 à λ 3990. Les expériences ont été poussées jusqu'à 25^{atm}.

Des expériences faites sur de l'hydrogène chargé de vapeurs de sodium ont montré qu'aucun effet net n'est produit sur la largeur des raies par l'élévation de la pression à 40^{atm}.

Un mélange d'oxygène et d'hydrogène (avec un léger excès d'oxygène) donnait, dans l'acide carbonique comprimé, un spectre ne contenant ni raies, ni bandes obscures ou brillantes, à l'exception des raies D du sodium. Ce spectre ressemblait au spectre ordinaire de l'oxyde de carbone.

L'éthylène, brûlant dans l'oxygène, donnait, pour une petite flamme, le spectre habituel d'une flamme de bougie, avec une bande dans l'indigo (λ 431), s'obscurcissant vers le violet. Quand la pression atteignait 33^{atm} on obtenait un spectre continu, interrompu seulement par les bandes d'absorption de AzO^2.

Avec des mélanges de 3 volumes d'oxygène et de 1 volume de cyanogène, on obtenait un spectre continu avec des raies du fer, du calcium, du potassium et du sodium, mais on ne voyait ni les bandes du cyanogène et du carbone, ni les raies du carbone.

Il semble donc que le trait caractéristique de la lumière émise par les flammes à haute pression soit de produire un spectre très continu.

Les observations photométriques ont, en outre, montré que, pour les flammes d'oxygène brûlant dans une atmosphère d'hydrogène, les intensités sont sensiblement proportionnelles aux carrés des pressions.

S.-P. THOMPSON. — Sur la focométrie des lentilles et des combinaisons de lentilles et sur un nouveau focomètre, p. 225.

L'auteur a imaginé une méthode de focométrie dans laquelle on n'a ni à effectuer une double manipulation, ni à mesurer les dimensions d'images optiques, ni à déterminer les positions ou les distances approchées d'aucun point, sauf celles des deux points principaux (points de Gauss) et qui permet de déterminer la vraie longueur focale et la distance entre les deux points principaux par des mesures directes de longueurs.

Le principe de la méthode repose sur la détermination des *points symétriques* conjugués et situés, de part et d'autre des lentilles, à une distance des points principaux égale à deux fois la longueur focale vraie.

W. ABNEY. — Classification numérique des couleurs (Note préliminaire), p. 227.

Une couleur est déterminée lorsque sa teinte, son éclat et sa pureté sont connus. Cette dernière constante est déterminée par la comparaison de la lumière colorée avec la lumière blanche qui n'a pas encore traversé le corps coloré transparent sur lequel on expérimente, ou avec la lumière blanche réfléchie par une surface blanche s'il s'agit d'un corps opaque coloré.

L'auteur est arrivé, par un calcul simple, à exprimer la teinte et l'éclat d'une couleur composée quelconque, en fonction d'une certaine quantité de lumière blanche et d'une raie simple du spectre. Il a évalué, par des mesures photométriques, la longueur d'onde dominante, la proportion de lumière blanche et l'éclat de la lumière passant à travers divers verres colorés ou réfléchie par divers pigments.

RENÉ PAILLOT.

THE AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE;

3ᵉ série, t. XLII.

CHARLES-K. WEAD. — Sur l'intensité du son : II. L'énergie dépensée par des tuyaux d'orgue, p. 21.

On puise l'air qui est lancé dans différents tuyaux à un gazomètre ; on mesure le temps nécessaire pour en vider une fraction détermi-

née; ayant le volume et la pression, on peut avoir l'énergie mise en jeu. M. Bosanquet, qui avait institué autrefois des expériences sur ce sujet, avait déclaré vérifier ce qu'il appelait la *Loi de Töpfer*, à savoir que la dépense de vent par des tuyaux montés sur le même jeu varie en raison directe de la longueur du tuyau. L'auteur ne trouve pas que ses expériences s'accordent avec cette loi : le rapport des quantités de vent dépensées dans deux tuyaux accordés à l'octave est toujours $> 0,5$; et ce rapport varie d'ailleurs avec les conditions de l'expérience.

CARL BARUS. – Continuité de l'état solide et de l'état liquide, p. 125.

Un piézomètre très résistant est divisé dans sa partie moyenne en deux compartiments cylindriques par un tube cylindrique intérieur, ouvert à sa partie inférieure et se raccordant par sa partie supérieure aux parois du réservoir. On a ainsi un espace annulaire fermé en haut, et par le bas en communication avec l'extérieur par l'intermédiaire du tube central. C'est cet espace annulaire qui contiendra le corps à étudier; au-dessous est du mercure, qui remplit le fond du réservoir, et qui monte plus ou moins haut dans le tube central, suivant le volume du corps. On mesure la hauteur du mercure, et par suite le volume du corps, en remplissant la partie supérieure de l'appareil d'une solution de sulfate de zinc où vient plonger une lame de zinc amalgamé, et l'on détermine la résistance électrique entre le haut et le fond du piézomètre. Plusieurs corrections importantes sont à effectuer.

Les expériences ont porté sur la naphtaline; on a pu tracer des courbes isothermiques relatives à l'état solide et à l'état liquide; ces courbes ressemblent aux courbes représentatives de la liquéfaction des gaz; l'expérience a permis de déterminer certains points sur la portion de courbe hypothétique de James Thomson. Il est vraisemblable qu'il existe un *point critique*, auquel le passage de l'état solide à l'état liquide se ferait sans changement de pression dans la naphtaline : il serait sans doute à plusieurs centaines de degrés de température, et à une pression de 5000 à 1000^{atm}. Dans le cas normal, une substance se solidifie à une plus basse pression que celle à laquelle elle fond, à une même température; mais les courbes prolongées, du côté des pressions décroissantes,

se rencontreraient; en ce point de rencontre, il y aurait passage de la fusion normale à la fusion du type de la glace : ce point est un *point de transition*. Il serait placé pour la naphtaline à 50° et à la pression *négative* de 1000^{atm}.

JOHN TROWBRIDGE. — Amortissement des oscillations électriques dans les fils de fer, p. 223.

M. Trowbridge a étudié l'influence de la nature magnétique de fils conducteurs sur les oscillations provenant d'une bouteille de Leyde, il trouve une influence très notable. Avec le fer, les oscillations peuvent être réduites jusqu'à une demi-oscillation d'un circuit de self-induction et de capacité convenable pour les produire. Les courants de haute fréquence aimantent donc certainement le fer [1].

FRANK BIGELOW. — Note sur les causes de variation de l'aiguille aimantée, p. 253.

Les variations de l'aiguille aimantée peuvent s'interpréter en partie en admettant que la lumière rayonnée du Soleil produit un champ de force uniforme, dont la direction positive est tournée vers le Soleil. Il y a peut-être là, selon l'auteur, un accord avec les idées actuelles qui font de la lumière un phénomène électromagnétique.

CHARLES THWING. — Photographie des couleurs par la méthode de Lippmann, p. 388.

L'application de la méthode de Lippmann a donné lieu à quelques remarques intéressantes. Les couleurs mélangées peuvent être reproduites avec une grande fidélité, bien que dans certains cas cette reproduction donne lieu à des changements curieux. Un épaississement de la pellicule entre l'exposition et le séchage final amène un déplacement de toutes les couleurs vers l'extrémité rouge du spectre. Avec une pose assez longue pour donner une bonne

---

[1] L'auteur renvoie, pour la description de ses appareils, aux *Proceedings of Ann. Acad. of Arts and Sciences*, t. XXV, p. 109.

image dans le rouge, on est sûr d'avoir un excès de pose pour le bleu. Un excès de pose peut renverser complètement les couleurs, amener à voir les couleurs vraies par transparence et les complémentaires du côté de la plaque où est la pellicule.

CUTTER. — Acoustique d'un auditoire, p. 468.

Quelques réflexions sur les notes propres à une salle donnée et sur l'utilité qu'il y a à se rendre compte de ces notes propres, ce que l'on peut faire en chantant ou en y jouant d'un instrument connu, avant de parler dans cette salle.

BERNARD BRUNHES.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annales de Chimie et de Physique.

6e série, tome XXV; février 1892.

PH.-A. GUYE. — *Étude sur la dissymétrie moléculaire* (1er Mémoire), p. 145.

BERTHELOT. — *Quelques nouveaux détails sur l'invention du scaphandre*, p. 287.

Mars 1892.

LESCŒUR. — *Recherches sur la dissociation des hydrates salins et des composés analogues*, p. 423.

Avril 1892.

CAILLETET et COLARDEAU. — *Nouvelle méthode de détermination du point critique. Application de cette méthode au cas particulier de la vapeur d'eau saturée*, p. 519.

A. CROVA. — *Sur l'analyse de la lumière diffusée par le ciel*, p. 534.

R. SAVÉLIEF. — *Détermination de la constante solaire*, p. 567.

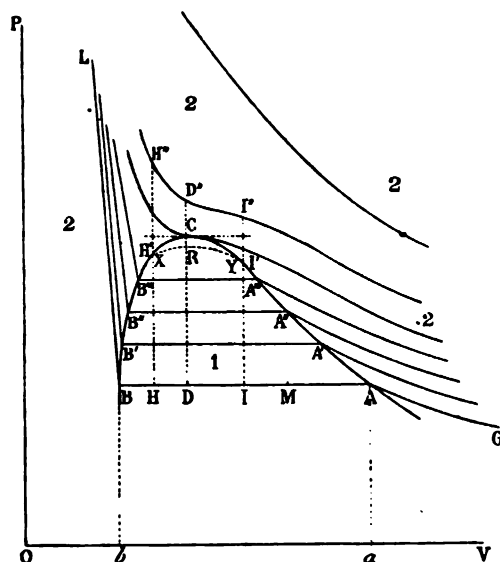
DE LA DÉFINITION ET DE LA DÉTERMINATION DU POINT CRITIQUE;

Par M. H. PELLAT.

Quoique les quelques considérations qui suivent soient très simples et que probablement plusieurs professeurs les aient déjà, comme nous, exposées dans leur cours, nous pensons pourtant qu'il est utile de les publier pour élucider certaines questions touchant le point critique.

On sait qu'Andrews (¹) a déterminé expérimentalement la relation qui existe entre le volume et la pression de l'acide carbonique à la même température, ce qui lui a permis de tracer les lignes isothermes de ce corps en portant en abscisse les volumes et en ordonnée les températures, suivant la représentation de Clapeyron. La *fig.* 1, bien connue, représente le résultat de ce remarquable travail.

Fig. 1.



Au-dessous de 31°, chaque isotherme présente une partie recti-

(¹) *Phil. Trans.*, 1869; *Ann. de Chimie et de Phys.*, 4ᵉ série, t. XXI.

ligne AB, parallèle à l'axe des volumes, correspondant à la liquéfaction du gaz. Le point A correspond à l'état dans lequel toute la masse d'acide carbonique, que nous prendrons égale à l'unité, est à l'état de vapeur saturante; son abscisse Oa représente donc le volume spécifique u de la vapeur saturante. Le point B correspond à l'état où la masse est entièrement à l'état de liquide sous la pression de la vapeur saturante, et son abscisse Ob représente le volume spécifique u' de ce liquide. Un point M pris sur AB correspond à un état dans lequel une fraction x de la masse est à l'état de vapeur et une fraction x' est à l'état liquide ($x + x' = 1$); on démontre aisément qu'on a la relation

$$\frac{x}{x'} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}. \tag{1}$$

A mesure que la température s'élève, la portion rectiligne AB de l'isotherme se raccourcit, le volume spécifique du liquide u' devenant plus grand et le volume spécifique de la vapeur saturante u devenant plus petit. Pour une température un peu supérieure à 31°, la partie rectiligne AB devient nulle, c'est-à-dire que l'isotherme présente en C un point d'inflexion à tangente horizontale, direction de la portion AB devenue infiniment petite. A partir de cette température, les isothermes présentent une inflexion moins marquée, qui diminue de plus en plus pour disparaître totalement à mesure que l'on considère des températures plus élevées.

Si l'on joint par un trait continu tous les points A et tous les point B, ces deux lignes se rencontrent en C, qui est la limite des points A et des points B; leur ensemble ne donne qu'une seule courbe ACB présentant en C une tangente horizontale. Comme on le sait, cette courbe divise le plan en deux régions, l'une (1) où l'état liquide et l'état gazeux peuvent coexister, l'autre (2, 2, 2) où un seul état fluide peut seul exister, et où l'on trouve tous les intermédiaires entre l'état parfaitement gazeux et l'état parfaitement liquide.

Les travaux de plusieurs physiciens, et en particulier de M. Ramsay [1], ont montré que l'allure des isothermes est la même pour d'autres fluides que l'acide carbonique, et il n'y a

[1] *Proceedings of the Royal Society*, t. XXXI, p. 194; 1880.

aucun doute que telle soit la forme générale des isothermes pour tous les fluides.

Il était nécessaire de rappeler ces faits bien connus pour la clarté de ce qui va suivre.

Le point C où l'isotherme présente un point d'inflexion à tangente horizontale a été appelé le *point critique;* la température, la pression et le volume correspondant du corps ont été appelés la *température critique* (T_c), la *pression critique* (P_c) et le *volume critique* (V_c) du corps.

Il existe une définition différente de la température critique, c'est celle qui découle de l'expérience classique de Cagniard-Latour : plusieurs auteurs appellent température critique la température (t_c) à laquelle la surface de séparation du liquide et de sa vapeur disparaît, car on a cru longtemps qu'on avait $T_c = t_c$.

De très intéressantes expériences de MM. Cailletet et Colardeau (¹) permettent de démontrer que ces deux températures ne sont pas égales, et qu'on a $t_c < T_c$. Ces auteurs ont trouvé en effet qu'à la température t_c où disparaît le ménisque, *la densité du liquide est supérieure à la densité de la vapeur saturante.* Or, d'après la définition de T_c, à cette température, il y a égalité entre la densité de la vapeur et la densité du liquide, puisqu'au point critique C, la ligne AB, qui représente la différence ($u - u'$) des volumes spécifiques du liquide et de la vapeur saturante, est devenue nulle.

Il reste à savoir maintenant si ces deux températures T_c et t_c sont voisines ou éloignées l'une de l'autre. Les considérations suivantes pourront aider à résoudre cette question.

Si l'on veut répéter l'expérience de Cagniard-Latour en mettant dans le tube scellé très peu de liquide et, par conséquent, beaucoup de sa vapeur, le point figuratif de l'état du système à froid sera sur l'isotherme correspondant en un certain point I plus voisin de A que de B. Pendant l'échauffement du tube, la transformation du système sera représentée par une droite II'I'' parallèle à l'axe des pressions, si l'on néglige la dilatation du tube de verre. On voit que la droite II'I'' coupe les portions rectilignes des diverses

(¹) *Soc. franc. de Phys.*, séance du 21 juin 1889; *Journ. de Phys.*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 389.

isothermes en des points tels que le rapport des segments analogues à $\frac{MA}{MB}$ diminue de plus en plus pour devenir nul en I′ où la droite II′I″ coupe la courbe ACB. Ceci veut dire que la proportion de liquide ira constamment en diminuant à mesure que la température s'élèvera jusqu'à devenir nulle pour le point I′. C'est bien ce qu'on observe en effet (1er *cas*).

Au contraire, si au début la proportion de liquide l'emporte de beaucoup sur celle de la vapeur, de façon que le point figuratif se trouve en H sur l'isotherme AB, en chauffant à volume constant, la droite HH′H″ montre que la proportion de liquide va aller constamment en croissant jusqu'à remplir totalement le tube, ce qui aura lieu quand le point figuratif arrivera à l'intersection H′ de cette droite et de la courbe ACB (2e *cas*).

Enfin, si l'on met dans le tube *exactement* la proportion de liquide et de sa vapeur représentée sur l'isotherme AB par le point D de même abscisse que le point critique C, l'échauffement à volume constant sera représenté par la droite DCD″ : la proportion de liquide et de sa vapeur variera peu, et, au moment où le point figuratif atteindra le point C, les deux états liquides et gazeux se confondront (3e *cas*).

Mais on voit que pour peu que le point figuratif au départ se trouve à droite ou à gauche du point D nous serons dans le premier ou dans le second cas considéré : il y aura ou disparition totale du liquide ou disparition totale de sa vapeur avant d'atteindre la température critique.

Or, l'expérience prouve qu'on peut faire varier entre d'assez larges limites les proportions primitives de liquide et de sa vapeur et que la disparition du ménisque se produit néanmoins pour une certaine température t_c, avant, par conséquent, que la droite figurative de l'échauffement à volume constant rencontre la courbe ACB. Il faut en conclure que la ligne XRY correspondant aux états où se fait la disparition du ménisque est au-dessous de la partie supérieure XCY de la courbe ACB et qu'elle coupe cette courbe en deux points X et Y notablement écartés l'un de l'autre. C'est ainsi que la considération des isothermes d'Andrews peut faire prévoir le résultat obtenu par MM. Cailletet et Colardeau dans les expériences rappelées plus haut, à savoir que *le liquide et sa va-*

peur persistent avec des densités différentes au delà de la température où a lieu la disparition du ménisque.

Si la ligne XRY que nous venons de définir est une droite horizontale, elle correspond à une pression p_c et à une température t_c parfaitement définie ; c'est ce qu'on admet habituellement, mais d'après des données expérimentales peut-être insuffisantes. Si la ligne XRY est courbe, on voit que la pression p_c et les températures t_c où se produit la disparition du ménisque dépendront des proportions primitives de liquide et de vapeur. Des expériences comparatives faites avec divers tubes contenant des proportions différentes du liquide et de sa vapeur placés dans le même bain pourront seules trancher cette question.

La considération des lignes d'échauffement à volume constant II′I″, DCD″, HH′H″ conduit encore à la remarque suivante. Quelle que soit celle de ces lignes que l'on considère, c'est-à-dire quelles que soient les proportions primitives du liquide et de sa vapeur, tant que l'échauffement est inférieur à celui pour lequel le point figuratif sort de la région 1 du plan (points I′, C ou H′), à une même température la pression est la même, étant celle de la vapeur saturante; mais quand ces lignes pénètrent dans la région 2, 2, 2 du plan, elles coupent une même isotherme en des points I″, D″ et H″ qui n'ont pas la même ordonnée, c'est-à-dire que les pressions correspondant à la même température deviennent différentes. Ainsi c'est aux points I′, C ou H′, où les lignes d'égal volume coupent la courbe ACB que la pression cesse d'être une fonction de la température indépendante des proportions primitives du liquide et de sa vapeur.

C'est bien le résultat qu'ont obtenu MM. Cailletet et Colardeau dans les remarquables expériences qui leur ont servi à fixer le point critique de l'eau (1) : les lignes représentant la pression en fonction de la température pour diverses proportions de liquide et de sa vapeur se confondent d'abord, puis s'écartent individuellement du faisceau commun, les unes au-dessus (point H′), les autres au-dessous (point I′).

Mais ce qui justifie la méthode employée par ces auteurs pour

---

(1) *Ann. de Chimie et de Phys.*, 6e série, t. XXV (avril 1892); *Journ. de Phys.*, 2e série, t. X, p. 333.

trouver le point critique, c'est que les dernières courbes qui s'écartent du faisceau commun le font presqu'en un même point, puisque les coordonnées de la courbe ACB passent par un maximum pour le point C; c'est ce point le plus éloigné qu'ils ont, avec raison, considéré comme étant le point critique C.

Si la partie supérieure de la courbe ACB est assez aplatie et si la ligne XRY est une droite horizontale ou à peu près, il peut se faire que celle-ci soit voisine partout de la courbe XCY et, par conséquent, que t_c diffère peu de T_c comme on l'admet généralement; mais cela n'est pas sûr, et c'est l'expérience qui doit répondre à cette question : l'expérience de Cagniard-Latour donne t_c, et la méthode employée par MM. Cailletet et Colardeau dans leurs recherches sur le point critique de l'eau donne T_c.

Comme nous l'avons vu, la disposition expérimentale de MM. Cailletet et Colardeau permet d'obtenir les divers points de la courbe ACB; des expériences analogues aux leurs pourront ainsi faire connaître cette courbe; en menant une tangente horizontale à son sommet on obtiendra le point critique. Ce procédé aurait l'avantage de faire concourir à la détermination du point critique des observations, où le tube se remplit de vapeur ou de liquide même à une température assez éloignée du point critique. Du reste la courbe ACB présente un grand intérêt en elle-même.

Comme conclusion, on voit qu'il est impossible de conserver un même nom aux températures t_c et T_c: or, comme nous l'avons vu, nous ne sommes pas sûr, dans l'état actuel de la science, que t_c soit une température unique pour un même corps; du reste, cette température n'intéresse que le phénomène même de la disparition du ménisque, qui en donne la définition. Aussi doit-on réserver le nom de *température critique* à la température T_c qui est parfaitement définie et d'un intérêt très général. Les données du point critique, en effet, permettent de déterminer les constantes de l'équation caractéristique de Van der Waals ou de Clausius et, par conséquent, permettent, jointes à une chaleur spécifique, de former la fonction caractéristique de M. Massieu, d'où l'on peut déduire ensuite toutes les propriétés mécaniques et thermiques du fluide considéré.

Or, les seules méthodes qui jusqu'ici fournissent avec exactitude

le vrai point critique sont : 1° la méthode d'Andrews; 2° cette méthode tout récemment employée par MM. Cailletet et Colardeau dans le cas de l'eau; 3° la mesure directe des volumes spécifiques du liquide et de la vapeur saturante à une même température, qu'on fait croître jusque dans le voisinage du point critique; cette méthode a été employée par plusieurs physiciens, en particulier par MM. Cailletet et Mathias ([1]) et par M. Amagat ([2]).

Malgré les beaux travaux que nous venons de rappeler, il reste encore beaucoup à faire dans cette voie au point de vue expérimental. Nous serions heureux si la lecture de cet article pouvait provoquer quelques nouvelles recherches sur ce sujet.

SUR LA DENSITÉ DES GAZ OXYGÈNE, AZOTE, HYDROGÈNE, ET LA COMPOSITION DE L'AIR ATMOSPHÉRIQUE;

PAR M. A. LEDUC.

On a vu ([3]) comment j'ai été amené à reprendre les déterminations de Dumas et de Regnault, en commençant par la densité de l'azote.

Quelques expériences préliminaires, faites en juillet 1890 dans des conditions peu favorables, me donnèrent des nombres compris entre 0,972 et 0,973. J'insisterai seulement sur une particularité de ces expériences. N'ayant à ma disposition qu'une petite balance pesant 50^{gr} à $\frac{1}{20}$ de milligramme près, je dus me servir d'un ballon en verre soufflé d'un quart de litre. Ce ballon, bien que trop petit pour les expériences de grande précision, permet, comme on le voit, de déterminer les densités à moins d'un millième près. Il me paraît convenable d'employer, pour les mesures plus précises, un ballon de deux à trois litres; mais je crois qu'un gros ballon comme celui de Regnault présente plus d'inconvénients que d'avantages.

([1]) *Journal de Physique*, 2e série, t. V, p. 549, et t. VI, p. 414. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, 1892.

([2]) *Soc. franç. de Phys.*, séance du 20 mai 1892.

([3]) *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 37; 1891.

J'ai suivi, en général, la méthode de Regnault, en y apportant quelques perfectionnements que je vais indiquer.

I. — Causes d'erreurs dans les expériences de Regnault. Modifications.

La plupart des erreurs commises par Regnault dans la détermination des densités sont accidentelles et susceptibles de se produire en des sens contraires, de sorte qu'elles disparaissent à peu près dans les moyennes, ainsi que nous le verrons plus loin; mais il est clair que les moyennes ont d'autant plus de valeur qu'elles sont prises entre des nombres plus rapprochés; aussi ne me paraît-il point sans intérêt d'éviter, dans les mesures, toute erreur susceptible d'altérer la dernière décimale que l'on se propose d'obtenir.

D'un autre côté, pour ne point se faire d'illusion sur la valeur de cette dernière décimale, il convient de se rendre compte des erreurs inévitables. Il est facile de voir, par exemple, que la cinquième décimale, que donne généralement Regnault pour la densité des gaz, est dénuée de sens, et qu'il faut s'estimer heureux de pouvoir garantir la quatrième.

1° *Pression*. — La mesure de la pression du gaz que l'on a pesé comporte, en effet, à elle seule, une erreur relative qui dépasse facilement le dix-millième.

La mesure de la pression atmosphérique au moyen du baromètre normal comporte quatre lectures au cathétomètre et un affleurement; de là cinq erreurs probables qui dépassent généralement le centième de millimètre et peuvent s'ajouter.

De plus, la verticalité de la tige à deux pointes est bien difficile à réaliser d'une manière parfaite, d'autant plus que la vis ballotte toujours un peu dans son écrou [1]. J'ai constaté qu'il peut en résulter une erreur de plusieurs centièmes de millimètre. D'ailleurs l'emploi de cette tige a le tort de compliquer la correction de température.

[1] Cela est inévitable, les deux pièces se dilatant très inégalement; on sait que c'est là le défaut, peut-être unique mais assez grave, des vis micrométriques.

Afin d'éviter ces inconvénients et de réduire les erreurs à celles de deux lectures, j'ai disposé, à cheval sur le côté voisin de la cuvette, un petit tube en S dont la partie libre a un diamètre égal à celui du tube barométrique. Le baromètre normal, ainsi modifié, jouit des avantages du baromètre à siphon.

Le tube témoin qui sert à mesurer la température du baromètre est placé à mi-hauteur et très près de celui-ci.

En outre, des joues métalliques fixées à la planchette protègent les tubes contre les courants d'air. Dans ces conditions, il est probable que la température du mercure est connue à moins de $\frac{1}{10}$ de degré près.

Le tube manométrique, placé aussi près que possible du baromètre, est muni d'un robinet de verre qui permet de ne le mettre en communication avec le reste des appareils que pendant la mesure des pressions résiduelles, de sorte qu'il reste constamment plein de mercure. Il a donc, à très peu près, la température du baromètre, tandis que, si l'on ne fait monter le mercure dans ce tube qu'au moment des mesures, il peut y avoir une différence de plus d'un demi-degré entre les deux colonnes, et l'on sait qu'une erreur de $0°,1$ correspond à une erreur $> 0^{mm},01$ sur la hauteur de la colonne barométrique.

En résumé, je crois que, dans les cas les plus défavorables, je connais la pression du gaz pesé à moins de $0^{mm},04$ près, ce qui correspond à une erreur relative de $\frac{1}{20000}$.

2° *Vide. Essuyages.* — Regnault tare d'abord son ballon rempli de gaz, puis rétablit l'équilibre après y avoir fait le vide à quelques millimètres près, au moyen d'une machine pneumatique ordinaire.

Il est clair que, si cette machine présente des fuites, le gaz résiduel peut être mélangé d'air atmosphérique.

En outre, et cela me paraît plus grave, l'essuyage du ballon a pour effet de lui faire perdre de son poids, un peu par usure réelle et dissolution du verre dans l'humidité du linge, mais surtout par enlèvement de la graisse du robinet.

On peut voir que la perte de poids subie par le ballon de Regnault après deux essuyages s'est élevée à $0^{gr},01$ entre les pesées à vide I et II, III et IV sur l'air. Il est vrai qu'une différence de

$3^{mgr},5$ en sens contraire s'est produite entre les vides V et VI; mais cette augmentation de poids est probablement due à l'introduction de quelque corps étranger dans le ballon. L'eau absorbée et retenue par les mastics des garnitures métalliques doit être aussi pour quelque chose dans ces variations.

Je considère donc comme indispensable d'opérer comme il suit :

Le vide est fait au moyen d'une machine à mercure entièrement dépourvue de fuites ainsi que toute la canalisation. J'atteins facilement une pression voisine de $0^{mm},1$. Le ballon, essuyé avec soin au moyen d'un linge légèrement humide, est porté dans la balance dont l'air est bien desséché; je ne constate l'équilibre que le lendemain. Puis le ballon est rempli à 0° du gaz étudié et taré de nouveau. Enfin je refais le vide et je rétablis l'équilibre une troisième fois. Je calcule alors le poids de gaz qui remplirait le ballon dans les conditions normales au moyen de la première et de la deuxième, puis au moyen de la deuxième et de la troisième pesée. Il est clair que le deuxième résultat *doit être plus grand* que le premier, et que l'on éliminera sensiblement l'erreur due aux essuyages en prenant la moyenne de ces deux nombres.

Il est prudent de rejeter toute expérience dans laquelle le deuxième poids se trouve notablement plus petit que le premier; car cela est dû, en général, à l'introduction de quelque poussière dans le ballon.

Dans mes expériences, la diminution de poids du ballon, après deux essuyages, a très rarement dépassé 1^{mgr} et s'est élevée, en moyenne, à $0^{mgr},3$ par essuyage. Il n'en peut résulter, sur chaque groupe de deux pesées, qu'une erreur inférieure à $0^{mgr},3$.

3° *Balance.* — La balance de précision dont je me sers peut porter 500^{gr}; j'ai pu faire des pesées à $\frac{1}{10}$ de milligramme près, en observant, au moyen d'une lunette à réticule, le déplacement de l'aiguille indicatrice sur un arc finement divisé.

Entre autres précautions prises pour que les deux bras du fléau ainsi que les deux ballons soient à la même température, j'entoure d'une feuille de zinc la cage de verre de la balance; j'en ai constaté directement l'utilité.

Il est à peine besoin d'ajouter que j'ai étalonné la boîte de poids

de précision dont je me suis servi; j'ai admis seulement la valeur absolue du poids de 20^{gr}, le plus gros de la série.

On voit qu'en résumé la somme des erreurs commises dans chaque groupe de deux équilibres, c'est-à-dire sur chaque poids de gaz, ne peut guère dépasser $0^{mgr},6$. Cela correspondrait à une erreur relative de $\frac{2}{10000}$ dans le cas de l'air, erreur assez importante. Mais si l'on groupe trois équilibres, c'est-à-dire deux pesées consécutives, l'erreur est singulièrement diminuée pour les raisons exposées plus haut, et l'on peut compter sur le $\frac{1}{10000}$, ainsi qu'il résulte de ce qui va suivre.

4° *Ballons. Compressibilité.* — Les ballons dont je me suis servi sont dépourvus de garniture métallique. Leur col est prolongé par un tube de verre muni d'un robinet soigneusement rodé. Ils ont un volume voisin de $2^{lit},3$. L'absence de mastic susceptible d'absorber plus ou moins d'eau et la diminution du poids mort compensent largement la petitesse relative de ces ballons.

Enfin, une cause d'erreur signalée déjà par Lord Rayleigh, et qui a échappé ici à Regnault, bien qu'il en ait tenu compte ailleurs, est la diminution de volume que subit le ballon quand on y fait le vide. Je l'ai mesurée directement et trouvée égale à $0^{cc},5$ environ; il faut, en conséquence, ajouter un peu plus de $0^{mgr},6$ au poids de gaz résultant des lectures brutes. Cette cause d'erreur altère assez fortement les densités des gaz beaucoup plus lourds ou plus légers que l'air, et spécialement celle de l'hydrogène.

J'ajouterai enfin que j'ai tenu compte de la petite quantité de gaz contenue dans la chambre de mon baromètre. J'ai déterminé la pression de ce gaz par un moyen que j'espère utiliser pour l'étude de la compressibilité des gaz aux faibles pressions.

II. — Résultats.

J'arrive maintenant à l'exposé de mes résultats, et je commence par ceux relatifs à l'air et à l'hydrogène, parce qu'ils présentent avec les nombres de Regnault une concordance parfaite et fournissent ainsi un contrôle précieux de mes expériences sur les autres gaz.

Je m'occuperai ensuite de l'azote et de l'oxygène pour lesquels j'ai trouvé des nombres assez différents de ceux de Regnault.

1° *Poids du litre d'air normal.* — J'ai fait six expériences au moyen d'un ballon dont j'ai déterminé avec soin la capacité intérieure par le procédé de Regnault; cette capacité est à 0° de $2^{lit},26506$ à moins de $0^{cc},1$ près, y compris le canal du robinet.

Or les poids d'air normal remplissant ce ballon se sont trouvés compris entre $2^{gr},9286$ et $2^{gr},9290$. Il convient d'y ajouter 0,0006 pour tenir compte de la contraction du ballon vide. Le poids du litre d'air normal est donc d'après cela

$$\frac{2,9288 + 0,0006}{2,26506} = 1^{gr},2933,$$

soit pour la masse du litre d'air sous la pression d'une atmosphère C.G.S. : $1^{gr},2760$.

Le nombre de Regnault corrigé de la contraction du ballon vide, et en laissant de côté les deux dernières décimales qui n'ont aucun sens, est de 1,2934; mais il faut remarquer que les 9 nombres dont il est la moyenne varient de 1,2931 à 1,2937 environ, tandis que mes nombres présentent un écart quatre fois plus faible. La différence est d'ailleurs dans le sens prévu (essuyage).

2° *Densité de l'hydrogène.* — J'ai préparé ce gaz de deux manières :

α. *Par l'électrolyse d'une solution de potasse à* 30 *pour* 100. — Je fais traverser au gaz :

1° Une colonne à potasse pour arrêter les matières entraînées et le sécher à peu près;

2° Un tube de verre étroit, rempli de mousse de platine sur une longueur de 10^{cm} et maintenu au rouge afin de détruire le peu d'oxygène entraîné par suite de la diffusion;

3° Un barbotteur contenant une solution très concentrée de potasse puis une colonne de potasse (fondue spécialement);

4° Enfin le gaz, comme tous ceux que j'ai préparés, passe avant d'entrer dans le ballon sur de l'acide phosphorique anhydre, afin d'assurer une dessiccation parfaite. (Ce corps a été traité par un courant d'oxygène à température élevée afin de peroxyder les oxydes inférieurs du phosphore.)

Deux séries d'expériences faites avec deux ballons différents et

dans l'intervalle desquelles l'appareil avait été remanié m'ont donné pour la densité de l'hydrogène

0,06947 et 0,06949.

β. *Hydrogène préparé au moyen du zinc du commerce et de l'acide sulfurique.* — Le gaz traverse :

1° Une colonne de pierre ponce imbibée d'une solution saturée de permanganate de potasse avec excès d'alcali;
2° Une colonne de potasse;
3° Une longue colonne de cuivre incandescent;
4° Le barbotteur et le reste comme ci-dessus.

Densité de ce gaz .... 0,06947.

On voit que l'hydrogène préparé par ces deux procédés, s'il n'est pas rigoureusement pur, contient moins de $\frac{1}{50000}$ d'impuretés.

Vu l'incertitude qui règne nécessairement sur la dernière décimale, on peut admettre que la densité de l'hydrogène est 0,06947.

Le poids du litre d'hydrogène normal est donc $0^{gr},08984$ à moins de $\frac{1}{20}$ de milligramme près. C'est précisément le nombre trouvé par Regnault (correction faite) pour l'hydrogène préparé par le zinc et purifié au moyen de chlorure de mercure.

3° *Densité de l'oxygène.* — L'oxygène a été préparé par électrolyse, tantôt d'une solution de potasse, tantôt d'eau acidulée par l'acide sulfurique.

Le gaz traverse comme ci-dessus une colonne de mousse de platine incandescente.

L'expérience faite à trois reprises avec trois ballons différents, et après avoir modifié l'appareil, a donné pour la densité des nombres compris entre 1,10501 et 1,10516 et dont la moyenne est 1,10506.

Je donnerai, à titre d'exemple, une série de déterminations faites avec le même ballon que ci-dessus sur l'oxygène obtenu par électrolyse de la potasse.

Pression réduite à 0°.	Tare (simple pesée).	Tare calculée du ballon complètement vide.	Poids du gaz.	Différence des pressions.	Poids du gaz normal.
mm 0,21...	0,0591	0,0582	3,2634	766,48	3,2358
766,69...	3,3225	»	3,2648	766,55	3,2369
0,14...	0,0577	0,0571	3,2347	759,65	3,2362
759,79...	3,2924	»	3,2351	759,62	3,2367
0,17...	0,0573	0,0566			
			Moyenne............		3,2364

qui correspond à la densité 1,10501.

D'après Regnault, la densité de l'oxygène extrait du chlorate de potasse est 1,10563. On voit que les composés chlorés qui accompagnent ce gaz modifient notablement la densité.

4° *Densité de l'azote.* — Le procédé qui m'a paru le plus sûr et le plus commode pour préparer l'azote pur consiste à faire passer sur du cuivre porté au rouge de l'air préalablement dépouillé de la vapeur d'eau, de l'acide carbonique et des autres gaz absorbables par la potasse. Il convient, comme l'on sait, d'oxyder d'abord le cuivre pour le débarrasser des graisses et autres matières combustibles qui peuvent le recouvrir, puis de le réduire par l'hydrogène pur. Cette opération, qui a pour but principal d'éviter les produits gazeux de combustion, a en outre l'avantage de rendre le cuivre plus poreux ; mais elle a l'inconvénient de fixer sur le cuivre une certaine quantité d'hydrogène. J'ai montré (1) qu'il se forme un hydrure de cuivre dissociable au rouge vif. Il en est résulté notamment dans les expériences de Regnault que l'azote dont ce savant a pris la densité contenait de l'hydrogène (2).

Afin d'éviter la même erreur, j'ai eu le soin de réoxyder préalablement le cuivre sur une longueur de 10^{cm} du côté de la sortie du

(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27 juillet 1891.

(2) $\frac{1}{2000}$ dans les quatre premières expériences, et près de $\frac{1}{1000}$ dans les deux dernières.

De même, Dumas (composition de l'air) a recueilli en même temps que l'azote une certaine quantité d'hydrogène ainsi que de la vapeur d'eau produite par la combustion de l'hydrure de cuivre.

gaz. L'azote ne peut être considéré comme exempt d'hydrogène que si cet oxyde n'a pas été complètement réduit.

Neuf déterminations m'ont fourni pour la densité de l'azote des nombres compris entre 0,9719 et 0,9721 et dont la moyenne est 0,97203.

En raison de ce qui précède, Regnault trouve une densité trop faible, 0,97137. Il est d'ailleurs assez surprenant qu'il ait admis sans discussion cette moyenne déduite de six pesées dont quatre ne varient que de $13^{gr},4137$ à $13^{gr},4147$, tandis que deux autres (13,4085 et 13,4086) présentent avec les premières un écart très notable.

Résumé.

Il ressort de ces expériences que :

1° Le poids du litre d'air normal est

$$1^{gr},2933.$$

2° Les densités des trois gaz que j'ai examinés sont, à moins de $\frac{1}{10000}$ près, par défaut :

Hydrogène	0,06947
Oxygène	1,1050
Azote	0,9720

III. — Composition de l'air atmosphérique.

Si l'on se reporte au calcul indiqué au commencement de cet exposé, on voit qu'en adoptant pour les densités de l'oxygène et de l'azote les nombres tels qu'ils ressortent des moyennes de mes expériences (1,10506 et 0,97203), on trouve pour la proportion centésimale de l'oxygène dans l'air les nombres 23,235 en poids et 21,026 en volume.

Bien que le dernier chiffre n'ait aucune valeur, l'erreur pouvant s'élever à une unité de l'ordre précédent, ces nombres ont été confirmés au delà de toute espérance par une méthode toute différente qui donne directement la composition en poids (1).

(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 20 juillet 1891.

Cette méthode consiste à absorber l'oxygène de l'air au moyen du phosphore. Celui-ci est contenu dans un ballon primitivement vide de gaz, que je remplis avec précaution d'air atmosphérique. Le vide est fait de nouveau après l'absorption complète de l'oxygène. On a donc immédiatement le poids de l'oxygène fixé par le phosphore et d'autre part le poids total de l'air étudié.

J'ai trouvé par cette méthode que l'air contient 23,24 pour 100 d'oxygène, ce qui coïncide parfaitement avec le résultat ci-dessus en même temps qu'avec ceux de Gay-Lussac et de Humboldt, mais présente, avec le nombre de Dumas et Boussingault, un écart de 1 pour 100. L'explication de cette erreur de Dumas résulte de ce qui précède.

Remarque. — Regnault, et avant lui Dumas et Boussingault ont observé qu'un ballon essuyé avec un linge trop sec présente dans les premiers moments un excès de poids de plusieurs décigrammes, qui ne disparaît qu'au bout de plusieurs heures. Indépendamment des attractions électriques qui peuvent s'établir entre le ballon et le fond de la cage de la balance, il est certain que ce ballon électrisé se couvre de poussières et autres corps légers qui flottent dans l'atmosphère.

L'emploi d'un linge humide donne lieu à une remarque très curieuse.

Contrairement à ce que l'on pourrait attendre, si l'on introduit le ballon dès qu'il vient d'être essuyé dans l'air sec de la balance, son poids apparent augmente tout d'abord de 4^{mgr} à 6^{mgr} dans les cinq premières minutes, puis d'un nouveau milligramme dans les quinze ou vingt minutes qui suivent. A partir de ce moment où il est maximum, le poids apparent diminue lentement jusqu'au lendemain : il est alors inférieur de $0^{mgr},4$ à $0^{mgr},7$ à sa valeur maxima.

On peut donc, pour abréger (en opérant comme je l'ai fait et sur un ballon semblable), faire la pesée vingt-cinq minutes après l'introduction du ballon, et retrancher $0^{mgr},5$ du poids observé; l'erreur commise ne dépassera pas généralement $0^{mgr},2$.

Quant à l'explication du phénomène, je crois la trouver dans ce fait que la petite couche d'eau laissée sur le ballon s'évapore tout d'abord assez vite dans l'air sec, ce qui peut abaisser de plus de 1°

la température de l'air ambiant. Cet air présente alors, bien qu'humide, un excès de densité sur celui qui environne le ballon tare. De là l'excès momentané de la poussée. Cet excès diminue avec la vitesse d'évaporation, et d'ailleurs le poids réel du ballon diminue par suite de la disparition de l'eau, ce qui explique que le poids apparent passe par un maximum, etc., ainsi qu'il vient d'être rapporté.

RÈGLE POUR TROUVER LE NOMBRE ET LA NATURE DES ACCIDENTS DE LA GAMME DANS UN TON ET UN MODE DONNÉS;

PAR M. PIERRE LEFEBVRE.

Je numérote les notes de 1 à 7 selon l'ordre de la progression par quintes :

Fa.	*Do.*	*Sol.*	*Ré.*	*La.*	*Mi.*	*Si.*
1	2	3	4	5	6	7

ou, dans la progression par secondes,

Do.	*Ré.*	*Mi.*	*Fa.*	*Sol.*	*La.*	*Si.*
2	4	6	1	3	5	7

J'appellerai *caractéristique* de chaque note le nombre correspondant à la note. Je conviens, pour obtenir la caractéristique d'une note altérée, d'ajouter $+7$ pour un dièze, -7 pour un bémol.

Ceci posé, ajoutez à la caractéristique de la tonique -2 pour le mode majeur, -5 pour le mode mineur. Le nombre obtenu N est celui des accidents; ce sont des dièzes s'il est positif, des bémols s'il est négatif. Dans le premier cas, les notes altérées sont celles qui sont numérotées de 1 à N à partir du *fa*. Dans le second cas, les notes altérées sont les N dernières à partir du *si*.

La bémol majeur $= 5 - 7 - 2 = -4$ :: 4 bémols :: *Si, Mi, La, Ré.*
Fa dièze mineur $= 1 + 7 - 5 = +3$ :: 3 dièzes :: *Fa, Do, Sol.*
La mineur $= 5 - 5 = 0$ :: Pas d'accidents.
Ut dièze majeur $= 2 + 7 - 2 = +7$ :: 7 dièzes :: toutes les notes.

Si N était supérieur à $+7$ ou inférieur à -7, après avoir altéré toutes les notes, on disposerait des autres en doubles dièzes ou

doubles bémols :

Ré dièze majeur $= 4 + 7 - 2 = 9 = 7 + 2$ :: 2 doubles dièzes :: ***Fa*** et ***Do***.
Fa bémol majeur $= 1 - 7 - 2 = -8 = -7 - 1$ :: 1 double bémol :: ***Si***.

La règle s'étend, non seulement aux modes mineur et majeur, mais encore à tous les modes du plain-chant. On peut alors l'énoncer sous la forme suivante :

Retranchez la caractéristique du mode de celle de la tonique. La différence N $\frac{\text{positive}}{\text{négative}}$ donnera le nombre de $\frac{\text{dièzes}}{\text{bémols}}$. Les notes altérées sont les N $\frac{\text{premières}}{\text{dernières}}$ dans la progression par quintes.

C'est ainsi que, pour le mode d'*ut* (mode majeur), on aura à retrancher 2 à la caractéristique de la tonique; pour le mode de *la* (mode mineur) on a à retrancher 5.

Ton de *fa*, mode de *sol* : $1 - 3 = -2$ :: *Si, Mi.*

Règle inverse. — Au nombre de $\frac{\text{dièzes}}{\text{bémols}}$ affectés du signe $\pm$, ajoutez la caractéristique du mode; la somme est la caractéristique de la tonique.

4 dièzes	$+4+2=6$	***Mi*** majeur,
	$+4+5=9=7+2$	***Ut*** dièze mineur,
	$+4+3=7$	***Si*** mode de sol,
5 bémols	$-5+2=-7+4$	***Ré*** bémol majeur.
	$-5+5=-7+7$	***Si*** bémol mineur.

Les règles précédentes ne sont pas seulement des règles empiriques; elles se déduisent du raisonnement suivant. Les gammes étant rangées dans l'ordre logique, c'est-à-dire les toniques progressant par quintes, chaque fois que l'on $\frac{\text{monte}}{\text{descend}}$ d'une quinte, on gagne un $\frac{\text{dièze}}{\text{bémol}}$ ou l'on perd un $\frac{\text{bémol}}{\text{dièze}}$. L'ordre d'apparition des dièzes, l'ordre de disparition des bémols coïncident d'ailleurs avec l'ordre des toniques.

Pour avoir la règle correspondant à un certain mode, il suffira donc de disposer de la caractéristique de ce mode pour que la règle s'applique à l'une des tonalités; elle s'appliquera alors à toutes.

SUR L'ATTRACTION DE DEUX PLATEAUX SÉPARÉS PAR UN DIÉLECTRIQUE;

PAR M. JULIEN LEFÈVRE.

J'ai mesuré l'attraction de deux plateaux électrisés, séparés par un diélectrique non en contact intime avec eux, et vérifié qu'elle est représentée par la formule suivante

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{e+e'}{\frac{e}{k}+e'}\right)^2, \tag{1}$$

en appelant F' l'attraction des deux plateaux à la distance $e+e'$ dans l'air; F l'attraction à la même distance lorsqu'on a placé entre les plateaux une lame isolante à faces parallèles d'épaisseur e; e' représente donc la somme des épaisseurs d'air situées de part et d'autre de cette lame; k est la constante diélectrique de la plaque.

Je me sers de deux plateaux horizontaux et d'une balance de précision dont le fléau porte, à une extrémité, un plateau ordinaire pour recevoir des poids, à l'autre, le plateau mobile de l'appareil électrique, qui a 12^{cm} de diamètre et est suspendu au fléau par une tige isolante. Ce plateau est entouré d'un anneau de garde, muni d'une sorte de couvercle, qui est seulement percé d'un trou pour laisser passer la tige isolante.

Le plateau fixe, qui a 19^{cm} de diamètre, est placé au-dessous du premier et porté par un support isolant à vis calantes, qui permet de faire varier la distance $e+e'$. Ce support est traversé par trois tiges isolantes qui soutiennent le diélectrique. De part et d'autre de celui-ci, on laisse des épaisseurs d'air aussi faibles que possible; il faut cependant laisser au plateau mobile la possibilité d'accomplir de petites oscillations.

La source d'électricité est une bobine de Ruhmkorff, actionnée par 6 éléments Bunsen; l'un des pôles de la bobine communique avec le plateau fixe et avec l'armature intérieure d'une jarre dont la capacité est, suivant les cas, 70 à 150 fois plus grande que celle du condensateur formé par les plateaux. L'autre pôle, l'armature extérieure de la jarre, le plateau mobile et le fléau de la balance sont reliés au sol.

Tout l'appareil, sauf le plateau qui reçoit les poids, est placé dans une cage dont l'air est desséché.

Les plaques de soufre et de paraffine sont obtenues par fusion, dans un moule dont le fond est rendu horizontal par un niveau à bulle d'air. L'épaisseur des lames solides est mesurée avec une vis à deux pointes et un cathétomètre. La distance $e + e'$ des deux plateaux est aussi mesurée au cathétomètre.

Le diélectrique est placé dans la cage quelques jours avant l'expérience, pour lui laisser perdre toute trace d'électricité.

La balance contenant une tare un peu trop faible et toutes les pièces communiquant avec le sol, j'achève d'établir l'équilibre avec un poids p. J'électrise ensuite le plateau fixe et j'établis de nouveau l'équilibre par un poids P. Je remets ce plateau en communication avec le sol et j'équilibre encore par un poids p' :

$$F = P - \frac{p + p'}{2}.$$

L'attraction F' est déterminée de même par trois opérations.

J'opère de même pour les liquides, mais en mesurant d'abord F', puis F, afin d'éviter l'évaporation. L'épaisseur d'air e' subit dans ce cas une petite correction qui consiste à remplacer l'épaisseur de la lame de verre formant le fond de la cuve qui reçoit le liquide par l'épaisseur d'air équivalente.

Dans chaque expérience, je calcule le rapport $\frac{F}{F'}$, puis le rapport corrigé

$$R = \frac{F}{F'}\left(\frac{e + ke'}{e + e'}\right)^2.$$

D'après (1), on doit avoir

$$\sqrt{R} = k.$$

Le Tableau suivant, dans lequel e et e' sont exprimés en centimètres, F et F' en milligrammes, montre que les valeurs de $\sqrt{R}$ concordent avec les valeurs de k que j'ai obtenues au moyen de la balance de Coulomb ([1]).

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 novembre 1891.

La formule (1) est donc exacte et, en particulier, dans le cas où e' devient négligeable, on a

$$\frac{F}{F'} = k^2.$$

Diélectriques.	e.	e'.	F.	F'.	$\frac{F}{F'}$.	R.	$\sqrt{R}$.	k.
Paraffine n° 1	2,20	0,70	39,5	17,25	2,29	3,53	1,88	2
» »	»	0,66	40,5	14	2,89	4,38	2,09	»
» n° 2.....	3,37	0,61	30,5	9	3,39	4,51	2,12	»
» »	»	0,68	23,5	7,25	3,24	4,42	2,10	»
Soufre............	3,56	0,54	48,5	9,75	4,97	7,27	2,70	2,6
»	»	0,65	53,5	13	4,11	6,39	2,52	»
Ébonite........ ...	2,04	0,32	72,75	18,75	3,88	5,39	2,32	2,3
Sulfure de carbone.	2,60	1,09	22	11,5	1,91	2,78	1,67	1,7
Essence de térébenthine...........	2,77	0,79	26,25	13	2,02	2,49	1,58	1,5
Pétrole...........	2,28	0,71	19,50	8	2,43	3,38	1,84	1,9

Je ferai remarquer, en terminant, que l'attraction de deux plateaux se prête parfaitement à la mesure des constantes diélectriques; c'est une méthode simple, rapide et n'exigeant qu'une balance de précision; elle est préférable à tous les procédés actuellement en usage.

NOTE RELATIVE A L'ACTION D'UN COURANT SUR UNE AIGUILLE AIMANTÉE;

PAR M. E. GARNAULT.

On sait qu'Œrsted et Ampère, en 1820, étudièrent l'action d'un courant sur une aiguille aimantée. Peu après, Biot et Savart, puis Pouillet continuèrent cette étude en faisant varier les positions relatives du courant et de l'aiguille. Il existe quelques particularités qui n'ont été signalées ni par eux, ni par les observateurs qui les ont suivis. Elles ont donné lieu à des expériences, exécutées en 1877, dans le laboratoire de l'École navale de Brest et qui établissent les deux faits suivants : 1° Lorsqu'un courant passe par une aiguille aimantée librement suspendue, de manière qu'elle puisse se mouvoir circulairement dans un plan horizontal, l'aiguille n'abandonne pas le méridien magnétique. 2° Lorsqu'un

courant rectiligne indéfini, placé dans le méridien magnétique, s'approche d'une aiguille aimantée horizontale en restant parallèle à lui-même, l'aiguille aimantée dévie conformément aux lois d'Ampère; mais la déviation, nulle si le courant est au contact de l'aiguille ou bien à une grande distance, prend une valeur maximum pour une distance déterminée, variable avec le magnétisme de l'aiguille et la composante horizontale du magnétisme terrestre.

Pour mettre ces deux théorèmes en évidence, nous avons imaginé les dispositions suivantes.

I. Un barreau aimanté de 95^{mm} de long et de 2^{mm} de diamètre, est terminé à ses deux bouts par des fils de platine recourbés à angle droit. Il est suspendu par un fil sans torsion qui supporte aussi un miroir. A l'aide de ce miroir, on observe avec une lunette une règle divisée placée à une distance de 1^{m}. Quatre à cinq éléments Bunsen envoient le courant à deux coupes dans lesquelles plongent à peine les fils de platine.

Dans une première série d'expériences, les coupes contenaient du mercure. Le courant ne passe pas : lecture 298e division de la règle. Courant fermé 296, 5. Courant ouvert 300. Courant fermé 295, 5. Une division répond à $2'$ de déviation.

Dans une deuxième série où les coupes contenaient de l'eau acidulée, les résultats sont moins concordants, mais il ne faut pas perdre de vue que le dégagement des bulles de gaz dues à la décomposition de l'eau imprimait à l'aiguille un balancement impossible à éviter. Une déviation systématique eût entraîné dans les lectures une différence bien plus marquée.

II. Pour étudier les variations de la déviation avec la distance, la disposition suivante a été adoptée. Une aiguille aimantée, supportée par un fil de cocon, se trouvait au-dessus d'un cercle de verre gradué. La boîte qui la contenait était portée sur un trépied à jour qui permettait d'approcher, aussi près que possible de l'aiguille, un fil de cuivre recourbé destiné à amener le courant. Ce fil, convenablement isolé, était fixé au chariot d'un cathétomètre qui servait à mesurer les variations de distance.

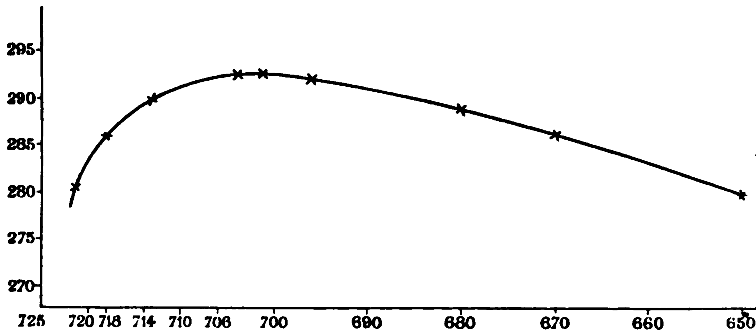
Cinq éléments Bunsen fournissaient le courant. Ils étaient placés à une assez grande distance; des conducteurs un peu gros ame-

naient le courant à la salle d'expériences. L'aiguille aimantée était constituée par un barreau d'acier de 160^{mm} de longueur dans deux expériences et de 80^{mm} dans une autre. Son diamètre était de 2^{mm}.

remière expérience.			*Deuxième expérience.*			*Troisième expérience.*		
tom.	Équilibre.	Déviation.	Cathétom.	Équilibre.	Déviation.	Cathétom.	Équilibre.	Déviation.
	137,5	»	»	269	»	»	1	»
,5	185,5	48	721,5	280,5	11,5	732,6	23	22
	187	49,5	718	286	17	730	29	28
	188,5	51	713	290,2	21,2	728	32	31
	189,5	52	704	292,5	23,5	724	35,3	34,3
	189	51,5	701	292,9	23,9	720	36,5	35,5
	187,5	50	696	292,3	23,3	717	36,7	35,7
	185,5	48	680	289	20	710	35,3	34,3
			670	286	17	700	31,5	30,5
			650	280	11	690	26,5	25,5
			450	269,5	0,5	680	21,7	20,7
						660	16	15
						200	1,5	0,5
						100	1,4	0,4

On voit par ces expériences qu'un maximum se manifeste bien. La courbe ci-jointe, tracée d'après la deuxième expérience, le met nettement en évidence.

Fig. 1.



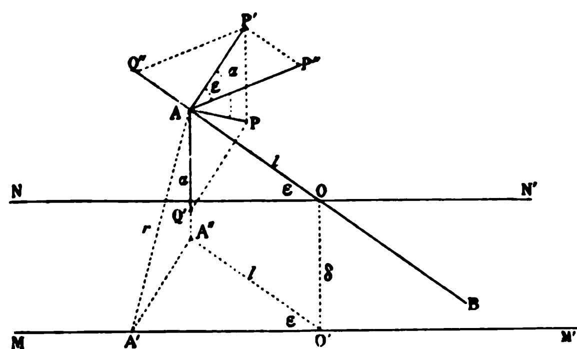
Il était possible *a priori* d'énoncer les deux faits qui nous occupent. Évidemment, si le courant passe par l'aiguille, il n'y a aucune raison pour qu'elle dévie plutôt d'un côté que de l'autre. Une déviation dans ce cas ne pourrait s'expliquer. D'un autre côté, si le courant passant par l'aiguille n'amène pas de déviation, un cou-

rant fort éloigné de l'aiguille, n'en produira pas non plus. La déviation passant de zéro à zéro, quand la distance du courant augmente, doit évidemment passer par un maximum.

Le calcul rend d'ailleurs complètement compte de ces phénomènes.

Soit AB une aiguille aimantée dont les pôles sont A, B, soit NN'

Fig. 2.



le méridien magnétique dont elle est déviée par un courant MM' placé dans le plan du méridien magnétique et supposé indéfini.

Biot et Savart ont établi que le pôle A éprouve de la part du courant une force perpendiculaire au plan qui passe par le courant et le pôle; que cette force est appliquée au pôle et qu'elle a pour valeur $\frac{2mc}{r}$, en nommant m le magnétisme du pôle, c l'intensité du courant et r la perpendiculaire abaissée du pôle sur la direction du courant.

Cette force $P = \frac{2mc}{r}$ peut se décomposer en deux autres, $P' = P \cos\alpha$ dans le plan horizontal qui passe par l'aiguille et $Q' = P \sin\alpha$ dont nous n'avons pas à nous préoccuper. A son tour, la force P' peut donner deux composantes, l'une Q'' suivant la direction de l'aiguille et qui est détruite par la résistance du pivot, l'autre $P'' = P' \cos\varepsilon$ perpendiculaire à l'aiguille et appliquée au pôle A.

En se reportant à la figure on voit que $\cos\alpha = \frac{\delta}{r}$ [1]. Par suite,

---

[1] Car P' composante horizontale est perpendiculaire à AB et P perpendicu-

en faisant les substitutions, on a

$$P'' = \frac{2mc\delta \cos\varepsilon}{r^2},$$

puis

$$P'' = \frac{2mc\delta \cos\varepsilon}{\delta^2 + l^2 \sin^2\varepsilon}.$$

Alors le moment qui tend à entraîner l'aiguille hors du méridien magnétique sera

$$\frac{2mcl\delta \cos\varepsilon}{\delta^2 + l^2 \sin^2\varepsilon}.$$

Le moment dérivant de l'action de la Terre sur l'aiguille déviée sera

$$mfl \sin\varepsilon,$$

en appelant f l'intensité magnétique horizontale de la Terre.

Quand l'aiguille sera en équilibre, on aura donc

$$\frac{2mcl\delta \cos\varepsilon}{\delta^2 + l^2 \sin^2\varepsilon} = mfl \sin\varepsilon$$

ou

$$\frac{2c\delta}{f} \cot\varepsilon = \delta^2 + l^2 \sin^2\varepsilon.$$

Si l'on pose $\frac{c}{f} = a$, on aura

(1) $$2a\delta \cot\varepsilon = \delta^2 + l^2 \sin^2\varepsilon.$$

La déviation ε étant fonction de la distance δ, on doit se demander si cette fonction admet un maximum, car pour $\delta = 0$ on a $r = 0$ et pour $\delta = \infty$ ε est encore nul.

La dérivation donne

$$2a\delta \frac{d\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} + 2a \cot\varepsilon \, d\delta = 2\delta \, d\delta + 2 l^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon \, d\varepsilon$$

ou

$$d\varepsilon\left(\frac{a\delta}{\cos^2\varepsilon} - l^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon\right) = d\delta(\delta - a \cot\varepsilon),$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\delta} = \frac{\delta - a \cot\varepsilon}{\frac{a\delta}{\cos^2\varepsilon} - l^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon}.$$

---

laire au plan qui passe par A ou par MM' est nécessairement perpendiculaire à AA' qui passe par son pied dans le plan.

En égalant le numérateur à zéro et nommant ε' la déviation qui correspond à ce maximum, on a

$$\delta = a \cot \varepsilon'.$$

(2) $$\cot \varepsilon' = \frac{\delta}{a},$$

d'où l'on tire

$$\cos \varepsilon' = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + a^2}}, \qquad \sin \varepsilon' = \frac{a}{\sqrt{\delta^2 + a^2}}.$$

En portant ces valeurs dans le dénominateur, on voit qu'il ne devient ni nul ni infini : nous sommes donc en présence d'un maximum.

Les substitutions conduisent à porter dans l'équation (2) la valeur de $\cot \varepsilon$ tirée de (1). On a alors

$$\delta^4 + a^2\delta^2 - a^2 l^2 = 0,$$

qui donne la distance δ pour laquelle a lieu le maximum. On arriverait de même à

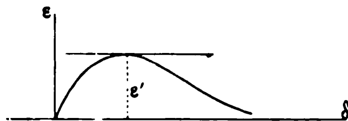
$$\sin^4 \varepsilon' + \frac{a^2}{l^2} \sin^2 \varepsilon' - \frac{a^2}{l^2} = 0.$$

L'équation primitive (1) donne la distance δ en fonction de la déviation ε

$$\delta = a \cot \varepsilon \pm \sqrt{a^2 \cot^2 \varepsilon - l^2 \sin^2 \varepsilon},$$

équation qui conduit à une courbe de la forme suivante.

Fig. 3.



L'appareil simple et commode au moyen duquel on peut vérifier ces lois, construit par M. Démichel, se compose d'une boussole élevée sur trois pieds à vis calantes. Le fond est formé par une glace divisée. L'aiguille supportée par un fil de cocon est suspendue très près de la glace. De l'autre côté de la glace et entre les pieds qui supportent l'appareil se trouve le fil qui amène le

courant. Un élément-bouteille au bichromate de potasse suffit pour faire l'expérience. Ce fil est mobile en hauteur parallèlement à lui-même. On peut l'approcher jusqu'au contact de la glace dont l'épaisseur seule le sépare de l'aiguille.

On constate que la déviation est très faible. En éloignant le fil de l'aiguille, on la voit augmenter jusqu'à une certaine valeur après laquelle elle diminue à mesure que la distance croît.

La position du maximum dépend surtout du rapport de l'intensité du courant à la composante horizontale de l'intensité magnétique de la Terre dans le lieu considéré. En effet, la déviation et la distance qui répondent au maximum sont données par les équations

$$\delta^4 + a^2\delta^2 - a^2 l^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin^4\varepsilon + \frac{a^2}{l^2}\sin^2\varepsilon - \frac{a^2}{l^2} = 0.$$

A. ELSAS. — Nouvelle méthode de mesure des constantes diélectriques (*Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 654; 1891).

La méthode employée par l'auteur est analogue à celle de Winkelmann (*Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 253); mais elle présente sur celle-ci l'avantage qu'on emploie deux condensateurs séparés au lieu d'un condensateur à trois plateaux.

L'appareil se compose d'un inducteur différentiel réuni à un condensateur fixe et à un condensateur de Kohlrausch à plateaux mobiles, reliés entre eux par un téléphone qui cesse de rendre un son quand les capacités sont égales. On intercale entre les plateaux la plaque à essayer et l'on établit l'équilibre, puis on supprime la plaque, on rétablit de nouveau l'équilibre et l'on déduit du déplacement du plateau mobile la constante diélectrique.

Les plateaux du condensateur ont 15^{cm} de diamètre, les plaques isolantes sont naturellement plus grandes et les meilleures conditions d'exactitude correspondent à une couche d'air de 3^{mm} à 6^{mm} d'épaisseur entre les plateaux; on choisit donc en conséquence l'épaisseur des plaques à essayer.

Les valeurs trouvées sont :

Verre à glaces 1	7,46
» 2	7,30
» 3	6,44
Caoutchouc durci	2,865
Mica 1	5,66
» 2	5,97
Celluvert dur gris	1,192
» dur rouge	1,441
» dur noir	1,891
» souple rouge	2,66

Le celluvert est une substance fabriquée par Moll-Esgen et Cie de Londres et présentée dans le commerce comme un isolant parfait remplaçant avec avantage la gutta-percha; la constante de ce corps est plus petite que celle de tous les autres corps solides, sauf pour la dernière variété.

La méthode s'applique aux liquides, à condition de les placer dans un vase métallique; on emploie par exemple les deux armatures d'une bouteille de Leyde à armatures mobiles. On trouve ainsi pour l'essence de térébenthine 2,235.

L'auteur estime que, dans les meilleures conditions, l'erreur ne doit pas dépasser 1 pour 100. C. Daguenet.

H. HERTZ. — Passage des rayons de la cathode à travers des couches métalliques minces (*Wied. Ann.*, t. XLV, p. 28; 1892).

M. Hertz a étudié le passage de ces rayons à travers des couches minces de divers métaux : or, argent, platine, aluminium, cuivre, déposées sur une plaque de verre d'urane, soit directement, soit par procédé chimique, soit par des décharges dans le vide. Il fixe de petits morceaux minces de mica sur la plaque métallique, puis il la place à 20cm environ de la cathode formée d'un disque plan d'aluminium de 1cm de diamètre, la face métallique tournée vers l'électrode. Tant que la décharge lumineuse passe dans le tube, le métal projette son ombre sur le verre fluorescent, mais dès que le tube devient obscur, la phosphorescence se produit sur toute la plaque et atteint son maximum d'intensité en même temps que la décharge; les plaques de mica seules projettent leur ombre sur le

verre. Il est difficile d'admettre que les radiations passent par les lacunes du métal, puisque dans la décharge lumineuse aucune lumière n'est visible et qu'on peut augmenter le nombre des couches superposées sans diminuer beaucoup l'éclat. Ces rayons ne reviennent pas en arrière : ils peuvent donc être transmis dans un sens et non dans l'autre.

L'auteur admet que la surface métallique réfléchit la lumière phosphorescente du verre et augmente ainsi l'éclat du côté opposé à la cathode; si donc le métal laisse passer la moitié seulement du faisceau incident, le verre doit, par cette réflexion, être plus brillant sous la feuille métallique que dans les autres parties.

Ce résultat semble vérifié, mais peu nettement, avec des couches d'argent d'une certaine épaisseur.

Si les rayons passaient à travers les trous du métal, ils continueraient leur route en ligne droite, tandis qu'en réalité ils sont diffusés comme par un verre dépoli.

Une ouverture circulaire fermée par une feuille mince d'aluminium projette une image nette sur un verre fluorescent placé immédiatement derrière elle; tandis que l'image s'élargit, elle devient confuse et moins brillante, même si l'on écarte très peu la plaque. Un réseau de fils métalliques recouvert d'une feuille d'aluminium diffuse les rayons dans tout le tube et ces rayons conservent leurs propriétés, entre autres, celle d'être déviés par un aimant.

Ce phénomène peut être rapproché de la diffusion des rayons de la cathode par réflexion sur une couche métallique mince signalée par Goldstein (1). C. Daguenet.

W.-C. RONTGEN. — Note relative à l'influence de la pression sur quelques phénomènes physiques (*Wied. Ann.*, t. XLV, p. 98; 1892).

D'après la théorie d'Arrhenius, la vitesse des réactions est d'autant plus grande que la pression est plus forte. L'auteur s'est proposé de vérifier cette conséquence et il a étudié d'abord l'inver-

---

(1) *Journal de Physique*, 2e série, t. II, p. 179.

sion du sucre de canne par l'acide chlorhydrique. Deux tubes remplis de la même dissolution et maintenus à la même température sont soumis pendant un certain temps, l'un à une pression de 500^{atm} dans un appareil Cailletet, l'autre à la pression atmosphérique. On mesure ensuite le pouvoir rotatoire en ayant soin de faire les mesures alternativement sur l'une et sur l'autre dissolution, puisque la réaction continue pendant l'expérience, et l'on trouve que la pression ralentit la réaction.

La seconde série d'expériences est relative à la diffusion. Deux petits vases à col étroit, fermés en bas par un morceau de vessie d'esturgeon et en haut par un peu de glu marine, sont remplis d'une dissolution de sulfate de zinc, $D = 1,135$, et plongés dans l'eau, l'un sous la pression atmosphérique, l'autre sous une pression de 500^{atm}. On pèse les vases au bout d'un certain temps et l'on trouve que, sous pression, il passe environ 20 pour 100 d'eau de plus que sous la pression ordinaire. Une baudruche de batteur d'or donne le même résultat.

Les expériences de Warburg et Sachs ont montré que la viscosité d'un certain nombre de liquides augmente avec la pression; il était intéressant de voir comment se comportent les solides dans les mêmes conditions. L'auteur a choisi la glu marine qui, à la température ordinaire et sous l'action de son poids, s'aplatit peu à peu comme un liquide visqueux tandis qu'un coup de marteau l'écrase facilement.

Il remplit jusqu'à moitié de cette substance chauffée à 100° deux tubes de verre, puis, après refroidissement, il introduit dans chacun une tige de laiton terminée en pointe et chargée à son extrémité supérieure d'un poids d'environ 1200^{gr}. L'un des tubes est soumis à la pression de 500^{atm}, l'autre est abandonné à lui-même; on mesure au bout d'un certain temps de combien la tige s'est enfoncée et l'on remarque que la pression a augmenté la dureté. Cette modification n'est que passagère, la substance reprend la dureté primitive quand on supprime la pression.

Le bismuth et le plomb traités de même n'ont rien donné de précis; il serait intéressant de soumettre aux mêmes épreuves un certain nombre d'autres corps. C. DAGUENET.

Lord RAYLEIGH. — Sur la théorie des forces superficielles. II. Fluides compressibles (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XXIII; 1892).

Les théories capillaires de Young et Laplace supposent les liquides incompressibles ; l'auteur tente l'application de leurs idées aux fluides réels. Il démontre très simplement la formule

$$p = \varpi + K\rho^2,$$

qui relie la pression interne ϖ à la densité ρ et à la pression externe p. Si l'on admet la loi de Mariotte, p est proportionnel à ρ et il vient

$$\varpi = k\rho - K\rho^2.$$

Cette équation, si l'on prend ρ comme abscisse et ϖ comme ordonnée, représente une parabole passant par l'origine et dont le sommet est au-dessus de l'axe des ρ. Pour la partie de la courbe située au delà du sommet, l'équilibre du fluide est instable ; s'il se produit une petite variation de densité, il y aura contraction indéfinie. Entre l'origine et le sommet l'état est stable ; toutefois on ne pourra pas atteindre le sommet si les parois du vase exercent une action attractive sur le fluide ; il se produira une instabilité et une contraction comme précédemment.

Ainsi on peut, sans faire intervenir les molécules, expliquer qu'un fluide passe à un état de condensation différent, en admettant simplement l'attraction mutuelle des parties de ce fluide et la loi de Mariotte. On ne peut reprocher à l'explication d'être trop bonne, puisqu'elle conduit à une contraction indéfinie ; on évite la difficulté en admettant la loi

$$p(v - b) = \text{const.},$$

d'où l'on tire la relation de Van der Waals

$$\left(\varpi + \frac{K}{v^2}\right)(v - b) = \text{const.}$$

Cette équation donne pour les isothermes aux basses températures une forme de courbe bien connue dont on remplace une partie par une ligne droite ; supposons que nous arrivions, en comprimant la vapeur, au point d'intersection de cette droite ; pour

qu'on pût la suivre, il faudrait que la vapeur fût en contact avec du liquide en masse, ce qui n'est pas le cas; suivant la valeur de l'attraction exercée par les parois, on continuera à suivre la courbe ou bien on ne pourra pas arriver au point d'intersection; le point anguleux sera remplacé par une courbe de raccord.

Passant à l'étude de la couche de passage entre le liquide et la vapeur, l'auteur montre que la possibilité de l'existence, dans la couche de transition, de certaines densités qui seraient instables pour un liquide pris en masse, dépend du fait que, dans cette couche, l'attraction interne ne prend pas sa valeur normale, à cause de la variation rapide de densité dans le voisinage. Il retrouve également ce résultat, déjà énoncé toutefois, que l'existence d'une force capillaire est liée à la transition brusque d'un milieu à l'autre et qu'elle peut disparaître complètement quand la transition est suffisamment graduelle.

Le calcul de la tension superficielle entre un liquide et sa vapeur et l'application au cas d'une sphère liquide permettent de retrouver la formule déjà donnée par Maxwell. On explique aussi comment un corps plongé dans une vapeur non saturée peut se recouvrir d'une couche de fluide, qui persiste, même dans un vide élevé.

C. Raveau.

Lord RAYLEIGH. — Sur la théorie des forces superficielles. III. Influence de légères impuretés (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXIII; 1892).

L'expérience montre que la diminution de tension superficielle de l'eau due à la présence d'une couche d'huile décroît beaucoup plus rapidement que l'épaisseur de la couche; l'étude théorique de la question montre que cette diminution serait proportionnelle au *carré* de l'épaisseur de la couche d'impureté aussi bien que le rayon de la sphère d'activité des forces internes sont négligeables par rapport à la courbure de la surface. On peut admettre une loi absolument arbitraire pour les actions mutuelles d'un couple quelconque de fluides. C. Raveau.

S. YOUNG. — Sur les généralisations de Van der Waals relatives aux températures, pressions et volumes correspondants (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXIII; 1892).

La formule de Van der Waals, sous la forme simple que lui a donnée son auteur, ne semble pas suffire à représenter toutes les expériences; par contre, la loi des états correspondants qu'elle a suggérée parait être acceptée généralement.

Depuis plusieurs années l'auteur, soit seul, soit en collaboration avec M. Ramsey, a étudié la façon dont varient les volumes et les pressions en fonction de la température pour les corps suivants : benzène, benzène fluoré, chloré, bromé, iodé, tétrachlorure de carbone, chlorure d'étain, éther; alcools méthylique, éthylique, propylique; acide acétique. Il donne une série de Tableaux contenant : 1° les constantes critiques; 2° les pressions correspondantes; 3° les températures correspondantes; 4° les points d'ébullition à des pressions correspondantes; 5° les tensions de vapeur à des températures correspondantes; 6° les volumes moléculaires des liquides aux pressions correspondantes; 7° les volumes moléculaires des liquides aux températures correspondantes; 8° les volumes moléculaires des vapeurs saturées aux pressions correspondantes; 9° les volumes moléculaires de vapeur saturée aux pressions correspondantes; 10° les rapports des températures absolues à celles du benzène fluoré aux pressions correspondantes; 11° les rapports des tensions de vapeur à des températures correspondantes; 12° les rapports des volumes moléculaires des liquides à des pressions correspondantes; 13° les mêmes rapports à des températures correspondantes; 14° les rapports des volumes moléculaires des vapeurs saturées à des pressions correspondantes; 15° les mêmes rapports à des températures correspondantes.

Il résulte de l'examen de ces Tableaux que, pour les dérivés halogènes du benzène (comparés au composé fluoré), les généralisations de Van der Waals s'accordent bien avec l'expérience; pour le benzène, le tétrachlorure de carbone, le chlorure d'étain, l'éther, elles sont grossièrement vérifiées; enfin elles s'éloignent beaucoup de la réalité pour les trois alcools et l'acide acétique. Si l'on rapporte les données des alcools à l'un d'eux, l'alcool éthy-

lique, les divergences diminuent, tout en restant bien supérieures aux erreurs d'observation. Dans tous les cas, la comparaison des volumes moléculaires de vapeur saturée à des pressions correspondantes est beaucoup plus satisfaisante qu'à des températures correspondantes.

L'auteur termine en indiquant comment il détermine le volume critique : il admet qu'il a atteint la température critique quand une très légère détente fait apparaître une ligne de séparation; on peut arriver à faire naître cette ligne de séparation presque à l'extrémité supérieure de l'éprouvette; le fluide occupe alors le volume critique.

Ce volume étant déterminé pour certains corps, on peut obtenir sa valeur pour d'autres en utilisant la loi des états correspondants, qui tend à devenir exacte quand on s'approche du point critique.

C. Raveau.

W. HIBBERT. — Sur un champ magnétique permanent (*Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXIII; 1892).

Le magnétisme d'un barreau aimanté depuis longtemps varie très peu; l'auteur a obtenu une constance beaucoup plus grande en fixant à un aimant des pièces polaires taillées de façon à fournir un circuit à peu près fermé, de faible résistance magnétique. Le modèle décrit consiste en une tige d'acier de 25^{mm} de diamètre, de $6^{cm},4$ de long, portant à une extrémité un disque de fer de 10^{cm} de diamètre et de 15^{mm} d'épaisseur.

L'autre extrémité est fixée au pôle d'un feuillet hémisphérique de fer, qui entoure le barreau et vient presque au contact du disque. Un entrefer annulaire, dont la largeur est inférieure à $1^{mm},5$, sépare la surface latérale du disque de la surface interne de l'hémisphère; le champ est très intense dans cet hémisphère quand le barreau est aimanté. On utilise ce champ pour la production d'actions induites instantanées en enroulant un fil sur une bobine à gorge peu profonde, portée par un tube de laiton qui peut glisser facilement dans l'espace annulaire : coupant ainsi toutes les lignes de force, le tube tombe sous l'action de son propre poids.

La bobine porte 90 tours de fil et le flux magnétique total à travers l'entrefer est de 30000 unités C.G.S.

On peut donc obtenir une action induite considérable, même à travers une résistance de 10000 ohms. Des essais exécutés sur trois appareils prouvent la variation de l'aimantation; on peut donc employer ces appareils comme étalons magnétiques : on donnerait au flux une valeur convenable, 20000 ou 25000, pour faciliter les calculs.

C. RAVEAU.

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-CHIMIQUE RUSSE.

Tome XXIII; 1891. (Suite.)

W. STSCHEGTIAEFF. — Détermination de la constante diélectrique des liquides conducteurs, p. 170-177.

Pour éviter les erreurs occasionnées par l'absorption et la conductibilité du diélectrique, il est nécessaire d'employer des oscillations électriques de durée aussi courte que possible, ou bien de disposer l'expérience de manière que les erreurs se compensent mutuellement. L'auteur préfère la seconde méthode : son condensateur est formé de trois disques, dont deux sont fixés verticalement à 55^{mm} de distance, et le troisième peut se déplacer parallèlement à lui-même. Ce dernier et un des deux disques fixes sont en communication avec les électrodes d'une bobine de Ruhmkorff, tandis que le disque moyen communique à la terre par l'intermédiaire d'une sorte de tube de Geissler, formé d'une petite lampe à incandescence de 5 volts, dont le filament a été rompu par un courant trop intense. Cet appareil, placé tout près du disque, est excessivement sensible aux oscillations électriques dont la présence se manifeste par une lumière semblable à celle des tubes de Geissler, tandis que la décharge statique du condensateur y produit une étincelle.

Si les deux disques extrêmes ne sont pas disposés de manière à former deux condensateurs d'égale capacité avec celui du milieu, ce dernier se charge et la lampe s'illumine; en faisant varier la distance du disque mobile, on peut annuler cette lumière; elle reparaît de nouveau quand on dépasse la position cherchée. Pour

éliminer l'erreur, on prend la moyenne a des deux distances. Si l'on interpose, entre les deux disques immobiles du condensateur, une couche d'un diélectrique d'épaisseur d, dont la constante est D, il faudra déplacer le disque mobile d'une longueur x pour faire disparaître la lumière. Alors, on aura la relation

$$a - x = a - d + \frac{d}{D}; \qquad D = \frac{d}{d - x}.$$

Les liquides ont été placés dans une cuvette à parois parallèles, en verre, qui restait à sa place pendant la première observation. Les résultats obtenus sont en concordance avec la loi de Maxwell : $\sqrt{D} = n_\infty$.

	D.	$\sqrt{D}$.	n_∞.
Verre	2,263	1,503	1,538
Benzol	2,17	1,473	1,476
Eau	1,75	1,323	1,323
Alcool éthylique	1,62	1,273	1,353
Alcool méthylique	2,21	1,487	1,397

P. BACHMETIEFF. — Réponse à M. Spatschinsky, à propos des recherches thermo-électriques de l'auteur, p. 120-127.

L'auteur affirme qu'en continuant ses recherches il a trouvé encore plusieurs cas confirmant sa règle : *le courant thermo-électrique, entre les éléments consécutifs du système périodique de M. Mendeleef, change de sens après chaque couple de paires*. En outre, il énonce la règle suivante : *Le courant thermo-électrique entre un élément et le même élément en état de tension mécanique est toujours de sens contraire au courant entre cet élément (en état normal) et le suivant dans la série périodique*. Quant à l'inversion des courants thermo-électriques, qui paraît rendre futile toute classification fondée sur le sens des courants, M. Bachmetieff promet de l'expliquer dans un Mémoire qu'il va publier prochainement. W. LERMANTOFF.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annales de Chimie et de Physique.

6e série, tome XXV; mai 1892.

W.-C. Roberts-Austen. — *Sur quelques propriétés des métaux dans leurs rapports avec la loi périodique*, p. 84.

Ph.-A. Guye. — *Le coefficient critique et la détermination du poids moléculaire au point critique*, p. 97.

E. Carvallo. — *Sur la polarisation rotatoire du quartz*, p. 113.

Juin 1892.

Colley, Michkine et Kazine. — *Observations actinométriques faites à l'Observatoire météorologie de l'Académie Petrowsky, près Moscou*, p. 265.

A. Crova. — *Remarques sur les observations de MM. Colley, Michkine et Kazine*, p. 286.

Philosophical Magazine.

5e série, t. XXXIII; mars 1892.

J.-M. Cowan. — *Théorie des ondes longues; son application aux phénomènes des marées dans les fleuves et les estuaires*, p. 250.

J. Walker. — *Intensité au point focal d'une lunette, quand l'objectif est recouvert d'un diaphragme percé d'ouvertures circulaires*, p. 266.

J. Perry. — *Prismes et tiges chargés latéralement*, p. 269.

Sir W. Thomson. — *Théorie cinétique de la dissipation de l'énergie* p. 291.

W. Lucas et T.-A. Garrett. — *Appareil pour mettre en évidence l'étincelle du résonateur de Hertz*, p. 299.

L. Natanson. — *Illustration dynamique de la formule isotherme*, p. 301.

W. Hibbert. — *Sur un champ magnétique permanent*, p. 307.

Avril 1892.

Th. Even. — *Sur les spectres d'absorption de quelques sels de cuivre en solution aqueuse*, p. 317.

G. Gore. — *Sur l'équilibre chimique dans les mélanges d'électrolytes*, p. 342.

A. Anderson. — *Note sur la résistance et la self-induction des circuits ramifiés*, p. 352.

Lord Rayleigh. — *Remarques sur l'étude de Maxwell relative au théorème de Boltzmann*, 356.

Lord Rayleigh. — *Expérience sur les membranes liquides*, p. 363.

J. Trowbridge. — *Propagation ondulatoire du magnétisme*, p. 374.

E.-L. Nichols et B.-W. Snow. — *Note sur l'absorption sélective de la lumière par les verres d'optique et le spatz calcaire*, p. 379.

Mai 1892.

R. Cradock Nichols. — *Sur la résistance aux déformations transversales dans les verges*, p. 397.

M.-F. Fitzgerald. — *Flexion de longs piliers dans leur propre poids*, p. 428.

C. Barus. — *Note sur le changement de conductibilité calorifique qui accompagne le passage isotherme de l'état solide à l'état liquide*, p. 431.

J. Perry. — *Bobines à réaction* (Chocking Coils), p. 433.

Sp. Umfreville Pickering. — *Procédé pour reconnaître les changements de courbure au moyen d'une tige flexible*, p. 436.

Lord Kelvin. — *Sur un cas décisif opposé à la doctrine de Maxwell-Boltzmann relative à la distribution de l'énergie cinétique*, p. 466.

Lord Rayleigh. — *Sur la théorie des forces superficielles*. III. *Effets de légères souillures*, p. 468.

Juin 1892.

A. Mac Aulay. — *Les quaternions comme instrument pratique de recherches physiques*, p. 477.

W. Baily. — *Sur la construction d'une carte des couleurs*, p. 496.

J. Stoney. — *Analyse du spectre du sodium, comprenant une étude de la vraie place des lignes qui ont été regardées comme secondaires*, p. 503.

E.-F. Herroun. — *Note sur les forces électromotrices de couples comprenant de l'or ou du platine*, p. 516.

C. Ludecking. — *Action de la décharge électrique sur les gaz et les vapeurs*, p. 521.

F.-T. Trouton. — *Méthode pour déterminer la capacité inductive spécifique des diélectriques*, p. 529.

J. Brown. — *Différence de potentiel au contact de deux liquides qui réagissent l'un sur l'autre*, p. 532.

Wiedemann's Annalen.

T. XLV; n° 2, 1892.

R. Scholz. — *Chaleur de dissolution de quelques sels dans l'eau*, p. 193.

C. Dieterici. — *Théorie de la chaleur de dissolution et de la pression osmotique*, p. 207.

H. RUBENS. — *Sur la dispersion des rayons ultra-violets*, p. 238.

F. AUERBACH. — *Mesures de dureté, notamment parmi les corps de la famille du platine*, p. 262.

P. LEBEDEW. — *Sur la force répulsive des corps rayonnants*, p. 292.

L. GRAETZ. — *Sur la conductibilité calorifique des gaz*, p. 298.

K. UMLAUF. — *Sur la double réfraction dans les liquides tournants*, p. 304.

E. BLASIUS. — *Phénomènes d'interférence entre deux plans parallèles*, p. 316.

W. NERNST et R. PAULI. — *Nouvelles recherches sur l'activité électromotrice des ions*, p. 353.

W. NERNST. — *Différence de potentiel des dissolutions diluées*, p. 360.

E. COHN. — *Sur la propagation d'oscillations électriques dans l'eau*, p. 370.

K.-E.-F. SCHMIDT. — *Construction perfectionnée du compensateur de Babinet*, p. 377.

L. ARONS et H. RUBENS. — *Remarque au Mémoire de M. Waitz sur la mesure de la vitesse de propagation d'ondes électriques dans différents milieux*, p. 381.

L. ARONS. — *Une expérience d'électrolyse*, p. 383.

T. XLV, n° 3; 1892.

E. BLASIUS. — *Phénomènes d'interférence dans le dispositif des anneaux de Newton et dans d'autres combinaisons de lentilles*, p. 385.

E. PRINGSHEIM. — *Lampe d'Argand pour observations spectrales*, p. 426.

E. PRINGSHEIM. — *La loi de Kirchhoff et le rayonnement des gaz*, p. 428.

P. DRUDE et W. NERNST. — *Phénomènes de fluorescence développés par les ondes stationnaires*, p. 460.

K.-R. KOCH et A. WÜLLNER. — *Polarisation galvanique de petites électrodes*, p. 475.

G. MEYER. — *Théorie de l'électromètre capillaire*, p. 508.

E. RIECKE et W. VOIGT. — *Constantes piézoélectriques du quartz et de la tourmaline*, p. 523.

L. ARONS. — *Expérience de démonstration avec les oscillations électriques*, p. 553.

W.-C RÖNTGEN. — *Influence de la chaleur de compression sur les évaluations de la compressibilité des liquides*, p. 560.

F. MELDE. — *Mesure de la vitesse de propagation dans les corps membraneux*, p. 568.

C. DIETERICI. — *Addition à son travail.* Théorie de la chaleur de dissolution et de la pression osmotique, p. 589.

E. ENGLISCH. — *Conductibilité électrique d'un amalgame de bismuth et de plomb*, p. 591.

T. XLV, n° 4; 1892.

C. PULFRICH. — *Influence de la température sur la réfraction du verre*, p. 609.

R. COHEN. — *Influence de la pression sur la viscosité des liquides*, p. 666.

WILLY WIEN. — *Sur la notion de la localisation de l'énergie*, p. 685.

F. MELDE. — *Sur la mesure de la vitesse du son dans les corps membraneux* (fin), p. 729.

E. BUDDE. — *Sur les diviseurs intégrants et la température*, 751.

K.-R. KOCH et A. WÜLLNER. — *Sur la polarisation galvanique de petites électrodes* (fin), p. 759.

C. FROMME. — *Recherches expérimentales sur le magnétisme*, p. 798.

T. XLVI; n° 5, 1892.

E. SCHMIDT. — *Sur les franges d'interférence de deux plaques de même épaisseur*, p. 1.

W. BEIN. — *Contribution à l'étude expérimentale des nombres de transport dans les dissolutions salines*, p. 29.

D.-A. GOLDHAMMER. — *Le phénomène magnéto-optique de Kerr et la polarisation circulaire magnétique d'après la théorie électrique de la lumière*, p. 71.

D.-A. GOLDHAMMER. — *Remarques sur le Mémoire de M. E. Cohn* « Sur l'électrodynamique des conducteurs », p.

G. KÜMMELL. — *Sur la formation de précipités à la surface des électrolytes*, p. 105.

S. KALISCHER. — *Théorie et calcul de la distribution des courants dans des conducteurs linéaires*, p. 113.

G. KUMMER. — *Courants produits par des secousses*, p. 119.

E. COHN. — *Sur la méthode de Gordon-Winkelmann pour la mesure des constantes diélectriques*, p. 135.

A. SOMMERFELD. — *Figuration mécanique des phénomènes électromagnétiques dans les corps au repos*, p. 139.

W.-C. RÖNTGEN. — *Méthode pour produire des surfaces d'eau et de mercure parfaitement propres*, p. 152.

E. WIEDEMANN et H. EBERT. — *Sur la répulsion apparente de rayons cathodiques parallèles*, p. 158.

E. WIEDEMANN. — *Remarques sur la réponse de M. Walter à M. Böhlendorf*, p. 160.

M. PLANCK. — *Remarques sur le principe de Carnot-Clausius*, p. 162.

L. MEYER. — *Sur la prétendue pression osmotique*, p. 167.

SUR LA THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES PAR LES ORIFICES EN MINCE PAROI, CIRCULAIRES OU RECTANGULAIRES ALLONGÉS; CALCUL APPROCHÉ DU DÉBIT ET DE SA RÉPARTITION ENTRE LES DIVERS ÉLÉMENTS SUPERFICIELS DE L'ORIFICE;

Par M. J. BOUSSINESQ.

I. Lorsqu'un vase plein de liquide est percé, à travers une partie plane et mince de sa paroi, d'un orifice σ, de dimensions très petites par rapport à ses distances tant aux bords de cette partie plane qu'au reste de la surface limitant dans le vase la masse liquide, la vitesse V de celle-ci, à chaque instant et en chaque point intérieur, dépend assez simplement des volumes dq que débitent par unité de temps, à l'époque considérée, les divers éléments superficiels $d\sigma$ de l'orifice, et des distances r de ceux-ci $d\sigma$ au point intérieur dont il s'agit; car elle est la résultante de vitesses ou d'*appels* élémentaires, dirigés vers les éléments respectifs $d\sigma$ et égaux à $\frac{dq}{2\pi r^2}$. En d'autres termes, le potentiel des vitesses y est celui d'attraction newtonienne $\frac{1}{2\pi}\int\frac{dq}{r}$, comme je l'ai démontré aux pages 542 à 545 de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mais, entre l'orifice σ et la section contractée $m\sigma$ de la veine où les filets fluides deviennent sensiblement rectilignes et parallèles, des difficultés d'intégration jusqu'ici insurmontables se présentent, par suite de la forme non linéaire des conditions spéciales à la surface libre; et il en résulte, même en se bornant au cas ordinaire d'un écoulement permanent, l'impossibilité de déterminer, par le calcul *seul*, le débit total q, ainsi que son mode de répartition sur l'aire σ.

Toutefois, en attribuant au mode de répartition dont il s'agit, c'est-à-dire à la fonction qui exprime le débit, par unité d'aire, des diverses régions de σ, une forme algébrique aussi simple que possible, la forme entière par rapport à leurs coordonnées, on conçoit qu'un choix convenable de ses paramètres (pris en nombre suffisant) au moyen de tout autant d'équations demandées à la théorie ou à l'expérience, puisse fournir une expression approchée de cette fonction et une valeur sensiblement exacte du coef-

ficient m de débit. Or il est facile d'obtenir quatre pareilles conditions ou équations.

La première, expérimentale, consiste à mesurer, par un tube double de Pitot, comme celui dont M. Bazin s'est servi pour avoir la pression et la vitesse dans les nappes des déversoirs, le débit au centre de σ, c'est-à-dire la vitesse du filet central, dont on connaît déjà la direction, évidemment normale au plan de l'orifice, du moins pour toutes les formes usuelles et symétriques de celui-ci. M. Bazin a ainsi trouvé, au centre d'un orifice circulaire de $0^{m},20$ de diamètre,

$$V = 0,632\,V_0,$$

et, au centre d'un orifice rectangulaire allongé (sans contraction latérale) de $0^{m},80$ de longueur sur $0^{m},20$ de largeur,

$$V = 0,690\,V_0,$$

V_0 désignant, dans les deux cas, la vitesse sur le contour, telle qu'on la déduit de la formule théorique de D. Bernoulli, ou même, simplement, de Torricelli, $\sqrt{2gh}$, quand l'écoulement a lieu sous une certaine hauteur de charge h [de 1^{m} environ dans les observations de M. Bazin] [1].

J'avais déjà donné, dans mes *Eaux courantes* (p. 552 et 554), les seconde et troisième équations, fournies par la théorie : elles expriment, l'une, l'annulation du débit par unité d'aire au bord de l'orifice σ, où la vitesse, V, est tangente au plan de σ, l'autre, l'égalité à V_0 de cette vitesse, V, résultant des appels $\frac{dq}{2\pi r^2}$ qui s'y trouvent exercés de tous les points de l'orifice.

Enfin, la quatrième, mixte, en ce qu'elle emprunte à l'expérience la notion de la section contractée $m\sigma$, sera celle dont se servent les auteurs d'Hydraulique pour démontrer que le coefficient de contraction m excède $\frac{1}{2}$. On la forme en appliquant le

---

[1] Il faut donc rejeter l'hypothèse de l'annulation de la vitesse au centre des orifices, admise par Jamin, dans le Tome I de son *Cours de Physique* (p. 326), et que j'avais cru, aux pages 552 et suivantes de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, pouvoir accepter, sur la foi d'une expérience de Lajerhjelm trop peu précise ou, peut-être, rapportée trop sommairement dans les *Expériences hydrauliques* de Poncelet et Lesbros (*Savants étrangers*, t. III, p. 401; 1832), par lesquelles seules j'en ai eu connaissance.

principe des quantités de mouvement, suivant la normale au plan de l'orifice menée vers le dehors, à tout le liquide qui se trouve, à l'époque t, en amont de cette section contractée $m\sigma$, jusqu'à une demi-sphère décrite, dans le vase, autour du centre de l'orifice, avec un rayon assez grand pour que le liquide y afflue avec des vitesses insensibles. La quantité de mouvement de ce liquide croît, pendant l'instant dt, de celle, $\rho m\sigma V_0^2 dt$, que possède la masse fluide $\rho m\sigma V_0 dt$ sortie durant le même instant par la section contractée, avec la vitesse V_0; et il faut égaler sa valeur par unité de temps, $\rho m\sigma V_0^2$, à la somme algébrique des pressions que supporte, suivant la normale au plan de l'orifice, la surface de tout le fluide considéré. Or les parties de cette surface constituées soit par la paroi σ' où est percé l'orifice, et dont nous appellerons $d\sigma'$ les divers éléments, soit par la surface libre et la section contractée de la veine, qui ont en tout la projection σ sur le plan de σ', supportent, d'après la formule de D. Bernoulli, des pressions, par unité d'aire, inférieures de $\frac{1}{2}\rho V^2$ ou de $\frac{1}{2}\rho V_0^2$ à celles qu'éprouvent les éléments de la demi-sphère situés aux mêmes niveaux, V désignant la vitesse du fluide qui glisse sur l'élément $d\sigma'$ de la paroi, et V_0 la vitesse, à fort peu près commune, de celui qui sillonne la surface libre ou qui traverse la section contractée. Il vient donc

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_0^2\sigma + \int V^2 d\sigma'\right)$$

pour la somme algébrique cherchée de pressions; et la quatrième de nos équations, obtenue en l'égalant à $\rho m\sigma V_0^2$, sera, après division par $\rho\sigma V_0^2$,

$$(1) \qquad m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{V^2}{V_0^2}\frac{d\sigma'}{\sigma}.$$

Je me propose de démontrer que, dans les deux cas simples d'un orifice circulaire de rayon R et d'un orifice rectangulaire allongé de largeur $2b$, où le débit par unité d'aire de σ et les vitesses V sur la paroi dépendent d'une seule variable, savoir, la distance r au centre ou la distance y au grand axe, l'on se trouve ainsi conduit, avec une assez grande approximation, aux véritables coefficients m de débit, qui, d'après les observations très soignées

de M. Bazin, sont

$$m = 0,598$$

pour l'orifice circulaire et

$$m = 0,626$$

pour l'orifice rectangulaire allongé.

II. Étudions d'abord le cas de l'orifice circulaire, où, à la distance quelconque ι du centre, le débit par unité d'aire, supposé de forme entière par rapport aux coordonnées, sera évidemment $V_0 f\left(\frac{\iota^2}{R^2}\right)$ si f désigne un certain polynôme. Alors, pour satisfaire à la seconde condition, exigeant que f s'annule sur le contour de l'orifice, c'est-à-dire à la limite $\iota = R$, il faudra prendre cette fonction divisible par $1 - \frac{\iota^2}{R^2}$, ou lui attribuer, en posant $\frac{\iota^2}{R^2} = s$ et appelant c_0, c_1, c_2, ... des coefficients constants, la forme

$$(2) \quad \begin{cases} f\left(\frac{\iota^2}{R^2}\right) = \left(c_0 + c_1 \frac{\iota^2}{R^2} + c_2 \frac{\iota^4}{R^4} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\iota^2}{R^2}\right) \\ \text{ou} \\ f(s) = \Sigma c_n s^n (1 - s) = \Sigma c_n (s^n - s^{n+1}). \end{cases}$$

Par suite, le débit sera, pour une couronne élémentaire $d\sigma = 2\pi\iota d\iota$ de l'aire de l'orifice,

$$dq = 2\pi\iota d\iota V_0 f(s) = \pi R^2 V_0 f(s)\, ds,$$

et, pour tout l'orifice,

$$q = \sigma V_0 \int_0^1 f(s)\, ds,$$

quantité dont le quotient par σV_0 est très sensiblement le *coefficient de contraction* (ou même de débit) m. Il vient donc, comme expression de celui-ci, en effectuant finalement l'intégration de $f(s)\, ds$ ou de $\Sigma c_n (s^n - s^{n+1})\, ds$,

$$(3) \quad m = \int_0^1 f(s)\, ds = \sum \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{c_0}{1.2} + \frac{c_1}{2.3} + \frac{c_2}{3.4} + \ldots.$$

Au centre, où $s = 0$, l'expression (2) de $f(s)$ se réduit à c_0, ce qui y donne, pour le débit de l'unité d'aire, $c_0 V_0$; et la première

condition, fournie par l'expérience, revient à prendre

$$c_0 = 0{,}632. \tag{4}$$

Il reste à exprimer, en fonction de c_0, c_1, c_2, ..., les vitesses, V_0, au bord de l'orifice, et V, près des éléments $d\sigma'$ de paroi situés, dans le plan de l'orifice, à une distance donnée R′ du centre, afin d'utiliser, pour la détermination de f, les deux dernières conditions indiquées. A cet effet, évaluons d'abord le potentiel $\frac{1}{2\pi}\int\frac{dq}{r}$ aux distances R′ du centre supérieures à R. On le calcule assez facilement pour une couronne élémentaire potentiante de rayon ι et de largeur $d\iota$, ou de masse (fictive) totale

$$2\pi\iota\, d\iota\, V_0 f(s) = \pi R^2 V_0 f(s)\, ds,$$

au moyen d'une décomposition de la couronne en éléments parallélogrammes par des droites émanées du point potentié ([1]). Il vient ainsi, par unité de masse potentiante,

$$\frac{1}{\pi^2 R'}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\iota^2}{R'^2}\sin^2\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha;$$

résultat d'où l'on déduit, en multipliant par $\pi R^2 V_0 f(s)ds$ et intégrant de $s = 0$ à $s = 1$, le potentiel total

$$\varphi = \frac{V_0}{\pi}\frac{R^2}{R'}\int_0^1 f(s)\, ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{R^2\sin^2\alpha}{R'^2}s\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha. \tag{5}$$

Sa dérivée en R′, changée de signe, est l'expression de la vitesse cherchée V. Enfin, celle-ci, divisée par V_0, devient, après une réduction évidente et en posant, pour abréger, $\frac{R^2}{R'^2} = \beta$,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{V}{V_0} &= \frac{\beta}{\pi}\int_0^1 f(s)\, ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\beta s\sin^2\alpha)^{-\frac{3}{2}} d\alpha\\ &= \frac{\beta}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\int_0^1 f(s)(1-\beta s\sin^2\alpha)^{-\frac{3}{2}} ds.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

([1]) *Voir*, par exemple, les pages 113 à 116 de mon Volume intitulé : *Applications des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques*, etc.

Développons le second membre en série par l'application de la formule du binôme à $(1-\beta s\sin^2\alpha)^{-\frac{3}{2}}$. Nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{V}{V_0} = \frac{\beta}{2}\Bigg[&\int_0^1 f(s)\,ds + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\beta\int_0^1 s f(s)\,ds \\ &+ 5\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2\beta^2\int_0^1 s^2 f(s)\,ds + \ldots \\ &+ (2q+1)\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2q-1}{2q}\right)^2\beta^q\int_0^1 s^q f(s)\,ds + \ldots\Bigg], \end{aligned}\right.$$

ou bien, après substitution de $\Sigma c_n(s^n - s^{n+1})$ à $f(s)$, suivie de l'effectuation des calculs, et en observant que $\int_0^1 f(s)\,ds$ ne diffère pas sensiblement du coefficient m de contraction.

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{V}{V_0} = \frac{\beta}{2}\Bigg[&m + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\beta\sum\frac{c_n}{(n+2)(n+3)} \\ &+ 5\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2\beta^2\sum\frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \ldots \\ &+ (2q+1)\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2q-1}{2q}\right)^2\beta^q\sum\frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

III. Le troisième membre de (6) permettra de calculer sous forme finie la vitesse au bord $R' = R$ de l'orifice, où $\beta = 1$. Dans ce but, on prendra comme nouvelle variable, destinée à tenir lieu de α, la tangente, τ, de la moitié de cet angle α, ce qui donnera

$$d\alpha = \frac{2\,d\tau}{1+\tau^2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{2\tau}{1+\tau^2}.$$

En posant d'ailleurs, pour abréger, $\theta = 4\tau^2 s$ et substituant $\Sigma c_n(s^n - s^{n+1})$ à $f(s)$, il vient

$$(9)\quad (\text{Pour } R' = R)\quad \frac{V}{V_0} = \frac{2}{\pi}\sum c_n\int_0^1 (1+\tau^2)^2\,d\tau\int_0^{4\tau^2}\frac{\theta^n(4\tau^2-\theta)\,d\theta}{(4\tau^2)^{n+2}\left[\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}\right]^3}.$$

Or

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(4\tau^2)^{n+2}}\int_0^{4\tau^2}\frac{\theta^n(4\tau^2-\theta)\,d\theta}{\left[\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}\right]^3} \\ &\quad = \frac{2}{(4\tau^2)^{n+2}}\int_{\theta=0}^{\theta=4\tau^2}\theta^n(4\tau^2-\theta)\,d\frac{1}{\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}}; \end{aligned}$$

et, en intégrant par parties, l'on a :

1° Pour $n = 0$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(4\tau^2)^2}\int_0^{4\tau^2}\frac{(4\tau^2-\theta)\,d\theta}{[\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}]^3} = \frac{-2.4\tau^2}{(4\tau^2)^2(1+\tau^2)} - \frac{4}{(4\tau^2)^2}\int_0^{4\tau^2}\frac{-d\theta}{2\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}} \\ &\quad = \frac{-1}{2\tau^2(1+\tau^2)} - \frac{4}{(4\tau^2)^2}\left[\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}\right]_0^{4\tau^2} = \frac{1}{2\tau^2}\left(1-\frac{1}{1+\tau^2}\right) = \frac{1}{2(1+\tau^2)};\end{aligned}\right.$$

2° Pour $n > 0$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(4\tau^2)^{n+2}}\int_0^{4\tau^2}\frac{\theta^n(4\tau^2-\theta)\,d\theta}{[\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}]^3} = \frac{I_{n+1}-I_n}{2\tau^2}, \\ &\text{où } I_n = \frac{n}{(4\tau^2)^n}\int_0^{4\tau^2}\frac{\theta^{n-1}\,d\theta}{\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}}.\end{aligned}\right.$$

Mais, pour $n > 0$,

$$I_n = \frac{-2n}{(4\tau^2)^n}\int_{\theta=0}^{\theta=4\tau^2}\theta^{n-1}\,d\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta};$$

ce qui donne, quand $n = 1$, $I_1 = 1$, et, quand n est > 1, en intégrant par parties, puis dédoublant $\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}$ en $\dfrac{(1+\tau^2)^2}{\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}} - \dfrac{\theta}{\sqrt{(1+\tau^2)^2-\theta}}$,

$$I_n = -\frac{n(1-\tau^2)}{2\tau^2} + n\frac{(1+\tau^2)^2}{2\tau^2}I_{n-1} - 2(n-1)I_n,$$

ou bien, après avoir isolé I_n,

$$(12)\quad I_n = \frac{n}{2n+1}\,\frac{(1+\tau^2)^2 I_{n-1} - (1-\tau^2)}{2\tau^2}.$$

Joignons cette formule (12), spécifiée successivement pour $n = 2, 3, 4, \ldots$, à la précédente $I_1 = 1$, et nous aurons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &I_1 = 1,\quad I_2 = 1 + \frac{\tau^2}{3},\quad I_3 = 1 + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{10}, \\ &I_4 = 1 + \frac{3\tau^2}{5} + \frac{\tau^4}{5} + \frac{\tau^6}{35},\quad I_5 = 1 + \frac{2\tau^2}{3} + \frac{2\tau^4}{7} + \frac{\tau^6}{14} + \frac{\tau^8}{126}, \\ &I_6 = 1 + \frac{5\tau^2}{7} + \frac{5\tau^4}{14} + \frac{5\tau^6}{42} + \frac{\tau^8}{42} + \frac{\tau^{10}}{462}, \\ &I_7 = 1 + \frac{3\tau^2}{4} + \frac{5\tau^4}{12} + \frac{\tau^6}{6} + \frac{\tau^8}{22} + \frac{\tau^{10}}{11.12} + \frac{\tau^{12}}{11.12.13},\quad \ldots;\end{aligned}\right.$$

d'où il résulte

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{I_2 - I_1}{2\tau^2} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{I_3 - I_2}{2\tau^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{5}\right),\\
&\frac{I_4 - I_3}{2\tau^2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{7}\right),\\
&\frac{I_5 - I_4}{2\tau^2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3} + \frac{3\tau^2}{7} + \frac{3\tau^4}{14} + \frac{5\tau^6}{126}\right).\\
&\frac{I_6 - I_5}{2\tau^2} = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{3} + \frac{\tau^6}{9} + \frac{\tau^8}{66}\right),\\
&\frac{I_7 - I_6}{2\tau^2} = \frac{1}{42}\left(\frac{3}{4} + \frac{5\tau^2}{4} + \tau^4 + \frac{5\tau^6}{11} + \frac{5\tau^8}{44} + \frac{7\tau^{10}}{44.13}\right), \quad \dots
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les valeurs respectives du premier membre de (11) pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, à substituer dans le second membre de (9), avec celle que donne (10) pour $n = 0$ et qui est $\frac{1}{2(1+\tau^2)}$. Les multiplications par $(1+\tau^2)^2$ et les intégrations relatives à τ entre les deux limites $\tau = 0$, $\tau = 1$ n'offrent ensuite aucune difficulté, et l'équation (9) donne finalement, après additions numériques et réductions,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\text{(au bord de l'orifice)}\\
&\frac{V}{V_0} = \frac{4}{3\pi}\left(c_0 + \frac{7}{15}c_1 + \frac{157}{15.35}c_2 + \frac{803}{15.35.7}c_3 + \frac{62417}{15.35.63.11}c_4\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{293327}{27.49.11^2.13}c_5 + \frac{1077385}{9.49.11^2.13^2}c_6 + \dots\right),
\end{aligned}\right.$$

résultat bien d'accord avec celui que fournit un peu plus directement l'emploi, comme variables d'intégration, de coordonnées polaires autour du point du bord où l'on évalue la vitesse V (*Eaux courantes*, p. 560 et 561).

IV. Nous pouvons maintenant, d'une part, en vertu de la troisième des quatre conditions auxquelles nous savons astreint le mode de distribution $V_0 f(s)$ du débit, poser, dans (15), $V = V_0$, et, d'autre part, substituer l'expression (8) de $\frac{V}{V_0}$ dans la dernière, (1), des mêmes conditions, où l'on aura

$$\frac{d\sigma'}{\sigma} = \frac{2\pi R' dR'}{\pi R^2} = d\frac{1}{\beta} = -\frac{d\beta}{\beta^2},$$

avec β décroissant de 1 à zéro. Il viendra, entre les constantes c_1,

c_2, c_3, ..., les deux équations cherchées

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{7}{15}c_1 + \frac{157}{15.35}c_2 + \frac{803}{15.35.7}c_3 + \frac{62417}{15.35.63.11}c_4 \\
&\qquad + \frac{293327}{27.49.11^2.13}c_5 + \frac{1077385}{9.49.11^2.13^2}c_6 + \ldots = \frac{3\pi}{4} - c_0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
m = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\int_0^1 \Bigg[& m + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} \\
& + 5\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2 \beta^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \ldots \\
& + (2q+1)\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2q-1}{2q}\right)^2 \\
& \times \beta^q \sum \frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \ldots \Bigg]^2 d\beta,
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on sait déjà, par (4), que $c_0 = 0{,}632$, et, par (3), que le coefficient de contraction m égale $\sum \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}$ [1].

La somme des coefficients de la série qui figure par son carré sous le signe $\int$, dans (17), est évidemment la valeur de cette même série pour $\beta = 1$, valeur qui, d'après (8), où il faut faire alors $V = V_0$, est 2. On a donc la relation, très importante pour les calculs suivants,

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
& m + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} + 5\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2 \sum \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \ldots \\
& + (2q+1)\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2q-1}{2q}\right)^2 \sum \frac{c_n}{(n+q+1)(n+q+2)} + \ldots = 2.
\end{aligned}
\right.
$$

V. Cela posé, convenons de garder, dans l'expression (2) de $f(s)$, avec le coefficient c_0 donné, un seul des autres, c_1, c_2, c_3, ..., savoir, celui qui permettra le mieux de satisfaire aux équations (16) et (17). Essayons donc successivement c_1, c_2, c_3, ...

---

(1) En réduisant, sous le signe $\int$, la quantité entre crochets à son premier terme, et négligeant par conséquent tous les autres, essentiellement positifs d'après leur signification telle qu'elle paraît au second membre de (7), il vient, à la place de l'équation (17), l'inégalité du second degré $m > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} m^2$; d'où l'on déduit évidemment $m > 2(2 - \sqrt{3})$ ou $m > 0{,}536$. Le coefficient de contraction m admet donc, dans toutes les hypothèses possibles, la limite inférieure 0,536, un peu plus avantageuse que celle, 0,5, à laquelle on s'arrête d'ordinaire dans les Traités d'Hydraulique en négligeant le dernier terme de l'équation (1).

L'équation (16), où

$$\frac{3}{4}\pi - c_0 = 2,3562 - 0,632 = 1,7242,$$

donnera, dans ces divers cas,

$$(19)\quad \begin{cases} c_1 = 3,6947, & c_2 = 5,7656, & c_3 = 7,8909, \\ c_4 = 10,0502, & c_5 = 12,2329, & c_6 = 14,4320, \quad \ldots, \end{cases}$$

et les valeurs correspondantes (3) de m seront

$$(20)\quad \begin{cases} m_1 = 0,9318, & m_2 = 0,7965, & m_3 = 0,7105, \\ m_4 = 0,6510, & m_5 = 0,6073, & m_6 = 0,5737, \quad \ldots . \end{cases}$$

Il reste à calculer le second membre de (17). On trouve, pour la série qui y figure sous le signe $\int$, les expressions respectives

$$(0,9318 + 0,3099\beta + 0,1669\beta^2 + \ldots)^2 = 0,8682 + 0,5775\beta + 0,4071\beta^2 + \ldots,$$

$$\begin{cases} (0,7965 + 0,2952\beta + 0,1722\beta^2 + 0,1154\beta^3 + \ldots)^2 \\ = 0,6344 + 0,4703\beta + 0,3614\beta^2 + 0,2855\beta^3 + \ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,7105 + 0,2763\beta + 0,1691\beta^2 + 0,1179\beta^3 + \ldots)^2 \\ = 0,5049 + 0,3926\beta + 0,3167\beta^2 + 0,2610\beta^3 + \ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,6510 + 0,2585\beta + 0,1632\beta^2 + 0,1170\beta^3 + 0,0893\beta^4 + 0,0709\beta^5 + 0,0578\beta^6 + \ldots \\ = 0,4238 + 0,3365\beta + 0,2793\beta^2 + 0,2367\beta^3 + 0,2034\beta^4 + 0,1767\beta^5 + 0,1548\beta^6 + \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,6073 + 0,2428\beta + 0,1565\beta^2 + 0,1145\beta^3 + 0,0890\beta^4 + 0,0718\beta^5 \\ \quad + 0,0593\beta^6 + 0,0500\beta^7 + 0,0428\beta^8 + 0,0371\beta^9 + 0,0324\beta^{10} + \ldots)^2 \\ = 0,3688 + 0,2949\beta + 0,2490\beta^2 + 0,2151\beta^3 + 0,1882\beta^4 + 0,1662\beta^5 \\ \quad + 0,1479\beta^6 + 0,1324\beta^7 + 0,1192\beta^8 + 0,1078\beta^9 + 0,0980\beta^{10} + \ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,5737 + 0,2293\beta + 0,1498\beta^2 + 0,1113\beta^3 + 0,0877\beta^4 + \ldots)^2 \\ = 0,3291 + 0,2631\beta + 0,2245\beta^2 + 0,1964\beta^3 + 0,1742\beta^4 + \ldots, \end{cases}$$

....

Or la somme des coefficients (tous positifs) des seconds membres, évidemment exprimée, dans chaque cas, par le carré de la série (18), devient, à la limite, le carré, 4, de la valeur de cette série; d'où il suit que la somme totale des coefficients non écrits explicitement aux seconds membres est l'excédent de 4 sur celle des coefficients écrits, au nombre, respectivement, de 3, 4, 4, 7, 11, 5, ..., et qu'elle vaut, dans ces divers cas,

$$2,1471, \quad 2,2484, \quad 2,5248, \quad 2,1887, \quad 1,9125, \quad 2,8127, \quad \ldots .$$

D'ailleurs, dans le produit, intégré entre les deux limites o et 1, des mêmes seconds membres par $d\beta$, les coefficients non écrits, et qui viennent respectivement après celui de β^2, ou de β^3, ou de β^3, ou de β^6, ou de β^{10}, ou de β^4, ..., seraient affectés des diviseurs entiers supérieurs à 3, ou à 4, ou à 4, ou à 7, ou à 11, ou à 5, ...; et il en résulterait, en tout, des intégrales positives, évidemment inférieures, respectivement, à

$$\frac{2,1471}{4},\quad \frac{2,2484}{5},\quad \frac{2,5248}{5},\quad \frac{2,1887}{8},\quad \frac{1,9125}{12},\quad \frac{2,8127}{6},\quad \ldots,$$

ou, après effectuation, à

(21) 0,5368, 0,4497, 0,5050, 0,2736, 0,1594, 0,4688, ...

L'intégrale définie qui figure dans (17) aura donc pour valeur ce que donnent, multipliés par $d\beta$ et intégrés de zéro à 1, les termes explicitement écrits aux seconds membres ci-dessus, c'est-à-dire

$$0,8682 + \frac{0,5775}{2} + \frac{0,4071}{3},\quad \text{etc.},$$

ou bien, tous calculs faits,

(22) 1,2927, 1,0614, 0,8720, 0,8366, 0,7890, 0,6195, ...,

augmenté d'une fraction inconnue (mais notable) de l'expression (21) correspondante. Il vient ainsi, dans les quatre premiers cas, des totaux moindres que

$$1,2927 + 0,5368 = 1,8295,\qquad 1,0614 + 0,4497 = 1,5110,$$
$$0,8720 + 0,5050 = 1,3770,\qquad 0,8366 + 0,2736 = 1,1102,$$

et donnant, par suite, au second membre de (17), des valeurs sensiblement inférieures à

$$\frac{1}{2} + \frac{1,8295}{8} = 0,7287,\qquad \frac{1}{2} + \frac{1,5110}{8} = 0,6889,$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1,3770}{8} = 0,6721,\qquad \frac{1}{2} + \frac{1,1102}{8} = 0,6388,$$

alors que le premier membre de (17) est respectivement, d'après (20),

0,9318, 0,7965, 0,7105, 0,6510,

et, par conséquent, plus fort. Au contraire, dans les cas qui suivent le cinquième, l'intégrale définie dépasserait de même sensiblement sa partie principale ou explicitement calculée 0,6195.... prise seule; et le second membre de (17) excéderait, par suite, d'une manière notable, $\frac{1}{2} + \frac{0,6195}{8} = 0,5774$.... alors que, d'après (20), le premier membre, 0,5737...., est inférieur à cette limite.

VI. Il ne peut donc y avoir égalité approchée des deux membres de (17) que dans le cinquième cas, où l'intégrale définie qui figure au second membre de (17) est la somme de 0,7890 et d'une partie notable, mais inconnue, de $0,1594 = 2(0,0797)$. Appelant θ un nombre compris entre zéro et 1, écrivons cette partie inconnue $0,0797 \pm 0,0797\theta$; ce qui donne, pour l'intégrale,

$$0,8687 \pm 0,0797\theta.$$

Et le second membre de (17) devient lui-même

$$(23) \qquad 0,6086 \pm 0,0100\theta,$$

quantité qui se confond bien, sensiblement, avec le premier membre $m_5 = 0,6073$.

En voyant comment décroissent, sous le signe $\int$ du second membre de (17), les différences des coefficients successifs écrits, 0,3688, 0,2949, ..., 0,0980, de la série en β, on peut augurer que le premier coefficient non écrit serait $0,0980 - 0,0084 = 0,0896$: ce qui donnerait à fort peu près $0,0896\beta^{11}$ pour le terme correspondant et réduirait dès lors à

$$1,9125 - 0,0896 = 1,8229$$

la somme des coefficients non écrits. Il en résulterait, pour l'intégrale à calculer, une valeur de la forme

$$0,7890 + \frac{0,0896}{12} + \frac{1,8229}{13}\,\frac{1 \pm \theta}{2} = 0,8666 \pm 0,0701\theta.$$

Et le second membre de (17) serait, au lieu de (23),

$$(23\ bis) \qquad 0,6083 \pm 0,0088\theta,$$

expression où il est certain que θ, quoique inconnu, se trouve notablement au-dessous de sa limite 1, et dont, par conséquent,

l'excédent 0,0010 ± 0,00888θ, sur le premier membre $m_3 = 0,6073$, est loin d'atteindre la valeur absolue 0,01. On peut donc regarder l'équation (17) comme très sensiblement vérifiée par l'emploi, dans la formule (2), des deux coefficients $c_0 = 0,632$ et $c_5 = 12,2329$.

Une plus grande approximation du second membre de (17) exigerait des calculs assez laborieux.

VII. En résumé, le débit par unité d'aire, à la distance ι du centre d'un orifice circulaire ayant un rayon donné R et sur le bord duquel la formule de D. Bernoulli indique une certaine vitesse V_0, admettra comme expression approchée

$$(24)\quad \begin{cases} V_0 f\left(\dfrac{\iota^2}{R^2}\right) = V_0\left(0,632 + 12,2329\dfrac{\iota^{10}}{R^{10}}\right)\left(1 - \dfrac{\iota^2}{R^2}\right), \\ \text{ou} \\ V_0 f(s) = V_0(0,632 + 12,2329 s^5)(1 - s). \end{cases}$$

En même temps, le coefficient de contraction m sera très sensiblement 0,6073, ou plutôt un peu moins, vu l'existence de petits frottements, négligés ici, qui, pour la vitesse 0,632 V_0 *observée* au centre, doivent réduire légèrement le débit vers les bords. Or cette valeur théorique, $m = 0,6$ environ, se trouve bien d'accord avec le coefficient expérimental de débit $m = 0,598$, obtenu par M. Bazin (¹).

D'après (24), la dérivée $f'(s)$, divisée par 12,2329, est

$$-6s^5 + 5s^4 - 0,051664.$$

On voit, sur sa propre dérivée $-10s^3(3s-2)$, que, de $s=0$ à $s=\frac{2}{3}$, elle croît, pour décroître ensuite : négative de $s=0$ à $s=0,36903$, elle est positive de $s=0,36903$ à $s=0,81370$, et, de nouveau, négative au delà de $s=0,81370$. Donc, le débit par

(¹) On sait que les orifices très petits donnent des coefficients de débit plus forts, à cause, sans doute, d'un effet de capillarité ou d'adhérence de la couche superficielle de la veine sur l'étroite paroi cylindrique de l'orifice, effet propre à rapprocher la veine elle-même de cette forme cylindrique et à diminuer par conséquent la contraction. Mais son influence devait être complètement insensible dans l'orifice de $0^m,20$ de diamètre dont M. Bazin mesurait le débit; car des observations d'ingénieurs américains sur des orifices circulaires de diamètres beaucoup plus grands encore, et atteignant jusqu'à $0^m,60$, ont également fourni des coefficients de débit très voisins de 0,6.

unité d'aire (24), ou composante de la vitesse suivant la normale au plan de l'orifice, décroît lentement, autour du centre (par suite de l'inclinaison de plus en plus grande des filets), jusqu'à la distance $\iota = \sqrt{0,36903}\,R = 0,6075\,R$, où elle atteint son minimum $0,45160\,V_0$. Au delà, l'influence de l'accroissement de vitesse, dû aux diminutions de pression qu'entraînent les forces centrifuges, l'emporte sur celle de l'inclinaison; et le débit par unité d'aire grandit, jusqu'à la distance $\iota = \sqrt{0,81370}\,R = 0,90205\,R$ au centre, où elle atteint son maximum $0,93065\,V_0$. Aux distances supérieures, l'influence des inclinaisons de plus en plus fortes des filets l'emporte de nouveau, pour réduire finalement à zéro le débit $V_0 f(1)$ sur le bord, où, cependant, la vitesse d'écoulement atteint son maximum V_0.

VIII. Passons maintenant au cas d'un orifice rectangulaire allongé, de largeur $2b$. Le débit par unité d'aire, supposé encore fonction entière des coordonnées, devra évidemment y être, aux diverses distances η de l'axe longitudinal, $V_0 f\left(\frac{\eta^2}{b^2}\right)$, avec f de la forme

(25) $$f\left(\frac{\eta^2}{b^2}\right) = \left(c_0 + c_1\frac{\eta^2}{b^2} + c_2\frac{\eta^4}{b^4} + c_3\frac{\eta^6}{b^6} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right),$$

ou, plus simplement, en appelant s le rapport $\frac{\eta^2}{b^2}$,

(25 *bis*) $$f(s) = (\Sigma c_n s^n)(1 - s) = \Sigma c_n(s^n - s^{n+1}).$$

Sur l'axe, où $s = 0$, la vitesse, normale au plan de l'orifice, se trouvera exprimée par $V_0 f(0) = c_0 V_0$, et, vu sa valeur expérimentale $0,690\,V_0$, il viendra, comme première condition imposée aux coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots,$

(26) $$c_0 = 0,690.$$

Quant au débit total q (par unité de longueur), il aura l'expression $2\int_0^b V_0 f(s)\,d\eta = bV_0\int_0^1 f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}$, et son quotient par $2bV_0$ sera le coefficient de contraction (ou de débit) m.

Il vient donc pour la moitié de ce coefficient, en substituant

finalement à $f(s)$ sa dernière valeur (25 *bis*) et intégrant,

$$(27)\quad \frac{m}{2} = \frac{1}{4}\int_0^1 f(s)\frac{ds}{\sqrt{s}} = \sum \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{c_0}{1.3} + \frac{c_1}{3.5} + \frac{c_2}{5.7} + \ldots$$

Évaluons, d'autre part, la vitesse V dans le plan de l'orifice, aux distances y de l'axe supérieures à b. Chaque élément rectangulaire $d\xi\, d\eta$ de la bande d'orifice comprise entre les deux parallèles $y = \eta$, $y = \eta + d\eta$ à l'axe, exerce au point considéré (x, y) l'*appel* $\frac{dq}{2\pi r^2} = \frac{V_0 f(s)\, d\xi\, d\eta}{2\pi[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]}$, qui a, suivant la perpendiculaire menée de (x, y) à l'axe, la composante

$$\frac{V_0 f(s)}{2\pi}(y - \eta)\, d\eta\, [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{-\frac{3}{2}}\, d\xi.$$

Par suite, celle-ci, intégrée de $\xi = -\infty$ à $\xi = \infty$, donne, comme appel total de la bande en (x, y),

$$\frac{V_0 f(s)\, d\eta}{2\pi(y - \eta)}\left[\frac{\xi - x}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}\right]_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} = \frac{V_0 f(s)\, d\eta}{\pi(y - \eta)}.$$

En y joignant l'appel analogue de la bande symétrique comprise de $y = -(\eta + d\eta)$ à $y = -\eta$, la somme est

$$\frac{V_0 f(s)\, d\eta}{\pi}\left(\frac{1}{y - \eta} + \frac{1}{y + \eta}\right) = \frac{2V_0 f(s) y\, d\eta}{\pi(y^2 - \eta^2)} = \frac{V_0}{\pi}\frac{b}{y}\frac{f(s)}{1 - \frac{b^2}{y^2}s}\frac{ds}{\sqrt{s}};$$

et l'on n'a plus qu'à intégrer cette expression depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$ pour avoir la vitesse cherchée V. Il vient donc, en divisant par V_0 et, finalement, en substituant $\Sigma c_n(s^n - s^{n+1})$ à $f(s)$, pour effectuer l'intégration terme à terme après avoir remplacé $1 - \left(\frac{b^2}{y^2}s\right)^{-1}$ par son développement convergent $1 + \frac{b^2}{y^2}s + \frac{b^4}{y^4}s^2 + \ldots$

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= \frac{1}{\pi}\frac{b}{y}\int_0^1 f(s)\left(1 - \frac{b^2}{y^2}s\right)^{-1}\frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{b}{y}\left[\sum \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)}\right. \\ &\quad + \frac{b^2}{y^2}\sum \frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)} \\ &\quad \left. + \frac{b^4}{y^4}\sum \frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)} + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

A la limite $y = b$, le dernier membre prend la forme finie $\frac{2}{\pi}\sum \frac{c_n}{2n+1}$, à cause des identités

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3},$$
$$\frac{2}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

et l'on a

(29) (au bord de l'orifice) $$\frac{V}{V_0} = \frac{2}{\pi}\sum \frac{c_n}{2n+1}.$$

IX. Ainsi, la condition $V = V_0$ (pour $y = \pm b$) revient à écrire $\sum \frac{c_n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$, ou à poser entre les coefficients inconnus c_1, c_2, c_3, ..., vu, finalement, (26), la relation

(30) $$\frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{5} + \frac{c_3}{7} - \frac{c_4}{9} + \dots = \frac{\pi}{2} - c_0 = 0,8808.$$

D'autre part, l'équation (1), dernière de nos quatre conditions imposées au mode $V_0 f(s)$ de répartition du débit, s'écrira, si l'on divise par 2, $\frac{m}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_b^\infty \frac{V^2}{V_0^2}\frac{dy}{b}$; et, en y substituant à $\frac{V}{V_0}$ le dernier membre de (28) $\left[\text{où } \sum \frac{c_n}{(2n+1)(2n+3)} \text{ n'est autre que } \frac{m}{2} \text{ en vertu de (27)}\right]$, après avoir d'ailleurs choisi une nouvelle variable d'intégration γ égale à $\frac{b}{y}$, on aura l'équation

(31) $$\left\{\begin{aligned} \frac{m}{2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 \Bigg[& \frac{m}{2} - \gamma^2 \sum \frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)} \\ & + \gamma^4 \sum \frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)} - \dots \Bigg]^2 d\gamma \text{ [1]}. \end{aligned}\right.$$

[1] En négligeant sous le signe $\int$ les termes en γ^2, γ^4, ..., essentiellement positifs d'après leur provenance au second membre de (28), il vient l'inégalité du second degré $\frac{m}{2} \ge \frac{1}{4} + \frac{m^2}{\pi^2}$, qui, résolue, donne comme limite inférieure de m, dans toute hypothèse possible sur le mode de répartition du débit,

$$\frac{\pi^2}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right) = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right)^{-1} = 0,565.$$

Dans celle-ci, la somme des coefficients du polynôme entre crochets, en γ^2, est la valeur, multipliée par $\frac{\pi}{4}$, du dernier membre de (28), à la limite $y = b$ où le premier membre de (28) est 1; ce qui permet, en élevant au carré, de poser la relation, très importante pour les calculs suivants,

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{m}{2} + \sum \frac{c_n}{(2n+3)(2n+5)} \right. \\ \qquad \left. + \sum \frac{c_n}{(2n+5)(2n+7)} + \ldots \right]^2 = \frac{\pi^2}{16} = 0,61685. \end{array} \right.$$

X. Réduisons encore à un seul, comme pour l'orifice circulaire, les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$, en choisissant celui d'entre eux qui, déterminé par (30), permettra le mieux de satisfaire à l'équation (31).

La relation (30) donne ainsi, successivement, lorsqu'on réduit son premier membre à un seul terme,

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 2,6424, \\ c_2 = 4,4040, \\ c_3 = 6,1656, \\ c_4 = 7,9272, \\ c_5 = 9,6888, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array} \right.$$

et il résulte alors de (27), pour les moitiés des coefficients de contraction correspondants,

$$(34)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1}{2} = 0,4062, \\ \frac{m_2}{2} = 0,3558, \\ \frac{m_3}{2} = 0,3279, \\ \frac{m_4}{2} = 0,3101, \\ \frac{m_5}{2} = 0,2978, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Quant à la série qui figure, sous le signe $\int$, au second membre

de (31), elle reçoit les expressions respectives

$$(0,4062 + 0,1215\gamma^2 + 0,0617\gamma^4 + \ldots)^2 = 0,1650 + 0,0987\gamma^2 + 0,0648\gamma^4 + \ldots,$$

$$(0,3558 + 0,1159\gamma^2 + 0,0642\gamma^4 + \ldots)^2 = 0,1266 + 0,0825\gamma^2 + 0,0591\gamma^4 + \ldots,$$

$$\left\{\begin{array}{l}(0,3279 + 0,1083\gamma^2 + 0,0628\gamma^4 + 0,0426\gamma^6 + \ldots)^2 \\ = 0,1075 + 0,0710\gamma^2 + 0,0529\gamma^4 + 0,0415\gamma^6 + \ldots,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(0,3101 + 0,1014\gamma^2 + 0,0604\gamma^4 + 0,0420\gamma^6 + 0,0315\gamma^8 + 0,0247\gamma^{10} + 0,0200\gamma^{12} + \ldots)^2 \\ = 0,0961 + 0,0629\gamma^2 + 0,0477\gamma^4 + 0,0383\gamma^6 + 0,0317\gamma^8 + 0,0268\gamma^{10} + 0,0230\gamma^{12} + \ldots,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(0,2978 + 0,0957\gamma^2 + 0,0577\gamma^4 + 0,0409\gamma^6 + 0,0313\gamma^8 + \ldots)^2 \\ = 0,0887 + 0,0570\gamma^2 + 0,0435\gamma^4 + 0,0354\gamma^6 + 0,0298\gamma^8 + \ldots,\end{array}\right.$$

....

En vertu de (32), les sommes des coefficients non écrits explicitement aux seconds membres égalent les excédents respectifs de $\frac{\pi^2}{16}$, ou de 0,61685, sur les sommes des coefficients écrits, qui sont, respectivement, au nombre de 3, 3, 4, 7, 5, ... On trouve ainsi, pour ces excédents,

$$0,2883, \quad 0,3486, \quad 0,3439, \quad 0,2903, \quad 0,3625, \quad \ldots.$$

Et comme les coefficients successifs dont ils expriment les sommes acquerraient en diviseur, par le fait de l'intégration définie indiquée au second membre de (31), les divers impairs supérieurs à 5, 5, 7, 13, 9, ..., le résultat total de cette intégration comprendra : 1° l'intégrale fournie par la partie explicitement écrite, savoir $0,1650 + \frac{0,0987}{3} + \frac{0,0648}{5}$, etc., ou, tous calculs faits,

$$(35) \qquad 0,2108, \quad 0,1659, \quad 0,1477, \quad 0,1399, \quad 0,1247, \quad \ldots;$$

2° une partie notable, mais inconnue, des quotients $\frac{0,2883}{7}$, $\frac{0,3486}{7}$, $\frac{0,3439}{9}$, $\frac{0,2903}{15}$, $\frac{0,3625}{11}$, ... qui sont

$$(36) \qquad 0,0412, \quad 0,0498, \quad 0,0382, \quad 0,0194, \quad 0,0330, \quad \ldots.$$

Dans les trois premiers cas, l'intégrale définie n'atteint donc pas les valeurs

$$0,2108 + 0,0412 = 0,2520,$$
$$0,1659 + 0,0498 = 0,2157,$$
$$0,1477 + 0,0382 = 0,1859.$$

et le second membre de (31) est, par suite, assez au-dessous, respectivement, de

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}(0,2520)=0,3521,$$

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}(0,2157)=0,3374,$$

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}(0,1859)=0,3253,$$

nombres moindres eux-mêmes que le premier membre, égal, d'après (34), à 0,4062, 0,3558, 0,3279.

Au contraire, dans les cas qui suivent le quatrième, l'intégrale définie figurant au second membre de (31) excède d'une manière sensible sa partie explicitement calculée 0,1247, ...; et ce second membre dépasse par suite, assez notablement, les quantités $\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}(0,1247)=0,3005, \ldots$, qui sont, néanmoins, supérieures au premier membre $\frac{1}{2}m_5=0,2978, \ldots$.

XI. Ainsi le seul cas qui puisse convenir est le quatrième, où les deux coefficients conservés dans l'expression (25) ou (25 *bis*) de la répartition du débit sont $c_0=0,690$ et $c_4=7,9272$. Alors l'intégrale définie à évaluer dans le second membre de (31), égale à la somme de 0,1399 et d'une partie notable, mais inconnue, de 0,0194, peut s'écrire, en appelant θ un nombre positif sensiblement inférieur à l'unité,

$$0,1399+(0,0194)\frac{1\pm\theta}{2}=0,1495\pm0,0097\theta.$$

Le second membre de (31) devient, par suite,

$$(37)\qquad \frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}(0,1495\pm0,0097\theta)=0,3106\pm0,0039\theta;$$

ce qui ne diffère pas sensiblement du premier membre, 0,3101 d'après (34). Les valeurs $c_0=0,690$, $c_4=7,9272$ vérifient donc, à très peu près, toutes les conditions imposées, et elles correspondent à un coefficient théorique de contraction double de 0,3101 ou exprimé, sauf écart négligeable, par la formule

$$(38)\qquad m=0,62.$$

XII. C'est ce que confirme assez bien l'observation, puisqu'elle a donné à M. Bazin 0,626 pour m, ou, plutôt, pour le coefficient de débit, que devait renforcer légèrement une certaine *non-pression* constatée dans l'axe de la veine et produisant un surcroît de hauteur de charge dont fait abstraction la formule usuelle $m\sqrt{2gh}$. Il en résulte que le débit par unité d'aire, aux diverses distances $\eta = b\sqrt{s}$ de l'axe longitudinal de l'orifice, doit admettre, d'après (25) et (25 *bis*), l'expression approchée

$$(39)\qquad \begin{cases} V_0 f\left(\dfrac{\eta^2}{b^2}\right) = V_0\left(0,690 + 7,9272\dfrac{\eta^8}{b^8}\right)\left(1 - \dfrac{\eta^2}{b^2}\right), \\ \text{ou} \\ V_0 f(s) = V_0(0,690 + 7,9272 s^4)(1 - s). \end{cases}$$

Le dernier membre, divisé par $7,9272\,V_0$, a pour dérivée

$$(40)\qquad -5s^4 + 4s^3 - 0,087042,$$

trinôme que l'on reconnaît, à l'inspection de sa propre dérivée $4s^2(3 - 5s)$, croître de $s = 0$ à $s = \frac{3}{5}$, pour décroître ensuite. Comme ce trinôme, pour s ou nul, ou égal à 1, se trouve avoir le signe *moins*, contraire à celui de son maximum correspondant à $s = \frac{3}{5}$, les racines qui l'annulent sont au nombre de deux, entre les limites à considérer $s = 0$, $s = 1$. Négatif au-dessous de la première racine $s = 0,33438$, il est ensuite positif jusqu'à ce que s atteigne la seconde racine, 0,7604, pour redevenir et rester négatif au delà. Donc la composante longitudinale de la vitesse, $V_0 f(s)$, débit, par unité d'aire, des diverses parties de l'orifice, décroît quand on s'éloigne de l'axe (malgré la lente augmentation de la vitesse totale V) à raison de l'inclinaison qu'y présentent les filets fluides; et ce décroissement a lieu jusqu'à la distance

$$\pm\eta = \sqrt{0,33438}\,b = 0,5783b$$

de part et d'autre de l'axe, distance où le débit par unité d'aire atteint son minimum $0,5252\,V_0$. Au delà, il croît, à raison de l'influence prépondérante de l'accroissement des vitesses V, lorsqu'on s'éloigne de l'axe où celles-ci étaient le plus réduites par l'excès de pression dû aux forces centrifuges; et il atteint ainsi son maximum, $0,8003\,V_0$, à la distance $\pm\eta = \sqrt{0,7604}\,b = 0,8720\,b$

de part et d'autre de l'axe. Plus loin de celui-ci, l'influence des inclinaisons, désormais très grandes, des filets, prédomine de nouveau et de plus en plus, jusqu'à annuler enfin le débit par unité d'aire sur les deux bords $\eta = \pm b$, où, cependant, la vitesse totale V atteint son maximum V_0 ([1]).

CALCUL DE LA DIMINUTION QU'ÉPROUVE LA PRESSION MOYENNE, SUR UN PLAN HORIZONTAL FIXE, A L'INTÉRIEUR DU LIQUIDE PESANT REMPLISSANT UN BASSIN ET QUE VIENNENT AGITER DES MOUVEMENTS QUELCONQUES DE HOULE OU DE CLAPOTIS;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Dans un Mémoire qui termine le Volume de 1883 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (3e série, t. IX, p. 425), j'ai évalué la pression moyenne exercée en un point fixe intérieur de l'espace qu'occupe un liquide animé d'un mouvement régulier de houle ou de clapotis; et j'en ai déduit, pour la valeur moyenne de cette pression (évaluée en hauteur du liquide) sur toute partie d'un plan horizontal ayant l'étendue superficielle d'une vague complète, le quotient, par la gravité g, de la moyenne des valeurs que prend, dans cette étendue et pendant toute la durée d'une période d'oscillation, le carré de la composante verticale w des vitesses du fluide. Je me propose ici de montrer que ce théorème est une conséquence immédiate du principe des quantités de mouvement, et qu'il s'appliquerait même, pour une assez grande surface horizontale et un intervalle de temps un peu long, à toute agitation irrégulière d'une telle masse liquide.

A cet effet, considérons l'espace compris, au-dessus du plan horizontal dont il s'agit, à l'intérieur d'une surface cylindrique ou prismatique verticale fixe, que nous construirons : 1° dans le cas d'un *clapotis simple* (ondes synchrones oscillant sur place), de

([1]) En résumé, tant dans le cas de l'orifice rectangulaire allongé que dans celui de l'orifice circulaire, nous avons pu satisfaire assez facilement aux conditions que devait vérifier le mode de répartition du débit, en adoptant pour la fonction entière f la forme $(a + bs^m)(1 - s)$, c'est-à-dire en comprenant un *exposant* au nombre de ses paramètres disponibles.

manière qu'elle contienne une vague complète, sans cesse formée par le même liquide qui, du moins en admettant l'horizontalité du fond, glissera sur cette surface verticale sans la franchir; 2° dans le cas d'une *houle simple* (ondes courantes à mouvements orbitaires, pendulaires suivant chaque axe), de manière qu'elle contienne l'équivalent de toute une vague, ou que, sa largeur étant exactement d'une longueur d'onde, les mêmes mouvements s'y observent, à un instant quelconque et suivant toute direction, sur les deux parties, antérieure et postérieure, de cette surface prismatique, à travers lesquelles passeront des molécules fluides; 3° enfin, dans le cas d'une agitation irrégulière, de manière qu'elle entoure une portion du plan horizontal incomparablement plus grande que sa propre superficie *mouillée*, c'est-à-dire occupée par le liquide, de hauteur sensiblement constante.

Nous pourrons faire, au point de vue des quantités de mouvement, abstraction de la masse fluide qui, pendant un instant dt, traversera la surface cylindrique ou prismatique, comparativement à celle qui traversera son plan horizontal de base : car, dans le premier cas, cette masse sera nulle; dans le second cas, elle se composera d'autant de particules entrant dans le cylindre (ou prisme), que de particules de même étendue en sortant, et avec des vitesses exactement pareilles; enfin, dans le troisième cas, elle sera négligeable, à cause de la faible étendue relative de la surface cylindrique. De plus, à raison de la conservation des volumes fluides, le poids total de liquide occupant l'espace compris dans le cylindre au-dessus du plan horizontal sera le même à toute époque. En effet, il y aura sans cesse, au-dessous de ce plan horizontal fixe, la même fraction du volume fluide que contient le bassin, pourvu, du moins, que le plan soit, comme nous l'admettons, *intérieur*, c'est-à-dire pris assez bas pour rester toujours *entièrement immergé;* et, par suite, le reste du fluide, situé au-dessus du plan, ne sera pas moins constant, même dans le troisième cas, en écartant la supposition de tout échange général et notable de liquide entre régions adjacentes du bassin.

Cela posé, écrivons que la masse fluide située, à l'époque t, dans le cylindre et au-dessus du plan horizontal fixe, possède, suivant le sens vertical (ascendant), une quantité totale de mouvement, dont la variation pendant un instant dt égale le produit de dt

par la somme algébrique des actions extérieures exercées, de bas en haut ou de haut en bas, sur cette masse.

Si nous appelons $\mathfrak{Q}$ la quantité de mouvement vertical existant, à l'époque quelconque t, au-dessus du plan horizontal fixe et à l'intérieur du cylindre, il est évident que la variation de celle qui anime la masse fluide en question se composera de $d\mathfrak{Q}$, plus la quantité emportée par le fluide sorti à travers la surface, et moins la quantité apportée, au contraire, par le fluide étranger introduit. Ce fluide sorti ou entré pouvant être réduit, comme on a vu, à celui qui aura traversé la base inférieure σ de l'espace considéré, chaque élément $d\sigma$ de cette base où la composante w de vitesse est négative aura livré passage à une masse fluide sortie, exprimée (si ρ désigne la densité) par $\rho(-w\,dt)\,d\sigma$, ou, par suite, à une quantité de mouvement, à ajouter, qui vaut

$$\rho(-w\,dt)\,d\sigma . w = -\rho w^2\,dt\,d\sigma;$$

et chaque élément $d\sigma$ où w est positif aura introduit de même une quantité de mouvement étrangère, $\rho w^2\,dt\,d\sigma$, à retrancher. La variation totale à considérer de quantités de mouvement sera donc, en désignant par $\int_\sigma$ une intégrale étendue à toute la base σ du cylindre,

$$d\mathfrak{Q} - \rho\,dt \int_\sigma w^2\,d\sigma.$$

Il faut l'égaler au produit, par dt, de l'excédent des pressions $\int_\sigma p\,d\sigma$, sollicitant de bas en haut cette base, sur le poids total, invariable, du fluide superposé, poids égal à la pression statique, $p_0\sigma$, qui lui fait équilibre quand il n'y a pas d'agitation. Il vient donc, après avoir divisé les deux membres par $\rho g \sigma\,dt$,

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho g \sigma}\frac{d\mathfrak{Q}}{dt} - \frac{1}{g}\int_\sigma w^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_\sigma \frac{p - p_0}{\rho g}\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Multiplions par $\frac{dt}{\tau}$, où τ désignera soit la durée d'une période après laquelle $\mathfrak{Q}$ redevient le même dans l'espace considéré, soit un intervalle de temps assez long pour que le rapport, à τ, de l'accroissement de $\mathfrak{Q}$ durant cet intervalle et par unité de l'aire σ du

bassin, soit négligeable; puis intégrons de $t = 0$ à $t = \tau$. Nous aurons

$$(2) \qquad -\frac{1}{g}\int_0^\tau \frac{dt}{\tau}\int_\sigma w^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_0^\tau \frac{dt}{\tau}\int_\sigma \frac{p-p_0}{\rho g}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

ou bien, évidemment,

$$(3) \qquad \text{valeur moy. de } \frac{p_0 - p}{\rho g} = \frac{\text{valeur moy. de } w^2}{g};$$

ce qu'il fallait démontrer ([1]).

SUR LA DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ DES GAZ LIQUÉFIÉS ET DE LEURS VAPEURS SATURÉES. — ÉLÉMENTS DU POINT CRITIQUE DE L'ACIDE CARBONIQUE;

Par M. E.-H. AMAGAT.

L'une des méthodes employées pour déterminer la densité de vapeur des gaz liquéfiés consiste à estimer dans la tige graduée du tube à pression le volume occupé par le fluide au moment où, par suite d'une variation très lente de pression, on voit soit apparaître la première trace de liquide, soit disparaître la dernière trace de celui qui s'était formé. Les nombreuses observations que j'ai faites m'ont montré qu'il est extrêmement difficile de saisir avec certitude le moment exact de l'apparition ou de la disparition.

Il est encore plus difficile de déduire la densité du gaz liquéfié du volume qu'il occupe au moment où la dernière bulle de vapeur disparaît; il suffit, en effet, d'une trace d'air absolument insignifiante pour retarder de beaucoup ce point de liquéfaction totale

---

([1]) La pression moyenne dans un siphon renversé, *à branches non verticales*, où oscille un liquide pesant, échappe à cette démonstration, par suite de l'existence d'une composante *verticale* des pressions exercées par les parois, au-dessus du plan horizontal fixe, et dont il faudrait connaître la loi précise de variation autour de l'axe courbe du siphon, pour pouvoir les mettre en ligne de compte. Mais le mouvement sur cet axe se calcule aisément dans l'hypothèse bien admissible que la colonne fluide y ait une longueur constante; et il en résulte pour la pression moyenne à chaque niveau, comme on voit dans le Mémoire cité du Volume de 1883 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (p. 427 et 428), une formule analogue à (3), où, seulement, la composante verticale w des vitesses se trouve remplacée par ces vitesses mêmes.

qui correspond toujours à une pression notablement supérieure à la tension maxima.

Pour se mettre complètement à l'abri des retards relatifs aux changements d'état, il importe de n'opérer que sur des corps qui sont à l'état d'équilibre normal, comme cela a lieu, après un temps suffisant, quand le liquide et la vapeur sont l'un et l'autre en quantités suffisantes; la méthode que j'indiquerai plus loin, et dans laquelle cette condition est réalisée, peut conduire à de très bons résultats. Je l'ai appliquée seulement à l'acide carbonique; les circonstances ne m'ayant pas permis de donner à ces recherches le développement que j'avais projeté, je ne crois pas devoir différer plus longtemps la publication de résultats obtenus depuis près de deux ans et que j'ai, du reste, communiqués déjà en partie à un grand nombre de personnes.

Voici comment j'ai opéré : on liquéfie d'abord une partie du gaz de manière que le volume du liquide soit, par exemple, le dixième de celui de la vapeur et, quand l'équilibre est parfaitement établi, on fait la lecture des deux volumes; on pousse alors la liquéfaction de manière à tripler ou quadrupler la quantité du liquide, et l'on mesure de même les nouveaux volumes.

Si ΔV et $\Delta V'$ sont l'augmentation du volume du liquide et la diminution du volume de vapeur quand on passe du premier équilibre au second, on a évidemment, D et D′ étant les densités sous les deux états,

$$\frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{D'}{D}.$$

D'autre part, si V et V′ sont les volumes du liquide et de la vapeur pendant l'un des deux équilibres, on aura évidemment encore

$$VD + V'D' = P,$$

P étant le poids du gaz sur lequel on opère, d'où l'on déduit D et D′.

Laissant de côté divers détails, notamment en ce qui concerne l'obtention des températures constantes, je dirai seulement qu'il a été tenu compte dans l'estimation des volumes de la forme que prennent les ménisques aux différentes températures; on remarquera, du reste, que cette correction n'intéresse point le calcul

du *rapport* des densités; elle s'élimine dans la détermiuation de ΔV et $\Delta V'$.

La difficulté des déterminations croît très rapidement quand on s'approche du point critique; l'instabilité de la matière finit par devenir telle qu'on ne peut plus arriver à obtenir une position fixe du ménisque. J'ai observé dans ces essais diverses apparences qui, je crois, n'ont pas encore été signalées et que j'indiquerai rapidement.

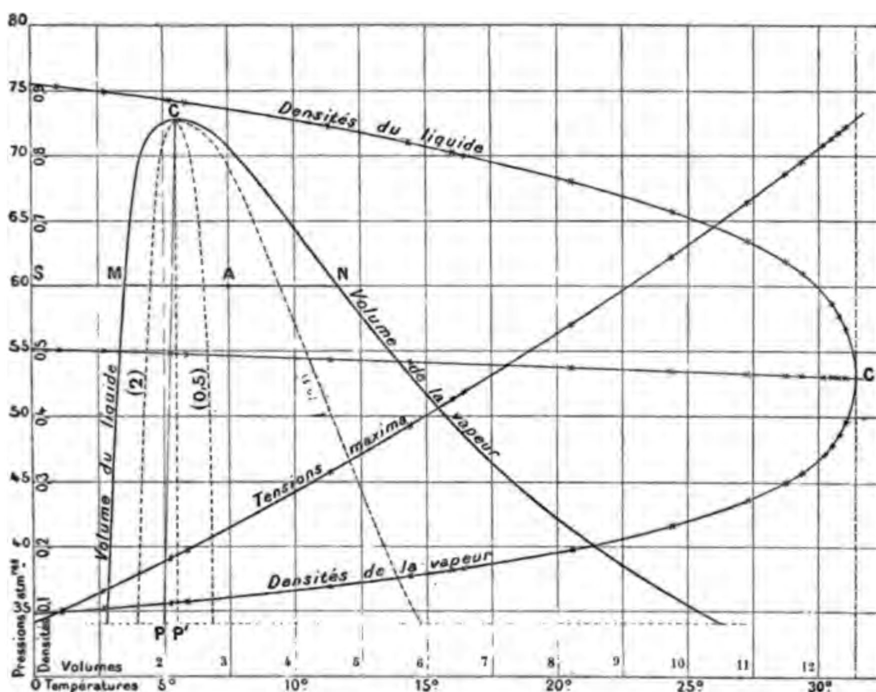
Il peut arriver qu'en comprimant lentement, le ménisque disparaisse à une température notablement inférieure à celle du point critique, à 30°,5 par exemple; tant que le ménisque existe, les génératrices intérieures du tube paraissent brisées à son niveau (le ménisque est, ici, plan) à cause de la différence des indices, de manière à produire l'apparence d'une diminution brusque de diamètre intérieur; au moment où le ménisque s'efface la brisure disparaît et est remplacée par deux courbes raccordant très régulièrement les deux parties de chaque génératrice; la densité paraît alors passer d'une façon continue par toutes les valeurs, depuis D jusqu'à D'.

Cette apparence est très fugitive; une bande horizontale opaque ressemblant à une épaisse émulsion surgit tout à coup vers le milieu de la courbure, puis disparaît; le ménisque reparaît alors ainsi que la brisure des génératrices; à ce moment il arrive parfois qu'une pluie de fines gouttelettes sphériques extrêmement nettes se produise au sein de la vapeur et vienne frapper le ménisque qu'elle agite violemment. Dans certains cas, l'effet produit par ces gouttelettes rappelle tout à fait, sauf le sens, celui des bulles de vapeur au sein du liquide quand l'ébullition n'est point tumultueuse; j'ai vu plusieurs fois les deux phénomènes se produire simultanément : l'effet de ces deux pluies allant à la rencontre l'une de l'autre est assez curieux. J'ai cherché à obtenir des photographies instantanées de ces phénomènes dans un jet de lumière électrique, mais, comme ils sont très fugitifs et qu'il est assez difficile d'en préciser les conditions, j'ai réussi seulement à saisir les courbes de raccordement et la bande opaque qui s'y produit au moment où le ménisque va reparaître.

Ces faits peuvent donner une idée des difficultés que présentent les mesures quand on arrive à quelques dixièmes de degré du

point critique; les expérimentateurs, du reste, se sont en général arrêtés à une distance assez notable de ce point; j'ai pu cependant arriver jusqu'à 31°,00 dans de bonnes conditions de régularité.

Fig. 1.



J'ai d'abord représenté les résultats par une courbe obtenue en portant les températures en abscisses et sur les ordonnées les deux densités correspondantes; cette courbe, ainsi qu'on le voit sur le diagramme ci-contre (*fig.* 1), a, comme celle de MM. Cailletet et Mathias, sensiblement l'aspect général d'une parabole à diamètre légèrement incliné sur l'axe des températures; le lieu du milieu des cordes est rigoureusement rectiligne, le sommet de la courbe est beaucoup plus aplati que celui d'une parabole proprement dite, ce qui correspond, en approchant de la température critique, à un rapprochement extrêmement rapide des valeurs des deux densités; comme les mesures ont été poursuivies jusqu'à quelques dixièmes de degré de cette température, il est facile de voir que les deux

branches de courbe tendent nettement à se raccorder; on peut faire ce raccordement avec beaucoup de précision. On voit sur le même diagramme la courbe des tensions de vapeur avec les mêmes températures en abscisses et les pressions en ordonnées, de sorte que l'intersection de cette courbe par l'ordonnée du point de raccordement donne de suite la pression critique.

On trouve ainsi, pour les éléments du point critique,

$$T = 31,35, \quad H = 72^{atm},9. \quad D = 0.464.$$

J'ai ensuite représenté les mêmes résultats au moyen d'une courbe de liquéfaction analogue à celle résultant du diagramme d'Andrews (pressions en ordonnées et volumes en abscisses); on voit qu'elle est, de même que les deux premières, parfaitement régulière. Considérons l'une des cordes horizontales MN de cette courbe; cette corde appartient à l'une des isothermes : c'est la partie correspondante à la liquéfaction; les abscisses de M et N sont les deux volumes spécifiques, les segments AN et AM sont dans le rapport des poids du liquide et de la vapeur : le rapport du volume de la partie liquéfiée à celle restée gazeuse est par suite $\frac{AN}{AM}\frac{SM}{SN}$; on peut donc déterminer le point A de telle sorte que ce rapport ait une valeur donnée, et, en faisant de même pour un nombre suffisant de cordes (soit de températures), obtenir le lieu de ces points; je suis arrivé à ce résultat extrêmement simple que : le lieu des points pour lesquels les volumes de vapeur et de liquide sont égaux est rigoureusement une ligne droite presque perpendiculaire à l'axe des abscisses; par suite, le volume total varie très peu : il serait rigoureusement constant et égal au volume critique si la droite était tout à fait perpendiculaire.

Les courbes ponctuées portant les indications (2), (0,5), (0,1) sont les lieux correspondants aux rapports représentés par ces nombres; elles aboutissent toutes, bien entendu, au point C représentatif de l'état critique; il est facile de voir que le lieu CP' qui aboutirait à l'abscisse du point C ne différerait pas pratiquement d'une ligne droite normale à l'axe des abscisses; pour le rapport correspondant qui est sensiblement égal à 0,8, le volume total serait donc invariable; si un tube de Natterer était rempli dans ces conditions, son ménisque conserverait donc une position fixe à

toutes les températures : il suffirait pour cela qu'il contienne un poids d'acide carbonique égal à l'unité sous un volume égal au volume spécifique critique.

Il est intéressant de chercher comment les lieux des points, pour lesquels le rapport des volumes du liquide et de la vapeur est constant, dépendent de la courbe des densités et, en particulier, de l'inclinaison de son diamètre.

Soit K le rapport des deux volumes coexistants au point A de la corde MN, on a, d'après ce qui a été dit,

$$(1)\qquad K = \frac{AN}{AM} \times \frac{SM}{SN} = \frac{W' - V}{V - W} \times \frac{W}{W'} = \frac{\left(\frac{1}{D} - V\right)\frac{1}{D}}{\left(V - \frac{1}{D'}\right)\frac{1}{D'}}.$$

W et W' étant les deux volumes spécifiques et V le volume total, ordonnée du point A, on en tire

$$(2)\qquad V = \frac{K+1}{KD + D'}.$$

C'est la relation qui a servi à tracer les lieux qui sont représentés par les courbes ponctuées. D'autre part, les ordonnées du diamètre de la courbe des densités sont les valeurs de $\frac{D + D'}{2}$; par suite, l'équation de ce diamètre est de la forme

$$(3)\qquad \frac{D + D'}{2} = -mt + b,$$

son coefficient angulaire étant négatif.

La relation (2), en tenant compte de (3), peut s'écrire

$$(4)\qquad V = \frac{K+1}{(K-1)D - 2mt + b}.$$

Cette relation, qui convient à tous les lieux ponctués, devient, pour K = 1,

$$(5)\qquad V = \frac{1}{-mt + b}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole, la branche qui nous intéresse est asymptotique à l'axe de t, dans la partie correspondant au phé-

nomène, elle tourne vers cet axe une convexité extrêmement faible; V augmentant, mais peu, avec t, elle diffère assez peu d'une droite verticale, car c'est ce qu'elle devient pour $m = o$ et m est très petit.

Sur le diagramme, ce n'est pas cette courbe qui a été construite, puisqu'on a porté sur les ordonnées non les températures, mais les pressions; même dans ces conditions, la courbe serait encore une hyperbole si les pressions étaient proportionnelles aux températures, ce qui n'a pas lieu, la courbe des tensions maxima n'étant pas une ligne droite.

Il est facile de voir de quelle façon la substitution des pressions aux températures, en ordonnées, va modifier la forme de l'hyperbole. Il résulte, en effet, du sens de la concavité de la courbe des tensions de vapeur, qu'on sera conduit à écrire en chaque point de l'ordonnée une pression correspondant à une température supérieure à celle qui y était primitivement écrite; par suite, la valeur de V se trouvera augmentée (puisque V croît avec t) et d'autant plus qu'on s'écartera davantage des extrémités P et C qui restent fixes; il résultera de là une diminution de la courbure de l'hyperbole qui pourra se trouver complètement détruite : on comprend donc que le lieu puisse devenir une ligne rigoureusement droite, ainsi que je l'ai trouvé.

On pourra même se proposer, partant de là, de déterminer la forme de la fonction $p = \varphi(t)$, en exprimant que le changement de variable qui vient d'être fait transforme l'hyperbole en ligne droite; c'est un point que j'examinerai à part.

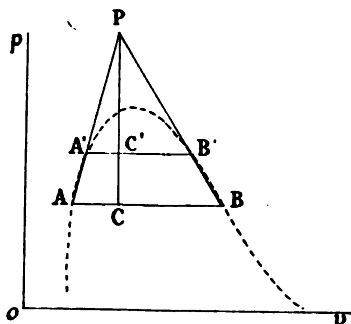
Le lieu CP jouit, par rapport à la courbe de liquéfaction, ou mieux ici des volumes spécifiques, d'une propriété analogue à celle du diamètre de la courbe des densités; dans le cas actuel, en effet, $(k = 1)$ le volume spécifique moyen se confondant avec la moyenne des volumes spécifiques, les abscisses de CP sont les moyennes des deux volumes coexistants, comme les ordonnées du diamètre de la courbe des densités sont les moyennes des deux densités. On remarquera encore que, pour $m = o$, CP deviendrait, qu'on prenne pour ordonnées les températures ou les pressions, une droite perpendiculaire à l'axe des volumes; dans ce cas particulier, d'un corps pour lequel le diamètre de la courbe des densités serait horizontal, cas qui, je crois, ne s'est pas encore pré-

senté, les variations des deux densités avec la température seraient constamment égales, et l'égalité des volumes du liquide et de la vapeur entraînerait l'invariabilité du volume total.

A propos des courbes dont je viens de parler, M. Raveau vient de signaler une assez curieuse propriété des tubes de Natterer, dont il donne la démonstration que voici :

Quand on chauffe un tube de Natterer contenant une quantité suffisante de matière, on voit le niveau du liquide s'élever constamment; c'est un fait bien connu, qui résulte en particulier de l'examen des courbes tracées par M. Amagat. Ces courbes, le long desquelles le rapport des volumes de vapeur et de liquide reste constant, sont toujours concaves vers l'axe des V; par suite, une parallèle à l'axe des P, correspondant au volume constant du tube de Natterer, ne coupe chacune d'elles qu'une fois : le rapport varie constamment dans le même sens. Mais il n'en résulte pas que la quantité de liquide aille constamment en croissant quand on chauffe. En effet, considérons, sur deux isothermes AA et A'B' (*fig.* 2), les points C et C' tels

Fig. 2.



que le rapport de la masse du liquide à la masse de la vapeur ait une même valeur déterminée. La droite CC' va passer par le point P de concours des droites AA' et BB'; supposons en particulier que ce soit la parallèle à l'axe des P menée par le point P (ce qui est le cas de la figure); le rapport des masses et par suite la masse du liquide repassent deux fois par la même valeur en C et C'; dans l'intervalle, la masse de liquide *a donc passé par un minimum :* ainsi, grâce à la valeur élevée de la compressibilité de la vapeur saturée, il arrive qu'*une augmentation de la quantité de cette vapeur peut être accompagnée d'une diminution de volume.*

D'autre part, ainsi que M. Vaschy me l'a fait remarquer : il résulte de la relation (2) que la valeur de V doit passer par un

maximum qui correspond au minimum du dénominateur, c'est-à-dire qui a lieu pour

$$K.dD + dD' = o,$$

soit pour

$$K = -\frac{\frac{dD'}{dt}}{\frac{dD}{dt}},$$

D et D′ ne dépendant que de t; et cette relation paraissant toujours devoir être satisfaite, puisque précisément les deux dérivées sont de signes contraires, on se trouverait en présence d'un résultat en contradiction avec la forme des courbes ponctuées tracées qui ne paraissent point susceptibles d'avoir une tangente verticale.

Il est facile de lever cette difficulté : Pour que le maximum puisse avoir lieu, il faut que le rapport des dérivées puisse devenir égal à K; si le diamètre de la courbe de densités était horizontal, le rapport en question, qui est celui des tangentes aux deux extrémités d'une même corde, serait toujours égal à l'unité; en réalité, à cause de la faible inclinaison du diamètre, il diffère toujours très peu de cette valeur : par suite, il ne pourra y avoir de maximum de V que pour des lieux extrêmement voisins de PC; on peut même voir facilement que ces lieux sont tous placés à droite de cette ligne, car il résulte du sens de l'inclinaison du diamètre qu'on a évidemment

$$\frac{dD'}{dt} < \frac{dD}{dt}, \qquad \text{et par suite} \qquad K < 1.$$

Ces courbes, que je n'ai pas construites, sont vraisemblablement toutes placées entre CP et CP″, car, pour cette dernière ligne, on a déjà K = 0,8. Pratiquement, ce sont donc des lignes très sensiblement droites.

Toutefois, il est intéressant de voir si l'existence de ces lignes ne met pas en défaut la démonstration de M. Raveau, quant à ce qui est de la propriété indiquée par la seconde phrase soulignée (la première étant indépendante de ce fait), laquelle suppose que les courbes ponctuées ne présentent point de maximum de V.

J'ai tracé le lieu des points P (figure ci-dessus), d'où les perpendiculaires sont abaissées; on voit alors facilement que chaque

perpendiculaire ne rencontre, entre les cordes qui lui correspondent, que des courbes non susceptibles de maximum, par suite la démonstration de M. Raveau conserve sa valeur; elle ne s'applique, du reste, qu'au cas où le volume constant (pour un poids égal à l'unité) est inférieur au volume critique, car le lieu des points P, d'où sont abaissées les perpendiculaires, est tout entier à gauche du point auquel aboutissent les lieux ponctués (point critique).

Voici maintenant le Tableau résumant mes résultats; il donne à toutes les températures depuis zéro les deux densités et la tension maxima.

	Densité				Densité		
T.	du liquide.	de la vapeur.	Tension maxima.	T.	du liquide.	de la vapeur.	Tension maxima.
°			atm	°			atm
0.....	0,914	0,096	34,3	18.....	0,786	0,176	53,8
1.....	0,910	0,099	35,2	19.....	0,776	0,183	55,0
2.....	0,906	0,103	36,1	20.....	0,766	0,190	56,3
3.....	0,900	0,106	37,0	21.....	0,755	0,199	57,6
4.....	0,894	0,110	38,0	22.....	0,743	0,208	59,0
5.....	0,888	0,114	39,0	23.....	0,731	0,217	60,4
6.....	0,882	0,117	40,0	24.....	0,717	0,228	61,8
7.....	0,876	0,121	41,0	25.....	0,703	0,240	63,3
8.....	0,869	0,125	42,0	26.....	0,688	0,252	64,7
9.....	0,863	0,129	43,1	27.....	0,671	0,266	66,2
10.....	0,856	0,133	44,2	28.....	0,653	0,282	67,7
11.....	0,848	0,137	45,3	29.....	0,630	0,303	69,2
12.....	0,841	0,142	46,4	30.....	0,598	0,334	70,7
13.....	0,831	0,147	47,5	30,50..	0,574	0,356	71,5
14.....	0,822	0,152	48,7	31,0...	0,536	0,392	72,3
15.....	0,814	0,158	50,0	31,25..	0,497	0,422	72,8
16.....	0,804	0,164	51,2	31,35..	0,464	0,464	72,9
17.....	0,796	0,170	52,4				

La température et la pression critique données plus haut sont un peu plus faibles que celles qu'avait déduites M. Sarrau de mes expériences de 1880, mais il faut remarquer que, dans ces expériences, l'unité de volume n'avait pas été spécifiée, ce qui, nécessairement, a dû entraîner un peu d'incertitude dans les calculs; d'autre part, dans les expériences actuelles, le gaz était beaucoup plus pur : essayé à la potasse dans le tube même où il avait été étudié, il n'a laissé qu'un résidu inférieur à $\frac{1}{1000}$, ce qui n'a pu que diminuer la valeur des constantes en question.

Dans son travail sur les fondements de la théorie cinétique des gaz (*Transact. Royal Soc. of Edinburg,* avril 1891), dont les vérifications numériques ont été faites avec les données du réseau que j'ai publié en 1891, M. Tait a calculé les constantes du point critique au moyen de relations spécialement établies en vue de ces déterminations; il fixe la pression critique à 73^{atm}, la température critique un peu au-dessus de 31°, et il donne, pour limites des volumes critiques, deux nombres dont la moyenne conduit à une densité extrêmement peu différente du nombre auquel je viens d'arriver (j'ai donné, dans ma première Note : $P = 72^{atm},9$, $T = 31^{\circ},3$, $D = 0,464$); ces résultats du présent travail présentent donc, avec ceux qui se déduisent de mon dernier réseau d'isothermes, une concordance aussi parfaite qu'on peut le désirer.

SUR LE RAYONNEMENT DES CORPS INCANDESCENTS;

PAR M. J. VIOLLE.

Lorsque la température d'un corps solide s'élève progressivement, la quantité d'énergie rayonnée par le corps augmente, et en même temps la nature du flux se modifie, des radiations à plus courte période s'ajoutant à celles qui existent déjà.

Suivant Draper, tous les corps (non fluorescents) deviennent lumineux à une température voisine de 500°. Des expériences récentes de M. Weber lui ont montré que la température initiale d'émission lumineuse est notablement plus basse et varie d'un corps à l'autre, étant de 417° pour l'or, de 390° pour le platine, de 377° pour le fer. J'avais moi-même observé autrefois qu'une plaque de tôle devient lumineuse très peu au-dessus du point de fusion du plomb, soit vers 350°. Ces déterminations sont évidemment influencées par la sensibilité de l'œil, qui varie d'un observateur à l'autre, et qui, chez une même personne, présente un maximum pour une certaine radiation (voisine du jaune), la perception de la lumière devançant d'ailleurs la distinction de la couleur. Quant aux divergences constatées d'un corps à l'autre, elles peuvent s'expliquer par les différences de pouvoir émissif.

A partir du moment où le corps devient lumineux, la température croissant, la lumière émise augmente d'intensité et varie de teinte, du rouge sombre au blanc vif tournant au bleu. Le phénomène est donc très complexe.

J'ai cherché, il y a déjà longtemps ([1]), à déterminer la loi suivant laquelle varie l'intensité d'une radiation simple avec la température, en mesurant, à l'aide d'un spectrophotomètre, pour diverses longueurs d'onde, l'intensité de la radiation émise à différentes températures par un bloc de platine incandescent, placé dans un champ calorifique constant et rayonnant librement vers le photomètre.

M. Le Chatelier ([2]) a fait récemment, aux mêmes températures, des expériences analogues dans des conditions différentes : le corps en expérience, chauffé directement dans la flamme d'un chalumeau, envoie à travers cette flamme ses rayons sur un photomètre muni de verres spéciaux, monochromatiques. Le Tableau suivant, où l'intensité de la radiation à 1000° est, dans tous les cas, prise pour unité,

	Violle.		Le Chatelier.	
	$\lambda = 656$.	$\lambda = 589,2$.	Verre rouge.	
	Platine.		Oxyde magnétique.	Platine.
775°.........	0,045 ([3])	0,027	0,037	0,040
954.........	0,55	0,53	0,54	0,55
1045.........	1,80	1,93	1,65	1,68
1500.........	85	116	86	98
1775.........	280	430	385	450

montre que nous sommes d'accord jusqu'à 1500°, mais qu'à 1775° la discordance est complète.

M. Le Chatelier attribue cette discordance à un défaut d'équilibre qui existerait dans le four où je fondais le platine, « la voûte

([1]) VIOLLE, *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 171; 1879, et t. XCII, p. 866 et 1204; 1881.

([2]) LE CHATELIER, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, p. 214, 340, 470 et 737; 1892.

([3]) Nombre calculé par la formule que j'ai donnée pour représenter l'intensité d'une radiation entre 775° et 1775°, l'observation directe étant ici très incertaine, par suite du manque d'intensité.

du four étant certainement plus froide que le métal frappé directement par le jet du chalumeau oxhydrique ». J'ai toujours, au contraire, observé, après plusieurs fusions successives, un échauffement de la voûte tel qu'il faut en éloigner l'extrémité du chalumeau de plusieurs centimètres, si l'on ne veut pas la voir fondre immédiatement. Dans ces conditions, la solidification du platine fondu devient très lente et une nouvelle fusion s'opère en quelques instants avec une dépense de gaz insignifiante. Tout annonce un équilibre de température presque complet. Pour le palladium, qui fond à 1500°, j'ai opéré à dessein de deux façons différentes, le métal étant placé dans un creuset entouré de palladium fondu au milieu d'un très gros four Perrot, ou bien étant chauffé directement dans un four en chaux, comme le platine à 1775° : les résultats ont été identiques, preuve certaine qu'avec des précautions convenables le four en chaux peut constituer une enceinte irréprochable.

Par contre, n'est-il pas à craindre que la flamme qui entoure le corps rayonnant dans les expériences de M. Le Chatelier, et que ce savant regarde comme parfaitement transparente, n'apporte quelque perturbation au phénomène, ainsi que cela semble résulter des expériences relatives au platine mat?

D'autre part, malgré tout le soin donné au choix des verres, a-t-on vraiment opéré une radiation simple? J'ai moi-même employé au début de mes recherches le procédé si commode du verre rouge; mais j'ai dû y renoncer parce qu'un tel verre devient de moins en moins monochromatique à mesure que la température du corps rayonnant s'élève. Le nombre (323) que j'avais alors obtenu à 1775° se rapproche de celui (385) qu'a trouvé depuis M. Le Chatelier et diffère peu de celui (345) que l'on déduit des mesures antérieures d'Edmond Becquerel (¹), si on les ramène aux températures que j'ai données pour les points de fusion des métaux réfractaires.

Il ne me semble donc pas que les expériences de M. Le Chatelier contredisent la conclusion que j'avais tirée de mes mesures, à savoir que l'intensité d'une radiation simple ne croît pas indéfi-

(¹) Henri Becquerel, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, p. 390; 1892.

niment avec la température, mais qu'elle tend vers un maximum déterminé.

A l'appui de cette manière de voir, je citerai les résultats suivants d'expériences déjà anciennes dans lesquelles j'ai étudié avec une pile thermo-électrique le rayonnement émis par un fil de platine incandescent et transmis par un prisme et une lentille de sel gemme, la pile étant placée dans l'infrarouge à une distance du rouge extrême sensiblement égale à la largeur du spectre visible.

1000	1
1200	1,85
1400	2,47
1600	2,91

Ces nombres montrent que *l'intensité de la radiation ne croît plus très vite au delà d'une certaine limite.*

Si elles touchent à une question théorique du plus vif intérêt, les difficultés signalées plus haut n'ont guère d'importance au point de vue de la pyrométrie optique. Un photomètre gradué avec un verre rouge déterminé conviendra parfaitement, pourvu que les conditions d'observation soient les mêmes dans tous les cas ; et les meilleures conditions seront évidemment, ainsi que je l'ai déjà dit, la visée directe d'un corps en équilibre thermique avec l'enceinte dont on veut déterminer la température, ce corps étant autant que possible identique à celui qui a servi à la graduation de l'appareil.

APPAREIL DÉMONTRANT LE MÉCANISME DES ONDES STATIONNAIRES;

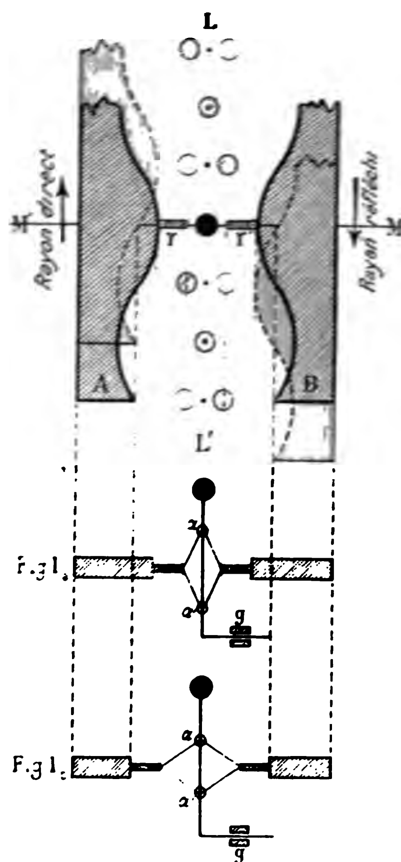
PAR M. IZARN.

Les belles expériences de M. Otto Wiener, et surtout la photographie colorée du spectre par M. Lippmann ont appelé l'attention des personnes les moins familières avec l'Optique physique sur le phénomène des ondes stationnaires. C'est pour ces personnes-là, en particulier, qu'il m'a paru utile de combiner un système qui en rende le mécanisme tangible, et je suis persuadé qu'il pourra même rendre service aux professeurs chargés d'enseigner cette question, soit en Optique, soit en Acoustique.

Voici le schéma du dispositif que j'ai employé :

Deux règles A et B, à profil sinusoïdal, peuvent se déplacer dans le sens de leur longueur, et le mouvement de l'une A en avant (rayon direct) entraîne celui de l'autre en arrière (rayon réfléchi). Contre les profils de ces règles s'appuient constamment au moyen de ressorts (non figurés), des couples équidistants, et aussi nombreux que l'on voudra, de petites baguettes à roulettes r, r', dont un seul est représenté (*fig.* 1).

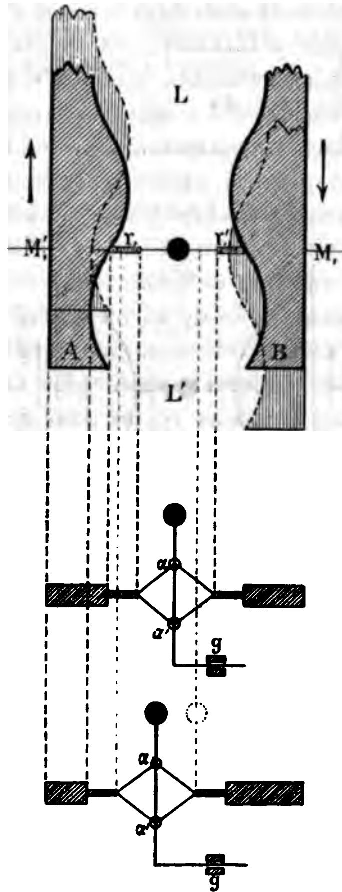
Fig. 1.



La *fig.* I_a, qui est une coupe passant par la ligne MM', montre que les extrémités intérieures des deux baguettes d'un même

couple portent deux sommets opposés d'un parallélogramme articulé, dont les deux autres sommets munis d'anneaux α, α' laissent passer une tige armée d'une boule et qui, se recourbant en dessous, peut glisser dans une gaine *g*.

Fig. 2.



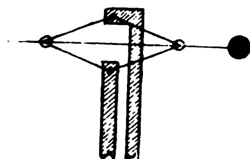
La *fig.* I_b représente ce même système lorsque les règles occupent les positions relatives qu'indique le pointillé, et elle rend très visible, sans entrer dans de plus longs détails, que, quelles que soient ces positions relatives, la boule B reste immobile, le mouvement n'ayant pour effet que de déformer le parallélogramme.

La *fig.* 2 est relative à ce qui se produit pour un couple situé à une distance du précédent égale à $\frac{1}{4}$ de longueur d'onde. Ici, il est tout aussi visible que le mouvement, au lieu de déterminer une déformation du parallélogramme correspondant, se borne à le transporter latéralement (à droite ou à gauche alternativement), la tige de la boule glissant alors dans la gaine *g*.

Ces explications sont suffisantes pour établir que, par le fait de la combinaison des mouvements inverses des deux règles, les boules seront alternativement toujours en repos ou toujours en oscillation. En déplaçant originairement l'une des règles par rapport à l'autre d'une quantité quelconque, on observe l'effet produit par un changement dans la phase dû au phénomène de la réflexion. Si l'on arme en outre chacune des baguettes elle-même d'une petite boule, on verra en même temps le mouvement vibratoire du rayon incident, celui du rayon réfléchi, et le phénomène des condensations et des dilatations aux ventres et aux nœuds sera frappant. Pour rendre l'appareil plus compact, il a paru préférable de mettre les deux règles dans des plans parallèles (comme si la feuille de papier était ici pliée suivant la ligne médiane LL'), mais alors, l'une des baguettes étant droite, il faut que l'autre se termine en forme de potence, afin de rendre possible l'ajustement du parallélogramme articulé, comme le montre la *fig.* 3.

L'appareil définitif a été réalisé par M. Otto Lund, avec un talent et un soin sur lesquels je ne saurais trop insister et dont je me plais à le remercier ici bien vivement. L'habile constructeur,

Fig. 3.



pour rendre l'instrument plus commode à manier, a jugé convenable de substituer aux deux règles, dont la longueur et, par suite, le déplacement seraient par conséquent très limités, un système de deux bandes flexibles d'acier, ajourées, dont l'une est représentée *fig.* 4, et dont l'autre serait parallèle à celle-ci et en ar-

rière du plan de la figure. Chacune de ces bandes sans fin s'enroule sur deux cylindres C et D, dont l'un C armé de chevilles qui entrent dans de petits trous de la bande et rendent tout glissement impossible. Ce cylindre C est mis en rotation au moyen d'une manivelle et d'un engrenage conique, et la même manivelle

Fig. 4.



entraîne le cylindre correspondant C' de la seconde bande. D'ailleurs, pour un simple déplacement initial de cette manivelle, il est possible de donner aux deux profils sinusoïdaux un déplacement relatif, correspondant à une différence de phase de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ longueur d'onde, et, par conséquent, de transformer instantanément, par exemple, les ventres en nœuds et réciproquement.

O. KRIGOR-MENZEL et Q. RAPS. — Ueber saiten Schwingungen (Vibrations des cordes); *Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 623; 1891.

Les auteurs ont étudié le mouvement des ondes en photographiant sur un cylindre enregistreur recouvert de papier sensible le déplacement d'un point de la corde se détachant en noir sur un fond lumineux.

Pour cela, ils projettent dans le plan de vibration de la corde l'image d'une fente fortement éclairée par une lampe électrique, puis ils forment avec une seconde lentille l'image de la fente et de la corde sur le papier sensible. Les cordes ont environ $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre et 50^{cm} à 80^{cm} de longueur; elles donnent une courbe bien nette, blanche sur fond noir.

Ces courbes montrent d'abord que les vibrations ne sont complètement périodiques que si les extrémités sont absolument fixes; elles sont identiques pour deux points symétriques par rapport au milieu.

Nous ne pouvons que renvoyer au Mémoire original pour les détails des nombreuses courbes obtenues en faisant varier la posi-

tion du point d'attaque et du point observé. Mais il faut signaler le cas simple, étudié en détail, du point vibrant symétrique de la position de l'archet qui donne, d'après la remarque précédente, le mouvement du point attaqué directement à une distance x de l'extrémité. Dans ce cas seulement les courbes se réduisent à des zigzags formés de deux lignes droites dont l'une descend plus vite que l'autre ne monte; le rapport des longueurs des projections de ces droites donne le rapport du temps des deux périodes. Ce rapport n'est égal à $\frac{x}{\rho}$ que si $x = \frac{l}{6}, \frac{l}{5}, \frac{l}{4}$ ou $x < \frac{l}{7}$; dans ces conditions tous les points de la corde vibrent comme le point examiné.

Tous les résultats confirment la théorie d'Helmholtz et ses idées sur l'action exercée par l'archet sur les cordes.

C. DAGUENET.

PHILOSOPHICAL MAGAZINE.

T. XXXIII; 1892.

LORD RAYLEIGH. — Réflexion sur les surfaces liquides dans le voisinage de l'angle de polarisation, p. 1 à 19.

On sait que, d'après Jamin (1), la réflexion de la lumière sur la surface des substances transparentes n'est pas tout à fait conforme à la théorie de Fresnel : un faisceau polarisé perpendiculairement au plan d'incidence donne, par réflexion sous l'incidence brewstérienne, un faisceau dont l'intensité, bien que très petite, n'est pas rigoureusement nulle, et un faisceau polarisé dans tout autre plan donne un faisceau réfléchi présentant une polarisation légèrement elliptique. En 1889, M. Drude (2) a montré l'influence considérable qu'exercent sur les phénomènes observés les modifications de la couche superficielle de la substance réfléchissante; en particulier, il a reconnu que la réflexion sur une face de clivage d'un cristal de sel gemme suit les lois de

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXIX, p. 263, et t. XXXI, p. 165.

(2) *Wied. Ann.*, t. XXXVI, p. 865; t. XXXIX, p. 481. *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 537.

Fresnel quand le clivage est récent et que la polarisation elliptique du rayon réfléchi n'est manifeste qu'après un certain temps. Lord Rayleigh vient de montrer que ces phénomènes, d'une importance capitale pour la théorie de la réflexion, se produisent également avec les surfaces des liquides transparents, et que les résultats obtenus par Jamin sont dus, du moins en grande partie, à la couche de matière grasse qui recouvre généralement les liquides.

L'influence de cette couche est facile à mettre en évidence. Un faisceau de lumière solaire tombant sur la surface du liquide sous l'incidence brewstérienne est reçu, après réflexion, sur un nicol. Quand la surface est parfaitement claire (ce qu'on obtient en écartant les impuretés à l'aide d'un cercle métallique expansible dont le diamètre décroît rapidement de 25^{cm} à $2^{cm},5$), on voit sur l'image du Soleil une bande noire très nettement limitée; cette bande devient de plus en plus confuse lorsqu'une matière grasse se répand sur la surface.

La tension superficielle ne paraît avoir aucune influence, car les phénomènes sont les mêmes avec des liquides possédant des tensions superficielles très différentes : eau, alcool, acide sulfurique, benzine, solution saturée de camphre, oléate de soude.

La théorie de Fresnel semble applicable à la réflexion sur une surface parfaitement claire, car elle a permis de rendre compte de tous les détails des phénomènes observés avec l'eau pure; de plus, le calcul montre que, en adoptant les résultats des expériences de Jamin sur ce liquide, l'image du Soleil ne serait pas traversée par une bande noire.

Dans une seconde série d'expériences, effectuées avec un appareil d'une grande sensibilité, l'auteur a pu mesurer le rapport k des amplitudes des vibrations réfléchies dans le plan d'incidence et dans la direction perpendiculaire lorsque le rayon incident, polarisé à 45°, tombe sous l'incidence brewstérienne. Il a obtenu, pour l'eau, $k = + 0,00018$, et pour l'alcool $k = + 0,001$; Jamin avait trouvé pour ces liquides $- 0,00577$ et $+ 0,00208$. D'ailleurs, ce rapport dépend de l'état de la surface; ainsi l'eau donne $k = - 0,0026$ et $k = - 0,0043$ lorsque sa surface est recouverte d'une couche d'huile d'olive ou d'huile de casse d'une épaisseur de quelques millionièmes de millimètre.

A cause de la petitesse de k et de son changement de signe avec l'état de la surface, Lord Rayleigh pense qu'il n'est pas impossible que k soit rigoureusement nul, comme le veut la théorie de Fresnel, si la réflexion s'effectuait sur une substance parfaitement pure en contact avec sa propre vapeur.

EDWARD-L. NICHOLS et BENJAMIN-W. SNOW. — Sur le caractère de la lumière émise par l'oxyde de zinc incandescent, p. 19-28.

Les intensités de neuf régions du spectre de la lumière émise par l'oxyde de zinc sont comparées aux mêmes rayons du spectre du platine, pour diverses températures comprises entre 650° C. et 1000° C. Dans ce but, une feuille de platine, couverte ou non d'oxyde de zinc, est échauffée par le passage d'un courant; la température de cette feuille est déduite de son allongement; une lampe électrique alimentée par un courant constant sert de source de comparaison.

L'intensité d'une radiation croît avec la température beaucoup plus rapidement pour l'oxyde de zinc que pour le platine; le coefficient d'accroissement est d'autant plus grand que la longueur d'onde de la radiation considérée est plus petite. Jusqu'à 700° environ, l'intensité de chaque radiation est plus petite pour l'oxyde de zinc que pour le platine; vers 1000° et au-dessus, c'est l'inverse; pour les températures intermédiaires, l'intensité des radiations voisines du rouge est plus faible pour l'oxyde de zinc que pour le platine, celle des radiations voisines du violet est plus grande pour l'oxyde.

La courbe représentant l'intensité d'une radiation en fonction de la température est à courbure régulière pour le platine; pour l'oxyde de zinc, elle se redresse brusquement à partir de 880° environ.

A une même température, l'intensité d'une radiation quelconque émise par l'oxyde de zinc diminue avec le temps et n'atteint une valeur constante que dix minutes après l'instant où l'oxyde a été porté à la température à laquelle on observe (c'est cette intensité constante qui est considérée dans les résultats énoncés précédemment). Cette diminution est d'autant plus grande que la longueur d'onde de la radiation est plus petite; elle est particulièrement sensible aux températures voisines de 900°.

Par suite des particularités observées vers 880°, les auteurs croient que les radiations émises par l'oxyde de zinc doivent être attribuées, en partie à l'incandescence due à la température, et en partie à ce que cet oxyde devient lumineux par lui-même au-dessus de 880°; en d'autres termes, l'oxyde de zinc jouirait, comme beaucoup d'autres corps, de la propriété de devenir phosphorescent lorsqu'on le chauffe, mais cette propriété ne se manifesterait qu'à partir de 880°.

ANDREW GRAY. — Sur le calcul des coefficients d'induction des bobines et sur la construction des étalons d'inductance et des électrodynamomètres absolus, p. 62-70.

Maxwell a montré que le coefficient d'induction mutuelle de deux courants circulaires, dont les axes se coupent, peut s'exprimer à l'aide d'une série en fonction des harmoniques zonaux de l'angle θ des axes. M. Gray applique la formule de Maxwell ([1]) au calcul du coefficient d'induction mutuelle de deux bobines formées d'une seule couche de fil, ayant respectivement n et n' tours par unité de longueur, et obtient

$$M = \pi^2 nn' a^2 \alpha^2 [K_1 k_1 P_1(\theta) + K_2 k_2 P_2(\theta) + \ldots],$$

a et α étant les rayons des bobines; $P_i(\theta)$ l'harmonique zonal de $i^{\text{ième}}$ ordre de l'angle θ; $K_1, K_2, \ldots$ des fonctions de a et des quantités qui définissent la position de l'une des bobines par rapport au point de rencontre des axes; $k_1, k_2, \ldots$ des fonctions correspondantes pour la seconde bobine.

La forme des fonctions K et k est telle que, quand le milieu d'une des bobines est sur l'axe de l'autre, les fonctions d'indices pairs se rapportant à la première sont nulles. En outre, quand les milieux des deux bobines coïncident, les coefficients k_3 et K_3 sont nuls si les longueurs des bobines sont respectivement égales aux produits de leurs rayons par $\sqrt{3}$. Il ne reste plus alors, dans l'expression de M, que l'harmonique zonal de premier ordre et les harmoniques impairs à partir du septième. D'ailleurs, on peut supprimer ces derniers sans erreur sensible, car le coefficient du

([1]) *Traité d'Électricité*, t. II, § 697.

septième n'est que la 4500e partie de celui de $P_1(\theta)$ quand $\frac{x}{a}$ est compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, et moindre que la 26000e partie quand $\frac{x}{a}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$. On a simplement

$$(1) \qquad M = 2\pi^2 nn'\alpha^2 \frac{l\lambda}{r} P_1(\theta),$$

l et λ étant les longueurs des bobines et r la distance de leur centre commun à un point du premier ou du dernier circuit de la bobine de rayon a. Dans le cas où les axes des bobines ont même direction, $P_1(\theta)$ se réduit à 1.

Par suite de la simplicité et de la grande approximation de la formule (1), il est avantageux de prendre des bobines à une seule couche et remplissant les conditions précédentes dans la construction des étalons d'inductance, des électrodynamomètres absolus et, en général, toutes les fois que l'on aura besoin de calculer le coefficient d'induction mutuelle des bobines. On peut d'ailleurs employer des bobines à plusieurs couches de fil; mais, pour que la condition $l = a\sqrt{3}$ soit satisfaite par chaque couche, il faut que les couches externes aient une plus grande longueur que les couches internes, ce qui rend difficile la construction de ces bobines.

R.-A. LEHFELDT. — Mesure galvanométrique de la composante horizontale du magnétisme terrestre, p. 78-82.

Soient G la constante galvanométrique d'une boussole des sinus dont l'aiguille, perpendiculaire aux plans des spires du cadre, est suspendue sans torsion dans le plan du méridien magnétique; δ l'angle dont il faut faire tourner le cadre pour que sa position par rapport à l'aiguille reste la même quand un courant d'intensité γ traverse l'appareil; H la composante horizontale du magnétisme terrestre; on a

$$G\gamma = H \sin\delta.$$

Cette relation est généralement utilisée pour déterminer γ, H étant connu. L'auteur propose de faire l'inverse, l'intensité

étant mesurée en valeur absolue. Dans ce but, un courant fourni par une source constante traverse le galvanomètre et une série de résistances étalonnées; la force électromotrice e entre deux points du circuit, séparés par une résistance variable R, est opposée à celle d'un Latimer-Clark; la relation $R\gamma = e$ permet alors de calculer γ.

Mais, en général, la direction primitive de l'aiguille n'est pas celle du méridien magnétique, et le fil qui la soutient n'est pas sans torsion. Soient φ cette torsion, θ l'angle de l'aiguille avec le méridien magnétique; τ le rapport du moment du couple de torsion au moment magnétique de l'aiguille; au lieu de l'égalité précédente, on a la suivante

$$G\gamma + \tau\varphi - H\sin(\delta + \theta) = 0.$$

En renversant le sens du courant et en faisant varier son intensité, de telle sorte que la nouvelle position du cadre soit perpendiculaire à celle qu'il avait dans la première expérience, on a

$$-G\gamma_1 + \tau\varphi + H\sin(90^\circ - \delta + \theta) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$H^2 = G^2(\gamma^2 + \gamma_1^2) + 2\tau^2\varphi^2 + 2\tau\varphi G(\gamma - \gamma_1).$$

D'ailleurs, il est possible, par quelques tâtonnements préliminaires, de rendre la torsion très petite; les angles δ et $90^\circ - \delta$ sont alors voisins de 45° et la différence $\gamma - \gamma_1$ très petite; par suite, on peut ne conserver que le premier terme du second membre de la relation ci-dessus. Le calcul de H est alors très simple.

Une série de mesures effectuée par l'auteur, pour différentes valeurs de φ, a donné des résultats très concordants qui prouvent la grande précision de la méthode. J. Blondin.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annales de Chimie et de Physique.

6e série, tome XXVI; juillet 1892.

SAVÉLIEF. — *Observations actinométriques faites à Kief en 1890*, p. 289.

A. BATTELLI. — *Sur les propriétés thermiques des vapeurs*, p. 394.

ANTOINE. — *Chaleur totale des vapeurs*, p. 426.

Wiedemann's Annalen.

T. XLVI; n° 6, 1892.

L. SCHUEZ. — *Sur la chaleur spécifique d'alliages facilement fusibles et d'amalgames*, p. 177.

O. LUMMER et F. KURLBAUM. — *Recherches bolométriques*, p. 204.

H. KAYSER et C. RUNGE. — *Sur les spectres du cuivre, de l'argent et de l'or*, p. 225.

H.-A. LORENTZ. — *Sur la réfraction de la lumière par des prismes de métal*, p. 244.

G. MUELLER. — *Influence de la température sur la réfraction de la lumière par les substances transparentes*, p. 260.

A. OBERBECK. — *Propriétés de l'argent allotropique par rapport au courant électrique*, p. 265.

J. ELSTER et H. GEITEL. — *Recherches optico-électriques*, p. 281.

TH. DES COUDRES. — *Force électromotrice entre des électrodes de mercure de courbure différente dans la dissolution d'un sel de mercure*, p. 292.

MILTHALER. — *Emploi de la manganine pour des bobines de résistance*, p. 297.

A. TOEPLER. — *Contribution à la connaissance des oscillations électriques de très courte période*, p. 306.

J. KLEMENCIC. — *Évaluation du coefficient de self-induction d'une bobine*, p. 315.

F. v. LEPEL. — *Oxydation de l'azote par des étincelles électriques*, p. 319.

A. WINKELMANN. — *Sur les remarques de M. Graetz « Sur la conductibilité calorifique des gaz »*, p. 323.

EB. GIESELER. — *Turbine et balance de torsion pour expériences de cours*, p. 333.

H. PASSAVANT. — *Sur une reproduction de l'unité mercurielle de Siemens*, p. 336.

THÉORIE DE LA VISIBILITÉ ET DE L'ORIENTATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCE (1);

PAR M. CH. FABRY.

Un appareil interférentiel peut être défini : un appareil qui dédouble une onde incidente en deux ondes capables d'interférer.

Si l'onde incidente est unique, il y aura seulement deux ondes émergentes. Leur différence de marche varie d'un point à un autre de l'espace. On aura des franges parfaitement nettes en tout point de la partie commune aux deux ondes émergentes. Ce résultat ne souffre aucune exception, pourvu que la définition que nous avons posée soit applicable. C'est ainsi que les franges des lames minces isotropes (anneaux de Newton) que l'on est habitué à voir localisées et comme peintes dans la lame mince peuvent être observées à une distance quelconque de l'appareil, même avec une lunette visant à l'infini, si l'appareil est éclairé par un simple *point lumineux*.

Les choses se passent autrement si la source lumineuse n'est pas un point. Chaque point lumineux donne alors sur l'écran un système de franges. Il faut, pour que l'on aperçoive des franges nettes, que tous ces systèmes de franges *indépendants* coïncident.

C'est en partant de ce principe que M. Macé de Lépinay et moi nous avons établi les conditions générales de visibilité des franges (2). Nous avons montré qu'il est en général nécessaire d'employer comme source lumineuse une fente étroite; les franges sont localisées dans un plan qui dépend de l'orientation de cette fente. Dans certains cas particuliers, la localisation disparaît pour une orientation convenable. Il est toujours possible de trouver un plan sur lequel viennent se peindre des franges nettes, même lorsque la source lumineuse est étendue dans tous les sens.

La première Partie de ce travail sera consacrée à quelques re-

(1) Ce travail est le résumé d'un Mémoire plus étendu publié récemment dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille*.

(2) *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 5; 1891.

cherches nouvelles sur la théorie de la visibilité parfaite des franges.

Dans la deuxième, je montrerai comment la théorie de la visibilité des franges conduit à celle de leur orientation.

La troisième Partie sera consacrée à l'étude des franges en dehors des conditions de netteté parfaite, et principalement des phénomènes de visibilité périodique qui se produisent dans ce cas.

I. — Études sur la localisation des franges d'interférence.

1° *Lames minces prismatiques.* — Ces franges sont celles qui se prêtent le mieux à la vérification complète de la théorie, car les faisceaux interférents se superposent toujours. Leur étude a été faite par M. Macé de Lépinay (¹). Mais dans les vérifications expérimentales l'auteur a placé la fente sur l'objectif de la lunette d'observation. Des phénomènes de diffraction ne permettaient d'observer les franges que lorsqu'elles étaient à peu près perpendiculaires à la direction de la fente; plusieurs cas intéressants sont ainsi laissés de côté. Il m'a paru utile de faire quelques nouvelles mesures en plaçant la fente entre la source lumineuse et l'appareil interférentiel.

L'appareil d'observation se composait d'un objectif et d'un oculaire placés sur deux supports d'un banc d'optique.

La lunette ainsi formée peut viser à toute distance et l'on peut, de la position de l'objectif et de celle de l'oculaire, déduire la position du plan visé. L'appareil a été réglé d'abord de telle sorte que son axe optique reste fixe dans l'espace.

La lame mince est une lame d'air comprise entre deux lames planes de verre. On l'éclaire au moyen d'une flamme contenant du chlorure de sodium, limitée par une fente étroite. Un cercle divisé donne l'orientation de cette fente.

Il existe deux cas où, par une orientation convenable de la fente, on obtient des franges *non localisées* :

1° Lorsque l'on observe la première frange;

(¹) *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IX, p. 121 et 180; 1890.

2° Lorsque l'arête de la lame mince est normale au plan d'incidence, qui est alors un plan de symétrie de l'appareil.

Dans les deux cas, on trouve un tirage de la lunette pour lequel les franges sont visibles même avec une source lumineuse étendue dans tous les sens.

Dans tous les cas, l'emploi d'une fente est indispensable pour voir nettement les franges; à chaque orientation de la fente, on trouve les franges localisées dans un plan différent. Le calcul permet de trouver la relation qui existe entre la position du plan de localisation et l'orientation de la fente. Les résultats sont toujours conformes à ceux de l'expérience.

Franges d'Herschel. — Ces franges ne diffèrent de celles des lames minces prismatiques que par les conditions dans lesquelles on les observe. On peut les produire très commodément en se servant d'une lame mince d'air comprise entre deux lames planes de verre, rendue étanche par une couche de vernis; le tout est immergé dans une cuve à faces parallèle pleine d'eau. On observe les franges soit par réflexion, soit par transmission sous une incidence un peu inférieure à l'angle limite. Les franges par transmission sont d'une étude plus facile parce qu'à l'entrée et à la sortie on peut faire pénétrer la lumière sous l'incidence normale.

Si la lame mince est à faces parallèles, les franges cessent d'être localisées par l'emploi d'une fente normale au plan d'incidence. Elles sont localisées à l'infini si la source lumineuse est étendue.

L'aspect de ces franges en lumière monochromatique diffère de celui que l'on trouve habituellement aux franges d'interférence.

Si l'on examine, par exemple, des franges bien nettes fournies par les miroirs de Fresnel, elles apparaissent sous forme d'une série de bandes sombres estompées sur les bords; la courbe qui représente l'intensité lumineuse en fonction de la différence de marche est une sinusoïde. Ici, l'aspect est tout différent : les franges par réflexion apparaissent comme des lignes noires très fines et assez nettement limitées, se détachant sur un fond brillant d'éclat presque uniforme, à peu près comme des lignes tracées à la plume sur un papier blanc.

Les franges par transmission, complémentaires des précédentes,

ont l'aspect de lignes brillantes très fines se détachant sur un fond très sombre.

Ces phénomènes sont dus aux réflexions multiples et s'expliquent facilement au moyen des formules d'Airy, en tenant compte de ce que, au voisinage de la réflexion totale, le coefficient de réflexion prend une valeur voisine de l'unité.

Si la lame mince est prismatique, il se produit des phénomènes de localisation analogues à ceux que nous venons de décrire au paragraphe précédent.

Miroirs de Fresnel. — Dans cet appareil, l'interférence se produit entre deux ondes réfléchies sur des surfaces planes faisant entre elles un petit angle. Les propriétés des miroirs doivent donc être identiques à celles d'une lame mince prismatique qui réfléchirait la lumière sans la réfracter, dont l'indice serait, par suite, égal à 1.

La seule différence consiste dans l'étroitesse de la partie commune aux faisceaux réfléchis par les miroirs.

Dans les conditions où on les observe habituellement, ces franges ne sont pas localisées : cela tient à ce que le plan d'incidence est un plan de symétrie, les deux miroirs et la fente étant normaux à ce plan.

En dehors de ces conditions particulières, il y a localisation. L'expérience peut être réalisée de la manière suivante : les miroirs sont réglés à la manière ordinaire, de façon à produire des franges d'ordre élevé. Déréglons légèrement l'appareil, en faisant basculer l'un des miroirs autour d'un axe non vertical. Les franges vont se troubler; mais on pourra toujours les faire reparaître en faisant tourner la fente d'un angle convenable. Elles sont alors localisées; à chaque position de la loupe correspond une inclinaison différente de la fente.

Il faut avoir soin d'employer une fente très courte (quelques millimètres au plus); sans cette précaution, lorsque la fente est inclinée, une grande partie de sa longueur enverrait une seule onde à chaque point du champ; les franges seraient noyées dans un éclairement uniforme.

Cas où, la fente étant du côté de la source lumineuse, son

orientation dépend de sa distance à l'appareil interférentiel. Supposons que l'on se propose de rendre les franges nettes en un certain point M de l'espace. Il faut pour cela n'utiliser que les rayons contenus dans un certain plan passant par M. Avant leur passage à travers l'appareil interférentiel, ces rayons forment, *en général,* un élément de surface réglée. Si la fente est placée du côté de la source lumineuse, elle devra être tangente à cette surface; son orientation dépendra donc de sa distance à l'observateur.

Si, la fente étant donnée, on cherche en quel point les franges seront nettes, on trouve que la distance de ce point à une origine fixe satisfait à une équation du second degré. Il y a donc, suivant les cas, deux positions de visibilité, ou une seule, ou point du tout.

Pour réaliser ces phénomènes, il faut se servir d'un appareil qui, éclairé par un point lumineux, donne deux lignes focales bien distinctes. On obtient ce résultat en adjoignant une lentille cylindrique à l'un des appareils ordinairement employés, un biprisme par exemple. Les génératrices de la lentille doivent être obliques par rapport à l'arête du biprisme. On observe les deux positions de visibilité prévues par la théorie lorsque la lentille cylindrique est placée entre le biprisme et l'observateur.

II. — Orientation des franges d'interférence

Feussner a le premier remarqué que, si l'on observe au moyen d'une lunette les franges d'une lame mince prismatique, elles ne paraissent pas, en général, se projeter sur la lame suivant ses lignes d'égale épaisseur (1). Le raisonnement très simple par lequel il cherche à expliquer ce phénomène n'est exact que si les franges sont rendues visibles au moyen d'une fente placée sur l'objectif même de la lunette. Il est facile de constater que, si, sans toucher à aucune autre partie de l'appareil, on déplace la fente parallèlement à elle-même, l'orientation des franges est modifiée.

Ce fait est général : soit que la fente limite la source lumineuse,

(1) Feussner, *Wied. Ann.*, t. XIV, p. 545; 1881 et *Journal de Physique*, 2e série, t. I, p. 186.

soit qu'elle soit placée du côté de l'observateur, l'orientation des franges dépend de la distance de la fente à l'appareil interférentiel, à tel point que l'on peut ordinairement, par un simple déplacement de la fente, donner aux franges telle orientation que l'on veut.

La théorie générale de ces phénomènes peut être rattachée directement à celle de la visibilité des franges.

Considérons, en effet, un appareil interférentiel quelconque. Supposons qu'on l'éclaire au moyen d'une ouverture très petite S percée dans un écran E. Nous recevons les franges sur un écran E′; nous savons que, dans ces conditions, les franges présentent une netteté parfaite dans tous les cas. L'une d'elles passe par un certain point P de l'écran E′ et peut, au voisinage de P, être confondue avec sa tangente PF. Cette frange est le lieu des points tels que la différence de marche des couples de rayons interférents issus de S et qui y aboutissent reste constante.

Imaginons alors que l'on intervertisse les positions de la source lumineuse et de l'observateur; en d'autres termes, la fente et la source lumineuse sont placées du côté de l'écran E′ et les franges viennent se peindre sur l'écran E.

Nous savons qu'il faudra, pour obtenir des franges nettes au voisinage de S, limiter la source éclairante par une certaine fente, que nous supposerons contenue dans le plan E′ et passant par le point P. La condition qui définit l'orientation de la fente est que la différence de marche des couples de rayons envoyés au point S par tous les points de la fente soit constante. En vertu du principe du retour inverse des rayons, la direction que nous devrons donner à cette fente ne sera autre que PF. Donc :

Pour obtenir la direction de la frange qui passe par un point P d'un écran E, l'appareil étant éclairé par un point lumineux S, il suffit de chercher quelle devrait être l'orientation d'une fente dont le milieu serait en P, et située dans le plan E, pour que les franges fussent nettes en S.

Nous avons supposé dans ce qui précède que l'appareil était éclairé par un simple point lumineux. Nous pourrons, sans altérer les résultats, le remplacer par une fente dont le milieu coïncide avec ce point, mais à la condition qu'elle soit orientée de manière à produire des franges nettes au point P, car cette fente produit exactement le même effet que son milieu.

Tout résultat obtenu dans la théorie de la visibilité donnera un résultat correspondant, relatif à l'orientation des franges.

Nous placerons en regard les théorèmes correspondants pour mieux faire ressortir l'analogie.

Deux cas se présentent :

1° La fente destinée à rendre les franges nettes est placée du côté de l'observateur.

Visibilité des franges.	*Orientation des franges.*
Pour un tirage donné de la lunette, l'orientation de la fente qui rend les franges nettes est indépendante de sa distance à l'observateur.	L'orientation des franges est indépendante de la position du point visé sur l'axe optique de la lunette.
Si l'on fait varier le point visé, l'orientation de la fente qu'il faut introduire pour rendre les franges nettes varie. Si D est la distance du point visé à une origine fixe prise sur l'axe optique et φ l'angle de la fente avec un plan fixe passant par cet axe, on a	Si l'on fait varier la distance de la fente à l'objectif de la lunette, l'orientation des franges varie. Si Δ est la distance du milieu de la fente à une origine fixe prise sur l'axe optique et ψ l'angle des franges avec un plan fixe passant par cet axe, on a
(1) $\quad \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{A - PD}{B - QD},$	(1′) $\quad \operatorname{tang}\psi = \dfrac{\alpha - \beta\Delta}{\gamma - \varepsilon\Delta},$
A, B, P, Q étant quatre constantes [1].	α, β, γ, ε étant quatre constantes.

Par un choix convenable de l'origine des Δ et du plan fixe origine des angles ψ, on peut ramener l'équation (1′) à la forme plus simple

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\Delta}{\varpi},$$

ϖ étant une constante.

Il peut être avantageux d'introduire la fente entre l'objectif et l'oculaire de la lunette : la fente peut être alors regardée comme l'image à travers l'objectif d'une fente dont le milieu est en S′; les formules ci-dessus s'appliquent en remplaçant Δ par la distance de S′ à l'origine. Grâce à cette disposition, Δ peut varier de $+\infty$ à $-\infty$, et les franges peuvent prendre toutes les orientations possibles par un simple déplacement parallèle de la fente.

---

(1) *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 13.

Ces résultats ne souffrent d'exception que lorsqu'il y a absence de localisation. Examinons ce dernier cas :

Il peut se faire que, pour un tirage convenable de la lunette, les franges soient visibles sans employer de fente; elles sont localisées dans un certain plan.	Si la fente est dans le plan de localisation, les franges disparaissent sur l'écran, où l'on ne voit alors qu'un éclairement uniforme.
Dans ce cas, si la fente est parallèle aux franges que l'on observe dans le plan de localisation, les franges cessent d'être localisées.	Les franges ont toujours la même direction, quelle que soit la position de la fente; leur direction est la même que celle des franges que l'on observerait dans le plan de localisation, auquel cas la fente est inutile.

2° La fente est placée du côté de la source lumineuse.

Si le point S donne à travers l'appareil interférentiel une image S′, tout se passe comme dans le cas précédent; la distance Δ se rapporte au point S′.

En général, les choses se passent autrement.

L'orientation de la fente qui rend les franges nettes dépend non seulement de la position du point visé, mais encore de la distance du milieu de la fente à une origine fixe.	L'orientation des franges dépend, en général, non seulement de la position de la fente éclairante, mais encore du tirage de la lunette.
Le lieu des fentes qui rendent les franges nettes pour un tirage donné de la lunette est un paraboloïde.	Pour une position donnée de la fente, les tangentes aux franges sont les génératrices d'un paraboloïde.

Vérifications expérimentales.

Deux séries d'expériences ont été faites dans le but de vérifier les conséquences de la théorie qui précède.

1° *Franges des lames minces prismatiques.* — La lunette d'observation était disposée comme dans les expériences sur la localisation. Un cercle divisé indiquait l'orientation de l'un des fils du réticule, et, par suite, des franges. La lame mince était soit

une lame mince d'air comprise entre deux plans de verre, soit une lamelle de microscope donnant des franges bien rectilignes.

Il existe deux cas où l'orientation des franges n'est pas influencée par la position de la fente : lorsqu'on observe la frange d'ordre zéro, et lorsque l'arête de la lame mince est normale au plan d'incidence.

Dans tous les autres cas, si l'on déplace la fente parallèlement à elle-même, les franges tournent sans cesser d'être nettes, et l'on peut leur faire prendre toutes les orientations possibles.

Si, au contraire, on fait varier le tirage de la lunette sans toucher à la fente, les franges se troublent. On peut les faire reparaître en modifiant l'orientation de la fente, et les franges reprennent toujours la même orientation.

Les formules données par M. Macé de Lépinay pour déterminer l'orientation de la fente peuvent, par un simple changement de lettres, s'appliquer à l'étude de l'orientation des franges. J'ai pu vérifier qu'elles donnent toujours des résultats conformes à l'expérience.

2° Pour étudier le cas où l'orientation des franges dépend de la position du point visé, je me suis servi de l'appareil formé par une lentille cylindrique et un biprisme, la lentille étant placée du côté de la source lumineuse. Les franges sont observées au moyen d'une loupe de Fresnel. L'arête du biprisme est verticale.

Dès que le plan focal de la loupe s'éloigne de l'arête du biprisme, on voit les franges s'incliner. Des expériences numériques m'ont permis de vérifier qu'elles tournent suivant la même loi que les génératrices d'un paraboloïde.

Il n'y a d'exception que lorsque les génératrices de la lentille cylindrique sont parallèles ou perpendiculaires à l'arête du biprisme ; les franges sont alors toujours parallèles à cette dernière droite.

III. — Étude des franges d'interférence en dehors des conditions de netteté parfaite.

Nous nous sommes occupés exclusivement, dans ce qui précède, des cas où les franges d'interférence présentent une netteté parfaite, ce qui nous à conduits à employer un point lumineux ou

une fente convenablement orientée. Il nous reste à étudier ce qui se passe lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, en particulier, lorsque la source éclairante a une étendue finie dans tous les sens.

Nous aurons à étudier deux cas bien distincts, selon que la partie utilisée de la source est la même pour tous les points du champ, ou qu'elle varie d'un point à un autre.

1. La partie utilisée de la source est la même pour tous les points du champ.

Soit un appareil interférentiel éclairé par une source de lumière monochromatique, limitée à un certain nombre d'ouvertures percées dans un écran plan P. On observe les franges dans un plan P′, aux environs d'un point O′ de ce plan. Nous supposerons que *tous les points* de la partie découverte de la source envoient deux ondes au point O′ et aux points voisins; la partie utilisée de la source sera alors la même pour tous les points du champ.

Prenons dans le plan P deux axes de coordonnées yOx, et dans le plan P′ deux axes $y'O'x'$. Un point $M(x, y)$ du plan P envoie deux ondes au point $M'(x', y')$ du plan P′; soit Δ leur différence de marche, qui est fonction de x, y, x', y'. Si la partie découverte de la source est peu étendue autour du point O, on peut écrire

$$\Delta = \Delta_1 + Ax + By.$$

Δ_1, différence de marche des ondes envoyées par O en M′, est fonction des coordonnées x', y' de ce point.

L'orientation de l'axe Oy étant à notre choix, nous pouvons en profiter pour faire disparaître le terme en y dans l'expression de Δ : il suffit de placer l'axe Oy dans la direction qu'il faudrait donner à une fente étroite pour produire des franges nettes au point O. On peut donc écrire

$$\Delta = \Delta_1 + \alpha x. \tag{1}$$

L'intensité lumineuse étant la somme des intensités fournies par les différents points de la source aura pour expression

$$\iint \left(1 + \cos 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}\right) dx\, dy,$$

Δ ayant la valeur (1), et l'intégration étant étendue à toute la surface découverte du plan P.

Soit $S = \int\int dx\,dy$ la surface totale des ouvertures. Nous pouvons, sans inconvénient, diviser par ce facteur constant l'expression de l'intensité, et écrire

$$I = 1 + \frac{1}{S}\int\int \cos 2\pi \frac{\Delta_1 + \alpha x}{\lambda}\,dx\,dy.$$

Développant le cosinus et posant

$$(2)\qquad \begin{cases} F = \displaystyle\int\int \sin 2\pi \frac{\alpha x}{\lambda}\,dx\,dy, \\ G = \displaystyle\int\int \cos 2\pi \frac{\alpha x}{\lambda}\,dx\,dy, \end{cases}$$

il vient

$$I = 1 + \frac{1}{S}\left(G \cos 2\pi \frac{\Delta_1}{\lambda} - F \sin 2\pi \frac{\Delta_1}{\lambda}\right).$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(3)\qquad I = 1 + V \cos\left(2\pi \frac{\Delta_1}{\lambda} + \varphi\right),$$

en posant

$$(4)\qquad V = \frac{\sqrt{F^2 + G^2}}{S}, \qquad \text{tang}\,\varphi = \frac{F}{G}.$$

La forme même de ces équations va nous conduire à quelques conséquences :

1° Les franges brillantes ont pour équation

$$\Delta_1 = \left(k - \frac{\varphi}{2\pi}\right)\lambda.$$

Si le point O éclairait seul, leur équation serait

$$\Delta_1 = k\lambda.$$

La différence consiste en un déplacement d'une fraction de frange $\frac{\varphi}{2\pi}$. Donc l'orientation des franges ne dépend pas de la forme des ouvertures, mais la position des franges sombres et brillantes en dépend.

2° L'intensité lumineuse varie entre $1 + V$ et $1 - V$. Les franges seront d'autant plus nettes que V sera plus voisin de l'unité. Elles

seront parfaites si $V = 1$ et absentes si $V = 0$ [1]. J'appellerai V le coefficient de visibilité des franges au point O'.

Analogie avec les formules de diffraction des ondes planes. — Les intégrales F et G, qui résolvent le problème que nous nous sommes posé, sont de même forme que celles que l'on rencontre dans la théorie de la diffraction des ondes planes. Imaginons qu'une onde plane d'amplitude 1 tombe normalement sur l'écran P. Dans une direction faisant avec la normale à l'écran un angle D, le plan de diffraction contenant Ox, on aura une vibration

$$\xi = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \psi\right).$$

Si l'on fait $\sin D = \alpha$, V et φ se déduisent très simplement de A et ψ, car on a

$$V = \frac{A}{S}, \qquad \varphi = \psi.$$

On voit que, si le problème de diffraction a été résolu pour un certain écran, celui que nous venons de traiter le sera aussi, bien que les deux phénomènes n'aient au fond rien de commun.

On peut déduire de cette analogie dans les formules l'existence générale de phénomènes périodiques dans la visibilité des franges.

Si le plan P' se déplace parallèlement à lui-même, α variera, et V passera par une série de maxima et de minima. Si donc on pointe la lunette d'observation successivement à diverses distances, on verra les franges alternativement nettes et troubles. Elles pourront même disparaître complètement si les ouvertures du plan P ont une forme convenable.

Si l'on modifie la forme des ouvertures en les laissant semblables à elles-mêmes, on verra aussi les franges apparaître et disparaître périodiquement. Entre deux apparitions successives, elles pourront, dans certains cas, disparaître entièrement.

Nous allons appliquer la théorie qui précède à quelques cas simples.

---

(1) La valeur de V ne peut dépasser l'unité.

Ouverture rectangulaire.

Supposons que la partie découverte de la source éclairante se réduise à une fente de largeur a, parallèle à Oy, cet axe étant à égale distance de ses côtés. L'expression de l'intensité lumineuse devient

$$I = 1 + \frac{\sin \pi \frac{\alpha a}{\lambda}}{\pi \frac{\alpha a}{\lambda}} \cos 2\pi \frac{\Delta_1}{\lambda}.$$

Le coefficient de visibilité est

$$V = \frac{\sin \pi \frac{\alpha a}{\lambda}}{\pi \frac{\alpha a}{\lambda}}.$$

Il dépend de a, α et λ.

1° *Influence de la largeur de la fente.* — Examinons ce qui se passe lorsque a varie seul.

Si a est très petit, $V = 1$. Les franges sont parfaitement nettes.

Si a augmente, V diminue; les franges se troublent sans changer de place. Pour $a = \frac{\lambda}{\alpha}$, V est nul et les franges disparaissent. a continuant à augmenter, V devient négatif; les franges reparaissent, mais les franges noires auront pris la place des franges brillantes et réciproquement. Le deuxième maximum de netteté aura lieu pour $a = 1,43 \frac{\lambda}{\alpha}$, et V aura la valeur $-0,22$. Les franges seront donc moins nettes qu'elles n'étaient avec une fente étroite.

Les franges disparaîtront de nouveau pour $a = 2 \frac{\lambda}{\alpha}$, pour reparaître ensuite dans leur position primitive, et ainsi de suite.

D'une façon générale, les franges seront invisibles lorsque $a = k \frac{\lambda}{\alpha}$, k étant un entier autre que zéro. Entre deux disparitions successives, les franges seront visibles, et les maxima de netteté auront lieu à très peu près pour $a = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{\alpha}$ $\left(\text{exactement lorsque } \pi \frac{a\alpha}{\lambda} = \operatorname{tang} \pi \frac{a\alpha}{\lambda}\right)$; mais les apparitions successives seront de

moins en moins nettes, les valeurs maxima de V en valeur absolue étant successivement

$$1, \quad 0{,}21, \quad 0{,}13, \quad 0{,}09, \quad 0{,}07, \quad \ldots.$$

Enfin, entre une apparition et la suivante, il y a inversion des franges.

Tous les appareils producteurs de franges d'interférence permettent de vérifier les résultats qui précèdent. Il suffit de régler l'appareil avec une fente étroite et de l'élargir progressivement pour voir se produire les phénomènes prévus par la théorie. J'ai pu voir les apparitions et disparitions successives en employant les miroirs de Fresnel, le biprisme, les demi-lentilles de Billet, les fentes d'Young, les miroirs de Jamin, les franges d'Herschel (dans ces deux derniers cas, il faut observer les franges ailleurs qu'à l'infini), des lames minces prismatiques dans diverses positions.

Des expériences de mesure, faites avec différents appareils interférents, ont donné des résultats conformes à la théorie.

2° *Influence de la variation de* α. — Les quantités a et α entrent d'une manière symétrique dans l'expression de V. Si donc on fait varier le coefficient α sans modifier la largeur de la fente, on observera des phénomènes identiques à ceux qui viennent d'être décrits.

Cette variation peut être obtenue en déplaçant parallèlement à lui-même le plan P′ dans lequel on observe les franges. Toutefois, l'expérience n'est réalisable que lorsqu'il y a absence de localisation avec une fente linéaire; dans le cas général il faudrait, pour chaque tirage de la lunette, rectifier l'orientation de la fente, puisqu'elle est toujours, par hypothèse, parallèle à la direction qu'il faudrait donner à une fente étroite pour obtenir le maximum de netteté.

Ces apparitions et disparitions sont surtout faciles à constater au moyen d'une lame mince prismatique, dont l'arête est normale au plan d'incidence. Les faisceaux interférents se superposent toujours, ce qui n'aurait pas lieu avec d'autres appareils.

3° *Phénomènes dus à la variation de* λ. — Éclairons l'appareil avec de la lumière blanche, et supposons d'abord la fente li-

néaire. Si les rayons de différentes couleurs ont parcouru le même chemin géométrique, Δ_1 et α sont indépendants de λ. Recevons la lumière émergente sur la fente d'un spectroscope orientée dans la direction des franges. On aura un spectre sillonné de franges d'autant plus serrées que Δ_1 sera plus grand. Supposons qu'il y en ait au moins 20 à 30 dans le spectre visible.

Si l'on élargit progressivement la fente éclairante, la netteté de ces franges diminue, mais elle diminue moins vite dans le rouge que dans le violet. Pour $a = \frac{\lambda_1}{\alpha}$, λ_1 étant la longueur d'onde du violet, les franges auront disparu dans le violet, tandis qu'elle seront encore visibles dans le rouge. Si l'on continue à élargir la fente, les franges reparaîtront dans le violet, et il y aura dans le spectre une bande sans frange, qui s'avance du violet vers le rouge à mesure que l'on élargit la fente. Elle inverse les franges partout où elle a passé. Cette bande se perd dans l'extrême rouge pour $a = \frac{\lambda_2}{\alpha}$, λ_2 étant la longueur d'onde des derniers rayons visibles.

Une deuxième bande sans frange apparaîtra dans le violet pour $a = 2\frac{\lambda_1}{\alpha}$, et suivra le même chemin que la première, et ainsi de suite. Les bandes sans frange se succédant dans le spectre à intervalles de plus en plus rapprochés, on en verra bientôt plusieurs qui cheminent ensemble du violet vers le rouge. A chaque réapparition la netteté des franges devient moindre, et le phénomène finit par disparaître dans un éclairement continu.

Pour une largeur a de la fente, les bandes sans frange correspondent aux longueurs d'ondes

$$\lambda = \frac{a\alpha}{k},$$

k étant un entier.

Fente linéaire mal réglée.

Soit une fente linéaire de longueur l, faisant avec Oy un angle φ. L'intensité lumineuse a pour expression

$$I = 1 + \frac{\sin \pi \frac{\alpha l \sin\varphi}{\lambda}}{\pi \frac{\alpha l \sin\varphi}{\lambda}} \cos 2\pi \frac{\Delta_1}{\lambda}.$$

L'effet est le même que celui d'une fente parallèle à Oy et de largeur $a = l \sin\varphi$.

Si l'on fait tourner la fente autour de son milieu, on verra se produire une série d'apparitions et de disparitions des franges. Il en sera de même si, laissant fixe l'orientation de la fente, on augmente progressivement sa longueur.

Il ne faut pas que cette longueur dépasse une certaine limite; si *tous les points* de la fente cessaient d'envoyer deux ondes à chaque point du champ, la théorie précédente ne serait plus applicable, et l'orientation des franges dépendrait de celle de la fente, comme nous le démontrerons plus bas.

Cas d'un grand nombre de fentes parallèles et équidistantes.

Les réseaux donnant des franges de diffraction très brillantes, il est à prévoir que l'on obtiendra des apparitions très nettes si on limite la source éclairante au moyen d'un réseau.

Si e désigne l'intervalle qui sépare deux traits consécutifs, les franges seront nettes lorsqu'on aura

$$\alpha = k\frac{\lambda}{e},$$

k étant un entier positif ou négatif.

Je me suis servi d'un réseau formé de 40 traits, la distance de deux traits consécutifs étant de $0^{mm},5$; je m'en suis servi pour éclairer une lame prismatique d'air; l'arête de la lame et les traits du réseau étaient normaux au plan d'incidence. En faisant varier le tirage de la lunette, j'ai pu observer et mesurer onze apparitions successives des franges.

L'expérience est plus difficile avec les miroirs de Fresnel. Il ne faut pas que la largeur totale du réseau dépasse une certaine limite, sans quoi chaque point du champ ne recevrait deux ondes que d'une partie des traits, les autres ne servant qu'à noyer le phénomène dans un éclairement uniforme. J'ai employé un réseau formé de 25 traits distants de $0^{mm},1$. Les miroirs étant réglés avec une fente étroite qu'éclaire une flamme monochromatique, je substitue le réseau à la fente; il suffit de déplacer la loupe pour voir apparaître les franges; elles sont très nettes et très brillantes à cause du grand nombre des fentes.

2. La partie utilisée de la source lumineuse varie d'un point à un autre du champ.

Examinons dans quel cas ce phénomène peut se produire.

Soient P le plan dans lequel sont percées les ouvertures qui limitent la source lumineuse, et μ un point du plan focal de la lunette. Tous les rayons qui aboutissent en ce point ont passé par le point M′ dont il est l'image. Mais, pour qu'un rayon passant en M′ puisse arriver en μ, il faut qu'il tombe sur la partie découverte de l'objectif. Imaginons un point lumineux placé en μ. Tous les rayons qu'il émet sont, après avoir traversé l'objectif, contenus dans un cône ayant M′ pour sommet et pour base l'ouverture de l'objectif. Après avoir traversé l'appareil interférentiel ils vont tous percer le plan P à l'intérieur d'une courbe Σ. Il est clair que, réciproquement, les points situés à l'intérieur de Σ peuvent seuls envoyer de la lumière au point μ.

Si la courbe Σ contient à son intérieur toute la partie découverte de l'écran, nous nous trouvons dans le cas que nous venons de traiter. Si, au contraire, une portion de la surface découverte se trouve en dehors de Σ, un déplacement de cette courbe modifiera la partie utilisée, qui dépendra ainsi de la position du point μ. La théorie précédente tombe en défaut, et l'on est conduit, comme nous allons le voir, à des résultats bien différents.

Remarquons d'abord que l'on peut substituer les points M′ aux points μ, à la condition de ne faire entrer en ligne de compte que les rayons qui aboutissent réellement en μ; le phénomène que verra l'observateur sera l'image de celui que nous allons étudier.

Reprenons l'expression de l'intensité au point $M'(x', y')$ du plan P′

$$I = \iint \left(1 + \cos 2\pi \frac{\Delta_1 + \alpha x}{\lambda}\right) dx\, dy,$$

Δ_1 est fonction de x', y'. Si l'on se borne à étudier ce qui se passe sur un petit espace, on peut poser

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \alpha' x'.$$

L'axe $O'y'$ est alors parallèle à la direction des franges que donnerait un point lumineux placé en O; Δ_0 est la différence de

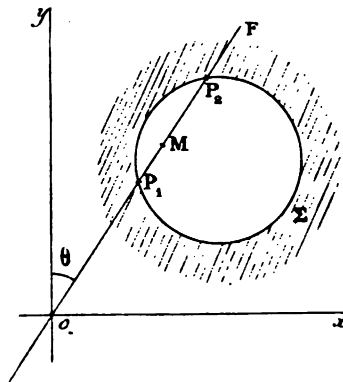
marche des ondes envoyées par le point O au point O'; c'est une constante.

Le champ d'intégration dépend de x' et y'; les intégrales F, G, S sont alors fonctions de ces coordonnées, et *l'orientation des franges dépend de la forme des ouvertures.*

Je me bornerai à étudier le cas d'une fente linéaire orientée d'une façon quelconque.

Prenons l'origine O des coordonnées sur la fente elle-même;

Fig. 1.



soit θ l'angle qu'elle fait avec Oy. Un de ses points, M, peut être défini par la distance $OM = \rho$.

Soient P_1 et P_2 les points où la courbe Σ rencontre la fente; le segment P_1P_2 est seul utilisé. Soient

$$OP_1 = \rho_1, \qquad OP_2 = \rho_2.$$

Posons en outre

$$\rho_2 - \rho_1 = l \qquad \text{(longueur de la partie utilisée } P_1P_2\text{)},$$

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = p \qquad \text{(distance de O au milieu de } P_1P_2\text{)}.$$

Toutes ces quantités sont fonctions de x' et y'. On a alors

$$I = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{\Delta_0 + \alpha' x' + \alpha\rho \sin\theta}{\lambda}\right) d\rho.$$

Intégrant et mettant l en facteur

(1) $$I = l\left(1 + \frac{\sin\pi\frac{\alpha l \sin\theta}{\lambda}}{\pi\frac{\alpha l \sin\theta}{\lambda}}\cos 2\pi\frac{\Delta_0 + \alpha' x' + \alpha p \sin\theta}{\lambda}\right).$$

Si $\frac{\alpha l \sin\theta}{\lambda}$ prend une valeur un peu grande (quelques unités), le facteur

(2) $$\frac{\sin\pi\frac{\alpha l \sin\theta}{\lambda}}{\pi\frac{\alpha l \sin\theta}{\lambda}}$$

devient insensible; il n'y aura pas de franges.

Supposons au contraire que $\frac{\alpha l \sin\theta}{\lambda}$ soit très petit. On peut confondre le facteur (2) avec l'unité. Cela arrivera lorsque l ou θ sera très petit, par suite, lorsque la fente sera peu inclinée sur Oy ou la courbe Σ peu étendue.

L'équation (1) devient alors

$$I = l\left(1 + \cos 2\pi\frac{\Delta_0 + \alpha' x' + \alpha p \sin\theta}{\lambda}\right).$$

Les franges sombres ont pour équation

(3) $$\Delta_0 + \alpha' x' + \alpha p \sin\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Pour pouvoir pousser plus loin cette étude, il est nécessaire de calculer p en fonction de x', y'.

Supposons que l'appareil interférentiel soit une lame mince prismatique dont l'arête, verticale, soit normale au plan d'incidence. La partie découverte de l'objectif sera un cercle de rayon R. La courbe Σ sera aussi un cercle, de rayon r. Un calcul facile donne

$$p = m(x' \sin\theta + y' \cos\theta),$$
$$r = (m - 1)R,$$

m étant une constante qui dépend de la position du plan P'.

L'équation (3) est l'équation des franges sombres. Elles font avec Oy un angle ψ donné par l'équation

$$\text{tang}(\psi - \theta) = -\left(1 + m\frac{\alpha}{\alpha'}\right)\text{tang}\theta.$$

Si la fente est verticale ($\theta = 0$) les franges sont verticales aussi ($\psi = 0$). Mais, dès qu'on incline la fente, les franges s'inclinent aussi. Selon les cas, elles s'inclinent dans le même sens que la fente, ou en sens inverse.

Si l'on continue à faire tourner la fente, les franges ne tarderont pas à se troubler, à moins que le cercle Σ ne soit de très petit rayon. Il faut pour cela que la lunette soit pointée à une petite distance en avant ou en arrière de l'image de la fente. On voit alors dans le champ une bande brillante, qui est l'image trouble de la fente; sur cette bande se détachent des franges dont l'orientation dépend de celle de la fente.

Cette disposition est irréalisable avec les miroirs de Fresnel, car les faisceaux réfléchis ne se superposeraient pas. Aussi les franges se troublent-elles toujours très rapidement lorsque l'on fait tourner la fente. On peut cependant, avant qu'elles aient disparu, voir leur orientation se modifier légèrement.

SUR LA VISIBILITÉ DES ANNEAUX DE NEWTON;

PAR M. G. MESLIN.

Lorsqu'on examine les anneaux de Newton en remplaçant par un prisme la lentille de l'appareil habituellement employé, on sait que le nombre des anneaux visibles est considérablement augmenté, surtout au voisinage de la réflexion totale, c'est-à-dire au moment où ils sont sur le point de disparaître.

On explique habituellement cette visibilité par ce fait : que la vision s'effectue au travers d'un prisme, avec lequel on examine des franges visées; ce prisme, imprimant aux différentes couleurs des déviations inégales, superpose les maxima qui existaient en des points différents, et produit une sorte d'achromatisme qui augmente considérablement le nombre de franges visibles, comme si la lumière était monochromatique; c'est, en effet, ce qui se produit lorsqu'on examine les anneaux de Newton à l'aide d'un prisme *convenablement disposé;* mais il est à remarquer que cette déviation favorable pour l'une des moitiés des anneaux (celle

qui est à côté du sommet du prisme) est au contraire défavorable pour l'autre moitié, et, en effet, tandis que pour la première, les anneaux sont plus serrés, presque achromatisés et visibles en nombre considérable, pour l'autre moitié, il y a une déformation contraire qui les étale, augmente la dispersion et empêche même d'apercevoir les premiers.

Or, il ne se produit rien de semblable lorsque la lentille est remplacée par le prisme à base convexe; les anneaux sont visibles en bien plus grand nombre sur toute leur étendue autour de la tache centrale, surtout au voisinage de la réflexion totale, à un moment où les anneaux brillants restant presque blancs, les anneaux obscurs se colorent subitement en violet.

L'explication ordinaire ne semble donc pas convenir ici et l'effet du prisme me paraît être d'une nature un peu différente : il imprime, aux rayons qui vont traverser la lamelle et interférer, des directions différentes suivant leurs couleurs; l'incidence n'étant pas la même, la position des anneaux sera différente de ce qu'elle serait en lumière blanche parallèle, les rayons plus réfrangibles seront plus inclinés, leurs anneaux correspondront à une épaisseur plus grande, c'est-à-dire auront un diamètre plus considérable, qui se rapprochera davantage du diamètre correspondant aux anneaux des couleurs moins réfrangibles, ce qui diminuera la dispersion et augmentera la visibilité des anneaux tout autour du centre.

A l'appui de cette explication, cherchons l'ordre de ce rapprochement en prenant le cas où la lamelle est constituée par de l'air.

On sait que le retard géométrique est proportionnel à

$$\frac{e\cos i'}{n},$$

i' étant l'incidence dans la lamelle.

L'anneau d'ordre k correspondra pour l'air à l'épaisseur donnée par l'équation

$$e\cos i' = k\lambda, \qquad e = k\,\frac{\lambda}{\cos i'}.$$

Pour deux couleurs différentes λ_1, λ_2, les épaisseurs où se pro-

duiront le même anneau seront

$$k\frac{\lambda_1}{\cos i'} \quad \text{et} \quad k\frac{\lambda_2}{\cos i'}.$$

i' est le même dans les deux cas, puisque les rayons traversent la lamelle sous la même inclinaison qu'ils avaient avant de rencontrer la lame à face parallèle qui est au-dessus de la lamelle.

La variation d'épaisseur est

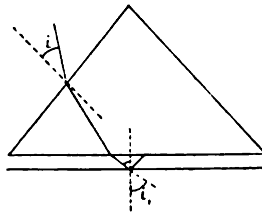
$$\frac{k(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos i'},$$

qui, rapportée à l'une des épaisseurs, donne

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}.$$

Prenons maintenant le cas où les rayons parallèles traversent d'abord un prisme dont l'angle est de 60°, sur lequel ils tombent sur un angle i (*fig.* 1); ils traverseront la lamelle sous des incli-

Fig. 1.



naisons i_1, i_2; mais ils retrouveront leur parallélisme après avoir traversé l'autre dièdre du prisme, c'est-à-dire au moment d'arriver dans l'œil; c'est donc l'œil qui détermine ainsi la position des rayons incidents à considérer.

Pour les deux couleurs λ_1 et λ_2, les épaisseurs d'un anneau de même ordre seront proportionnelles à

$$\frac{\lambda_1}{\cos i'_1} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_2}{\cos i'_2},$$

et la différence rapportée à l'un d'eux sera

$$\frac{\dfrac{\lambda_2}{\cos i'_2} - \dfrac{\lambda_1}{\cos i'_1}}{\dfrac{\lambda_1}{\cos i'_1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{\cos i'_1}{\cos i'_2} - 1,$$

au lieu de

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1.$$

La différence relative sera donc plus petite, car on a

$$i'_1 > i'_2,$$

c'est-à-dire

$$\cos i'_1 < \cos i'_2.$$

Ce rapport, qui était positif, se rapprochera donc de zéro, et les anneaux correspondant à ces deux couleurs auront des diamètres plus voisins les uns des autres; si ce rapport peut atteindre zéro, l'achromatisme rigoureux sera réalisé pour ces deux couleurs.

Mais, il y a plus, si, *l'incidence augmentant, cette expression peut devenir négative, un nouvel écart se produira, mais en sens contraire du premier,* c'est-à-dire que ce sont les anneaux violets qui, prenant un diamètre supérieur aux anneaux rouges, se sépareront de ceux-ci, l'achromatisme sera détruit par l'exagération même de la cause qui l'avait réalisé, et ils deviendront de moins en moins visibles en présentant un ordre de teintes tout à fait différent de la disposition ordinaire.

Or il est vraisemblable de penser que cette condition se présentera au voisinage de la réflexion totale, qui se produira d'abord pour la couleur la plus réfrangible, le violet et le bleu; à ce moment, la variation du cosinus sera beaucoup plus rapide pour la couleur qui va se réfléchir totalement que pour l'autre, $\frac{\cos i'_1}{\cos i'_2}$ deviendra très petit, aussi petit qu'on le voudra, et l'expression considérée deviendra forcément négative et de plus en plus grande.

Voici, d'un autre côté, les circonstances que présente l'observation :

Lorsqu'on est à plusieurs degrés de la réflexion totale, les anneaux présentent la visibilité et les couleurs ordinaires; mais, en augmentant l'incidence, on en voit tout à coup un bien plus grand

nombre, et, à ce moment, les anneaux brillants paraissent blancs, ou plutôt blanc jaunâtre, tandis que les anneaux sombres se colorent en violet. Alors, pour une très petite variation de l'incidence, on voit, avant le moment de la réflexion totale, un rapide changement; les couleurs apparaissent : autour de la tache centrale noire, on voit un large anneau absolument blanc, puis un cercle bleu entouré de rose, suivi d'autres anneaux colorés et dont voici la disposition générale :

Noir (tache centrale).	Blanc faible.
Blanc (anneau large).	Bleu.
Bleu.	Rose.
Rose.	Bleu.
Blanc.	Rose.
Bleu.	
Rose.	

Disons que, pour observer facilement ces phénomènes, il est bon de viser avec une lunette très diaphragmée en se plaçant à plusieurs mètres de distance, afin d'opérer sous une incidence bien déterminée.

Nous allons montrer que tous ces phénomènes s'expliquent facilement par la théorie énoncée plus haut.

Pour cela, nous allons calculer l'épaisseur correspondant aux anneaux dans les différentes couleurs et sous diverses incidences.

Nous prendrons les couleurs : violet, vert-bleu, jaune et rouge, dont les longueurs d'onde sont

$$450^{\mu\mu}, \quad 500^{\mu\mu}, \quad 580^{\mu\mu}, \quad 650^{\mu\mu},$$

et dont les indices étaient

$$1{,}64, \quad 1{,}63, \quad 1{,}62, \quad 1{,}61$$

dans le prisme dont les angles étaient de 60°.

Remarquons d'abord que, si l'on n'employait pas le prisme, les épaisseurs des anneaux seraient proportionnelles à

$$\left.\begin{matrix}450\\500\\580\\650\end{matrix}\right\}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{\begin{matrix}0{,}69\\0{,}76\\0{,}89\\1\end{matrix}\right.$$

Si maintenant on emploie le prisme, les épaisseurs sont proportionnelles à $\frac{\lambda}{\cos i'}$.

i étant calculé pour les formules

$$\sin i = n \sin r,$$
$$r + r' = 60°,$$
$$\sin i' = n \sin r',$$

il suffit d'éliminer r et r' pour avoir i' en fonction de l'incidence i et de l'indice n de la couleur λ

$$\sin i = n \sin(60° - r) = n(\sin 60° \cos r - \sin r \cos 60°),$$
$$\sin i = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i).$$

La réflexion totale commençant à se produire pour une valeur comprise entre 37° et 38°, nous allons étudier ce qui se passe entre 43° et 38°, de degré en degré.

Voici les résultats des calculs pour chacun de ces angles :

$i = 43°$.

λ.	n.	$\sin i'$.	$\cos i'$.	$\frac{\lambda}{\cos i'}$ = épaisseurs corresp. aux anneaux.	
450	1,64	0,950	0,310	1,45	0,86
500	1,63	0,940	0,340	1,47	0,87
580	1,62	0,931	0,364	1,59	0,95
650	1,61	0,922	0,385	1,68	1

$i = 42°$.

		0,962	0,273	1,64	0,90
		0,953	0,300	1,66	0,91
		0,943	0,331	1,75	0,96
		0,933	0,358	1,81	1

La dernière colonne montre que les épaisseurs, déjà un peu plus voisines que plus haut, se rapprochent par cette disposition au fur et à mesure que l'incidence augmente.

$i = 41°$.

$\sin i'$.	$\cos i'$.	$\frac{\lambda}{\cos i'}$ = épaisseurs corresp. aux anneaux.	
0,973	0,230	1,95	0,97
0,964	0,265	1,88	0,94
0,954	0,298	1,94	0,97
0,945	0,325	2	1

Les anneaux sont encore plus voisins les uns des autres et la variation minimum est réalisée aux environs de $\lambda = 500$, c'est-à-dire à la limite du bleu et du vert.

$i = 40°$.

$\sin i'$.	$\cos i'$.	$\frac{\lambda}{\cos i'}$ = épaisseurs corresp. aux anneaux.	
0,985	0,165	2,72	1,21
0,975	0,222	2,25	1,005
0,966	0,256	2,26	1,01
0,957	0,290	2,24	1

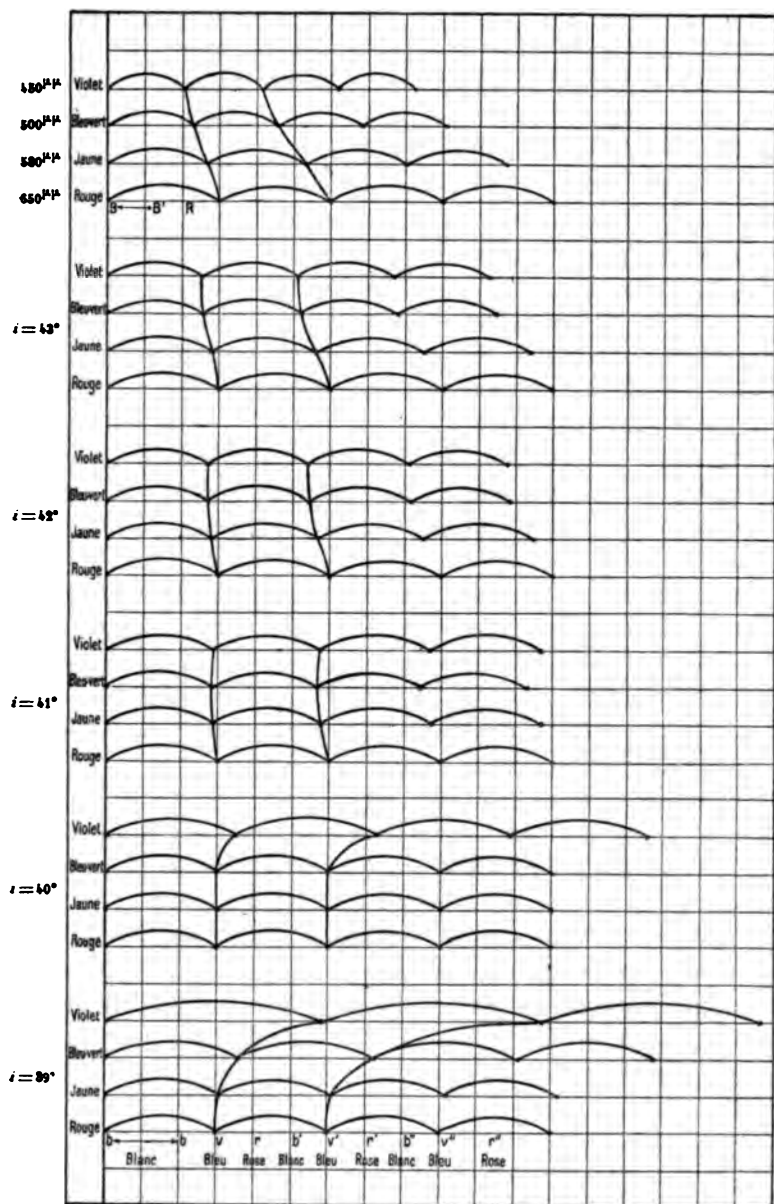
On voit que la coïncidence est bien meilleure encore pour les radiations de longueurs d'onde $500^{\mu\mu}$, $580^{\mu\mu}$ et $650^{\mu\mu}$, c'est-à-dire pour presque toute l'étendue du spectre visible; seuls les anneaux violets sont devenus plus larges que les autres, la teinte violette éclairera donc les anneaux obscurs correspondant aux autres couleurs; les anneaux sombres seront donc violets et les anneaux brillants auront une teinte blanche un peu jaunâtre, puisqu'il y manquera seulement le violet; c'est le moment où l'achromatisme est le mieux réalisé et où le nombre des anneaux visibles est le plus grand, car l'accord pour le rouge et pour le vert se maintient bien au delà du *centième* anneau.

Enfin supposons qu'on augmente encore l'incidence de façon à être très près de la réflexion totale atteinte entre 39° et 38°,

$i = 39°$.

$\sin i'$.	$\cos i'$.	$\frac{\lambda}{\cos i'}$ = épaisseurs corresp. aux anneaux.	
0,997	0,075	5,10	1,96
0,987	0,156	3,20	1,23
0,978	0,208	2,78	1,08
0,968	0,250	2,60	1

Fig. 2.



Les anneaux, en s'élargissant, se sont complètement séparés les

uns des autres et l'achromatisme n'existe plus, mais les dispositions des teintes sont totalement différentes des primitives puisque ce sont les anneaux correspondant aux couleurs les moins réfrangibles qui sont les plus grands. On peut d'ailleurs facilement prévoir ces teintes par une représentation graphique des Tableaux (*fig.* 2) qu'on vient de calculer.

Nous allons pour cela représenter sur une droite horizontale les épaisseurs, et figurer par une courbe ondulée les intensités de chaque lumière aux différents points; nous prendrons quatre droites parallèles qui se rapporteront aux quatre couleurs choisies, ce qui permettra de prévoir la teinte par la superposition qui se produit en chaque point, en utilisant ce qu'on sait dans le cas des anneaux ordinaires examinés sous l'incidence normale, cas que nous représenterons tout d'abord.

Au voisinage du centre, après la tache noire on aura une teinte blanche provenant de l'addition de toutes les couleurs, puisqu'on est éloigné du moment où l'une d'elles commence à s'éteindre; la première qui disparaît est le rouge, la couleur dominante sera le vert bleuâtre qui passera au rouge lorsque, celui-ci devenant maximum, le bleu s'éteindra; on a ensuite une teinte blanche provenant de ce que toutes les couleurs figurent à peu près dans les mêmes proportions que dans la lumière incidente, le maximum étant dans le vert et les autres couleurs étant les unes en deçà, les autres au delà de leur maximum d'intensité.

On aura de même une série d'anneaux, bleus en dedans, rouges en dehors, chaque anneau étant séparé du précédent et du suivant par un anneau blanc de moins en moins distinct; c'est précisément ce que l'observation révèle facilement (*voir* plus haut) pourvu que l'on prenne la précaution d'observer de loin avec une lunette convenablement diaphragmée.

Ces phénomènes se produisent également lorsqu'on interpose un liquide tel que l'eau dont l'indice soit inférieur à l'indice du prisme supérieur.

NOTES D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. P. LEFEBVRE.

I. Partons des deux principes suivants que l'on peut soit regarder comme résultant de l'expérience, soit établir par des raisonnements bien connus.

1° Si des rayons lumineux passant par un même point P tombent sur la surface S sphérique ou plane séparant deux milieux, les rayons émergents (réfléchis ou réfractés) vont passer par un même point P'.

Les points P et P', réciproques l'un de l'autre, sont dits *foyers conjugués l'un de l'autre*. L'image d'un objet est le lieu des foyers conjugués de ses points.

2° L'image par rapport à une surface S plane ou sphérique d'une figure plane située dans un plan H est une figure plane homothétique. Le centre d'homothétie est le centre de la sphère si la surface S est sphérique; il est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de S, si la surface S est plane.

Ces deux principes supposent que l'on ne considère que des rayons incidents peu écartés les uns des autres.

On en déduit immédiatement par récurrence les deux principes généraux suivants :

1° Étant donné un système optique centré Σ, à des rayons incidents passant par un même point P correspondront des rayons émergents passant par un même point P' (qu'il y ait eu d'ailleurs des réflexions ou des réfractions).

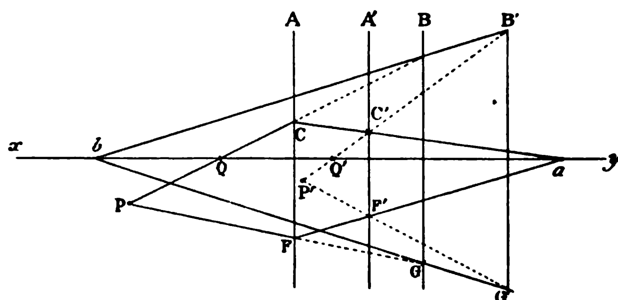
Les points P et P' seront des foyers conjugués par rapport au système. L'image d'un objet sera le lieu des conjugués de ses points.

2° L'image par rapport au système centré Σ d'une figure plane située dans un plan H perpendiculaire à l'axe du système est une figure plane homothétique (située par conséquent dans un plan H' parallèle à H). Le centre d'homothétie est sur l'axe du système Σ.

Si l'on connaît deux groupes de plans conjugués AA' et BB' par rapport à un système optique centré Σ (*fig.* 1) ainsi que les

centres d'homothétie correspondants, le système est optiquement défini et l'on peut construire aisément le foyer conjugué P′ d'un point P.

Fig. 1.



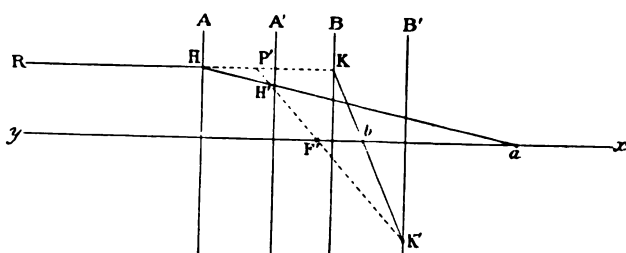
C'est la construction figurée plus haut.

On mènera par le point P deux incidents PCB et PFG rencontrant les plans A et B en C, B et F, G.

Le conjugué B′ de B est sur la droite *b*B et dans le plan B′, de même pour les autres points. Les rayons émergents C′B′ et F′G′ se coupent en P′ conjugué de P. Dans le cas d'un point Q situé sur l'axe, un seul incident QCB suffirait à déterminer le conjugué Q.

Il serait facile de trouver les foyers du système; c'est ainsi que je construis (*fig.* 2) le foyer F′ dans la figure ci-jointe.

Fig. 2.



Le rayon incident parallèle à l'axe RHK rencontre le rayon émergent en P′. Le conjugué P de P′ est à la même distance que lui de l'axe. Autrement dit, pour les plans P et P′ le rapport d'homothétie est 1. Ces plans sont les plans principaux.

On déterminerait avec la même facilité les points nodaux, etc.

Des constructions précédentes se déduisent facilement des relations de position et de grandeur entre les images et les objets, les grossissements diamétraux et angulaires, etc.

La connaissance de deux groupes de plans conjugués et de trois centres d'homothétie peut être déduite de l'expérience, bien plus aisément que celle des foyers et des plans principaux.

Connaissant les premiers, vous pouvez en déduire ces derniers ou vous en passer, car les constructions sont aussi simples avec le premier système d'éléments.

Enfin la méthode s'applique même lorsqu'il cesse d'y avoir des foyers et des plans principaux. Enfin, elle peut être étendue à d'autres systèmes optiques que les systèmes optiques centrés.

II. Dans un système optique centré, le produit du grossissement angulaire, relatif à deux points conjugués sur l'axe, par le grossissement diamétral, relatif aux deux plans conjugués passant par ces points, est constant.

(J'appelle grossissement angulaire, relatif à deux points conjugués, le rapport des angles formés avec l'axe par des rayons émergents et incidents passant par ces points. Quant au grossissement diamétral, c'est le rapport des dimensions linéaires de l'image et de l'objet contenus dans ces plans.

Nous aurons soin, pour avoir des formules générales, de compter les longueurs sur l'axe de gauche à droite positivement, de compter les angles positivement à partir de l'axe dans le sens trigonométrique, et les longueurs perpendiculaires à l'axe positivement de bas en haut).

1° Soit un système optique centré ayant des foyers F et F' et des plans principaux P et P'.

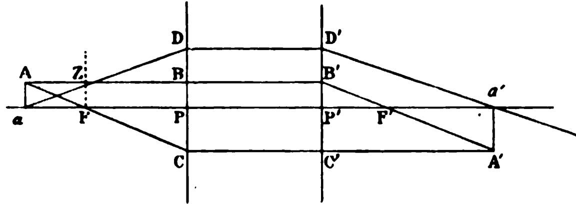
Du point Q de l'axe, je mène le rayon incident QD faisant l'angle α avec l'axe; le rayon émergent D'Q' fait avec l'axe un angle $\alpha' = -\overline{D'Q'P'}$.

Soit Z le point d'intersection de QD avec le plan focal; à tous les rayons incidents passant par Z correspondent des rayons émergents parallèles à D'Q'. En particulier, le rayon parallèle à l'axe AZBB' donnera B'F'A' parallèle à D'Q'.

Pour construire le conjugué de A du plan Q (*fig.* 3), il suffira

de mener AFC incident; le rayon émergent parallèle à l'axe coupera B'F' au point A' du plan Q'.

Fig. 3.



Dans les triangles PFC et B'F'A', j'ai

$$\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{PF}}\,\mathrm{tang}\,\alpha, \qquad \overline{\mathrm{P'B'}} = -\,\overline{\mathrm{P'F'}}\,\mathrm{tang}\,\alpha'.$$

En remplaçant les tangentes par les angles, et appelant F et F' les distances de P et P' aux foyers

$$\overline{\mathrm{PC}} = -\,\mathrm{FQ}, \qquad \overline{\mathrm{P'B'}} = \mathrm{F'}\alpha'.$$

D'ailleurs $\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{Q'A'}}$ et $\overline{\mathrm{P'B'}} = \overline{\mathrm{QA}}$; donc

$$\overline{\mathrm{Q'A'}} = -\,\mathrm{F}\alpha, \qquad \overline{\mathrm{QA}} = \mathrm{F'}\alpha';$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha'}{\alpha} \times \frac{\overline{\mathrm{Q'A'}}}{\overline{\mathrm{QA}}} = -\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F'}}.$$

$\frac{\alpha'}{\alpha}$ est le grossissement angulaire G_a; $\frac{\overline{\mathrm{Q'A'}}}{\overline{\mathrm{QA}}}$ le grossissement diamétral G_D; $-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F'}}$ est constant:

$$\mathrm{G}_a \times \mathrm{G}_d = \mathrm{K}.$$

2° Si l'on suppose que les foyers s'écartent de plus en plus, cette propriété persiste. Le produit $\mathrm{G}_a\mathrm{G}_d$ sera donc encore constant pour les systèmes optiques n'ayant pas de foyers. (Dans ce cas G_a et G_d sont constants.)

3° En particulier, le produit $\mathrm{G}_a\mathrm{G}_d$ est constant par rapport à la surface de séparation plane ou sphérique de deux milieux.

Si l'on prend en particulier pour points Q et Q' confondus le

sommet de la surface de séparation,

$$g_d = 1, \qquad g_a = \frac{n}{n'}.$$

Et par suite ici $K = \frac{n}{n'}$, rapport des indices des deux milieux.

Dans un système optique centré, le rapport des distances focales est égal au rapport des indices des milieux extrêmes (en valeur absolue).

En effet,

$$\frac{F}{F'} = - G_a \times G_d.$$

Or évidemment G_a est le produit Πg_a des grossissements relatifs à chaque face, de même $G_d = \Pi g_d$

$$\frac{F}{F'} = - \Pi g_a \Pi g_d = - \Pi g_a g_d.$$

Mais dans le cas d'une face sphérique ou plane $g_a g_d = \frac{n}{n'}$,

$$\frac{F}{F'} = - \prod \frac{n}{n'} = - \frac{N}{N'},$$

N et N′ étant les indices des milieux extrêmes.

Le théorème est donc démontré, qu'il n'y ait que des réfractions ou qu'il y ait en même temps des réflexions.

THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA POLARISATION ROTATOIRE NATURELLE DES CORPS TRANSPARENTS (¹);

PAR M. D. GOLDHAMMER.

1. Supposons les deux milieux transparents isotropes : l'inférieur, doué de la polarisation rotatoire, le supérieur un non conducteur ordinaire, séparés par le plan yz; il se propage dans le milieu supérieur ($x > 0$) de droite à gauche, dans le plan xy, une onde plane, polarisée rectilignement. On reçoit une onde réfléchie et deux ondes réfractées, dont les directions de propaga-

(¹) *Voir* page 205 de ce Volume la première Note de M. Goldhammer sur le même sujet.

tion font des angles ψ, ψ_v, ψ_1, ψ_2 avec la direction des x positifs.

Les équations différentielles du problème [équation (16) de la première Note] sont satisfaites si l'on pose

$$
(21)\quad\left\{
\begin{array}{llll}
u = FS; & v = GS; & w = HS; & S = e^{2\pi i\left(\frac{x\cos\psi + y\sin\psi}{L} - \frac{t}{T}\right)},\\
u_v = F_v S_v; & v_v = G_v S_v; & w_v = H_v S_v; & S_v = e^{2\pi i\left(\frac{x\cos\psi_v + y\sin\psi_v}{L} - \frac{t}{T}\right)},\\
u_1 = F_1 S_1; & v_1 = G_1 S_1; & w_1 = H_1 S_1; & S_1 = e^{2\pi i\left(\frac{x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1}{L_1} - \frac{t}{T}\right)},\\
u_2 = F_2 S_2; & v_2 = G_2 S_2; & w_2 = H_2 S_2; & S_2 = e^{2\pi i\left(\frac{x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2}{L_2} - \frac{t}{T}\right)},\\
\multicolumn{4}{c}{L = \mathfrak{v}T, \qquad L_1 = \mathfrak{w}_1 T, \qquad L_2 + \mathfrak{w}_2 T,}
\end{array}\right.
$$

$\mathfrak{v}$ étant la vitesse de la lumière dans le milieu supérieur et $\mathfrak{w}_1$ et $\mathfrak{w}_2$ définies par les relations (18), d'où il suit

$$
(22)\quad\left\{
\begin{array}{l}
\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}\left(1 + \frac{\pi}{T\mathfrak{w}^3}p'\right), \qquad \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}\left(1 - \frac{\pi}{T\mathfrak{w}^3}p'\right),\\
2\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2.
\end{array}\right.
$$

Pour le rayon incident on peut encore poser

$$
(23)\qquad f' = f'' = \phi = 0;
$$

mais pour les autres on a satisfait les équations (7), (11), (12), (15), en posant

$$
(24)\quad\left\{
\begin{array}{llll}
f''_v = 0; & f'_v = -\frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}; & \phi_v = i\mathfrak{J}_v e^{i\Psi_v}; & \Psi_v = 2\pi\left(\frac{x\cos\theta_v + y\sin\theta_v}{l_v} - \right.\\
f''_1 = 0; & f'_1 = -\frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}; & \phi_1 = i\mathfrak{J}_1 e^{i\Psi_1}; & \Psi_1 = 2\pi\left(\frac{x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1}{l_1} - \right.\\
f''_2 = 0; & f'_2 = -\frac{1}{\mathfrak{v}_0^2}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}; & \phi_2 = i\mathfrak{J}_2 e^{i\Psi_2}; & \Psi_2 = 2\pi\left(\frac{x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2}{l_2} - \right.\\
\multicolumn{4}{c}{l_v = l_1 = l_2 = \infty.}
\end{array}\right.
$$

Les équations (8) et (16) donnent en outre

$$
(25)\quad\left\{
\begin{array}{l}
G = -F\cot\psi, \quad G_v = -F_v\cot\psi_v, \quad G_1 = -F_1\cot\psi_1, \quad G_2 = -F_2\cot\psi_2.\\
H_1 = \frac{i}{\sin\psi_1}F_1, \qquad H_2 = -\frac{i}{\sin\psi_2}F_2.
\end{array}\right.
$$

2. Il suit enfin des conditions à la surface en premier lieu

$$
(26)\qquad \frac{\sin\psi}{L} = \frac{\sin\psi_v}{L} = \frac{\sin\psi_1}{L_1} = \frac{\sin\psi_2}{L_2} = \frac{\sin\theta_v}{l_v} = \frac{\sin\theta_1}{l_1},
$$

d'où l'on conclut immédiatement que

$$(27)\qquad \psi_v = \pi - \psi, \qquad \frac{\cos\theta_v}{l_v} = +i\frac{\sin\psi}{L}, \qquad \frac{\cos\theta_1}{l_1} = \frac{\cos\theta_2}{l_2} = -i\frac{\sin\psi}{L}.$$

On vérifiera aisément que de seize conditions de continuité (§ 3 de la première Note), il ne nous reste que sept équations différentes, c'est-à-dire, pour $x = 0$, on a

$$U + U_v = U_1 + U_2, \qquad V + V_v = V_1 + V_2, \qquad W + W_v = W_1 + W_2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V_v}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W_v}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial x};$$
$$f_v = f_1 + f_2; \qquad u + u_v = u_1 + u_2,$$

ce qui donne d'après (6), (24), (26), (27)

$$\begin{aligned}
&F + F_v = F_1 + F_2 + 2\pi i\frac{\sin\psi}{L}(\mathfrak{I}_v + \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2),\\
&G + G_v = G_1 + G_2,\\
&H + H_v = H_1 + H_2,\\
&(G - G_v)\frac{\cos\psi}{L} = G_1\frac{\cos\psi_1}{L_1} + G_2\frac{\cos\psi_2}{L_2} + 2\pi i\frac{\sin^2\psi}{L^2}(\mathfrak{I}_v + \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2),\\
&(H - H_v)\frac{\cos\psi}{L} = H_1\frac{\cos\psi_1}{L_1} + H_2\frac{\cos\psi_2}{L_2},\\
&\mathfrak{I}_v = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2,\\
&(F + F_v)\frac{1}{L^2} = F_1\frac{1}{L_1^2} + F_2\frac{1}{L_2^2}.
\end{aligned}$$

3. En éliminant $\mathfrak{I}_v$ et $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$, on remarquera qu'en vertu de l'équation (25) la première des équations reçues est identique avec la dernière, et l'on aura en tout quatre relations

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned}
&F + F_v = F_1\frac{L^2}{L_1^2} + F_2\frac{L^2}{L_2^2},\\
&G + G_v = G_1 + G_2,\\
&H + H_v = H_1 + H_2,\\
&(H - H_v)\frac{\cos\psi}{L} = H_1\frac{\cos\psi_1}{L_1} + H_2\frac{\cos\psi_2}{L_2}.
\end{aligned}\right.$$

Le nombre des équations est ainsi précisément égal à celui des inconnues.

Il est évident, en outre, que Q, R sont continus, ainsi que les

composantes de la force magnétique ([1])

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\mathfrak{v}_0}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\mathfrak{v}_0}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{\mathfrak{v}_0}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Nous avons toutes les conditions du problème satisfaites ([2]) et les équations (28) nous donnent, en posant

$$(29) \qquad F = \sin\psi \sin\omega, \qquad G = -\cos\psi \sin\omega, \qquad H = \cos\omega;$$

ω étant l'azimut de la polarisation du rayon incident, et

$$(30) \quad \begin{cases} F_v = F'_v + iF''_v, & F_1 = F'_1 + iF''_1, & F_2 = F'_2 + iF''_2, \\ G_v = G'_v + iG''_v, & G_1 = G'_1 + iG''_1, & G_2 = G'_2 + iG''_2, \\ R_v = F_v\cos\psi + G_v\sin\psi, & R_1 = F_1\cos\psi_1 - G_1\sin\psi_1, & R_2 = F_2\cos\psi_2 - G_2\sin\psi_2 \end{cases}$$

$$(31) \quad \begin{cases} R'_v = \sin\omega \dfrac{\left[\begin{array}{l} \quad\sin(\psi+\psi_2)\sin(\psi-\psi_1)\cos(\psi+\psi_1) \\ +\sin(\psi+\psi_1)\sin(\psi-\psi_2)\cos(\psi+\psi_2) \end{array}\right]}{\Omega}, \\ R''_v = \cos\omega \dfrac{\sin 2\psi \sin(\psi_1-\psi_2)\cos(\psi_1+\psi_2)}{\Omega}, \\ H'_v = -\cos\omega \dfrac{\left[\begin{array}{l} \quad\sin(\psi+\psi_2)\sin(\psi-\psi_1)\cos(\psi-\psi_2) \\ +\sin(\psi-\psi_1)\sin(\psi-\psi_2)\cos(\psi-\psi_1) \end{array}\right]}{\Omega}, \\ H''_v = \sin\omega \dfrac{\sin 2\psi \sin(\psi_1-\psi_2)}{\Omega}, \\ R'_1 = 2\cos\psi \sin\omega \dfrac{\sin\psi_1 \sin(\psi+\psi_2)}{\Omega}, \\ R''_1 = -2\cos\psi\cos\omega \dfrac{\sin\psi_1 \sin(\psi+\psi_2)\cos(\psi-\psi_2)}{\Omega}, \\ H'_1 = 2\cos\psi\cos\omega \dfrac{\sin\psi_1\sin(\psi+\psi_2)\cos(\psi-\psi_2)}{\Omega}, \\ H''_1 = 2\cos\psi\sin\omega \dfrac{\sin\psi_1\sin(\psi+\psi_2)}{\Omega}, \end{cases}$$

---

(1) α, β, γ (en mesure électromagnétique) de Maxwell.

(2) Cela n'est pas toujours le cas. Par exemple dans la théorie de la polarisation rotatoire magnétique de M. Fitzgerald (*Phil. Trans.*, t. CLXXI, p. 691), on reçoit une condition à la surface impossible.

(31 *suite*)
$$\left\{\begin{aligned}
R'_2 &= 2\cos\psi\sin\omega\,\frac{\sin\psi_2\sin(\psi+\psi_1)}{\Omega},\\
R''_2 &= 2\cos\psi\cos\omega\,\frac{\sin\psi_2\sin(\psi+\psi_1)\cos(\psi-\psi_1)}{\Omega},\\
H'_2 &= 2\cos\psi\cos\omega\,\frac{\sin\psi_2\sin(\psi+\psi_1)\cos(\psi-\psi_1)}{\Omega},\\
H''_2 &= -2\cos\psi\sin\omega\,\frac{\sin\psi_2\sin(\psi+\psi_1)}{\Omega},\\
\Omega &= \sin(\psi+\psi_1)\sin(\psi+\psi_2)[\cos(\psi-\psi_1)+\cos(\psi-\psi_2)].
\end{aligned}\right.$$

4. Le rayon réfléchi est polarisé elliptiquement et sa phase $\Delta_v - \delta_v$ est définie par les relations

(32)
$$\left\{\begin{aligned}
\tang\delta_v &= \frac{R''_v}{R'_v} = \cot\omega\sin2\psi\,\frac{\sin(\psi_1-\psi_2)\cos(\psi_1+\psi_2)}{\left[\begin{array}{l}\sin(\psi+\psi_2)\sin(\psi-\psi_1)\cos(\psi+\psi_1)\\ +\sin(\psi+\psi_1)\sin(\psi-\psi_2)\cos(\psi+\psi_2)\end{array}\right]},\\
\tang\Delta_v &= \frac{H''_v}{H'_v} = -\tang\omega\sin2\psi\,\frac{\sin(\psi_1-\psi_2)}{\left[\begin{array}{l}\sin(\psi+\psi_2)\sin(\psi-\psi_1)\cos(\psi-\psi_2)\\ +\sin(\psi+\psi_1)\sin(\psi-\psi_2)\cos(\psi-\psi_1)\end{array}\right]}.
\end{aligned}\right.$$

Pour l'incidence normale, $\psi = \psi_1 = \psi_2 = \pi$ et l'on a simplement

$$\tang\delta_v = \cot\omega\,\frac{\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2-1},\qquad \tang\Delta_v = -\tang\omega\,\frac{\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2-1};$$

$$R_v^2 = \sin^2\omega\left[\frac{N_1N_2-1}{(N_1+1)(N_2+1)}\right]^2+\cos^2\omega\left[\frac{N_2-N_1}{(N_1+1)(N_2+1)}\right]^2,$$

$$H_v^2 = \sin^2\omega\left[\frac{N_2-N_1}{(N_1+1)(N_2+1)}\right]^2+\cos^2\omega\left[\frac{N_1N_2-1}{(N_1+1)(N_2+1)}\right]^2.$$

N_1 et N_2 étant généralement extrêmement peu différents (¹), le rayon réfléchi ne diffère guère du rayon de polarisation rectiligne réfléchi par un corps transparent ordinaire.

Les formules (31) pour l'onde réfléchie sont identiques avec celles de la théorie de M. Voigt (²); pour les ondes réfractées nos expressions sont très peu différentes de celles de M. Voigt. Cependant, pour arriver à ces résultats, M. Voigt a dû avoir eu recours à une condition extraordinaire à la surface de séparation de deux

(¹) Pour le quartz $\frac{N_1-N_2}{2(N_1N_2-1)}$ n'est que $\frac{1}{11000}$.

(²) Voigt, *Wied. Ann.*, t. XXI, p. 532; 1884.

milieux, qu'il nomme *principe de Kirchhoff dans une forme modifiée.*

La théorie électromagnétique, comme nous l'avons vu, nous conduit aux résultats tout à fait conformes à l'expérience sans aucune admission, qui ne soit pas nécessaire strictement, pour l'explication même des phénomènes considérés.

SUR LA CONSTANCE DE L'ÉQUIVALENT ÉLECTROCHIMIQUE;

PAR M. MAURICE COUETTE.

Le nombre a d'équivalents déplacés par le passage de l'unité de masse électrique dans un électrolyte donné ne dépend pas de la température. Ce fait incontesté est généralement admis comme un résultat de l'expérience. Nous allons en montrer la raison théorique.

Le principe de l'équivalence peut être appliqué de deux manières différentes aux piles hydro-électriques :

1° On imagine dans un même circuit une pile de force électromotrice E et un moteur magnéto-électrique, dont on règle le travail extérieur de façon que la force électromotrice développée par l'induction diffère infiniment peu de $-E$. Dans ces conditions, l'intensité du courant est infiniment petite et l'effet Joule négligeable. On a alors

$$\frac{1}{J}\,dT + dQ = \frac{1}{J}\,E\,dm - (P\,dm + C\,d\theta).$$

E dm est le travail extérieur accompli par le moteur, pendant le passage de la masse électrique dm.

P dm est la quantité de chaleur prise aux corps extérieurs par la pile, pendant le passage de dm, à température constante.

C $d\theta$ est la quantité de chaleur absorbée par la pile quand sa température s'élève de $d\theta$, en l'absence de tout courant.

La condition d'intégrabilité donne

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{E}{J} - P\right) = -\frac{\partial C}{\partial m}.$$

2° On imagine un circuit de résistance totale R, ne contenant pas de moteur; la quantité définitive de chaleur qu'un courant d'intensité I, passant dans le circuit, verse au dehors pendant une seconde est

$$\frac{RI^2}{J} - PI.$$

D'après le deuxième principe de la Thermochimie, corollaire du principe de l'équivalence, cette quantité de chaleur est la même qu'aurait dégagée la réaction chimique accomplie, sans circuit extérieur, sur la même quantité de matière, c'est-à-dire sur aI équivalents des substances qui forment la pile; soit donc γ la quantité de chaleur dégagée pour un équivalent, nous aurons

$$\frac{RI^2}{J} - PI = a\gamma I$$

ou

$$\frac{E}{J} - P = a\gamma. \tag{2}$$

La combinaison de (2) avec (1) donne

$$\frac{\partial(a\gamma)}{\partial\theta} + \frac{\partial C}{\partial m} = 0. \tag{3}$$

Soit dx le nombre d'équivalents déplacés par dm, on a

$$dx = a\,dm.$$

et alors (3) peut s'écrire

$$\gamma\frac{\partial a}{\partial\theta} + a\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} + \frac{\partial C}{\partial x}\right) = 0. \tag{4}$$

Appliquons encore une fois le deuxième principe de la Thermochimie en prenant, pour état initial de la pile, la température θ avec x équivalents déjà déplacés; pour état final, la température $\theta + d\theta$ avec $x + dx$ équivalents déplacés. Passons d'un état à l'autre : 1° par une réaction isotherme suivie d'une élévation de température; 2° par l'ordre inverse. Nous aurons l'égalité

$$\gamma\,dx - \left(C + \frac{\partial C}{\partial x}dx\right)d\theta = -C\,d\theta + \left(\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial\theta}d\theta\right)dx$$

ou, en simplifiant,

$$-\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial\gamma}{\partial\theta}.$$

L'équation (4) se réduit alors à

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} = 0.$$

C. Q. F. D.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY;

T. XLIX. (Suite.)

W. BRENNAND. — Observations photométriques sur le Soleil et le ciel, p. 255.

Dans des observations faites à Dacca, dans le Bengale oriental, en 1861-1866, et répétées à Milverton, dans le Somersetshire, pendant ces deux dernières années, M. Brennand a étudié, pour les diverses hauteurs du Soleil, l'action de ce dernier sur du papier sensibilisé exposé normalement aux rayons solaires, ainsi que les lois de la distribution du pouvoir actinique dans le ciel. Il prenait du papier photographique ordinaire sensibilisé et comparait l'action chimique du Soleil à celle d'une bougie en prenant comme unité d'action chimique la coloration produite à une distance de 1 pouce de la mèche de la bougie après la combustion de 100 grains de matière (ce qui durait environ quarante-sept minutes). Les observations étant relatives, les résultats étaient les mêmes avec des papiers différents.

Il trouva que l'action chimique du Soleil est la même à toutes les heures du jour et en toutes saisons; elle est également la même en Angleterre et à Dacca.

Des observations faites avec l'*actinomètre-mitrailleuse*, instrument construit spécialement pour ces recherches, montrent qu'il y a dans le ciel un point d'intensité minimum à 90° du Soleil et dans le plan de symétrie, c'est-à-dire dans le plan vertical qui passe par le Soleil et qui partage à chaque instant, en deux parties exactement semblables, la portion visible du ciel.

Si i_α représente l'intensité pour une hauteur α du Soleil, l'intensité lumineuse du ciel, en un point à $\theta°$ du Soleil, est donnée par l'expression

$$i_\alpha \operatorname{cosec} \theta.$$

La valeur i_α cosée θ donne très exactement l'intensité lumineuse en chaque point de tout grand cercle dont la distance au Soleil, mesurée sur ce cercle, est de θ°.

Pour toutes les hauteurs du Soleil, l'action chimique du ciel est minimum en tous les points d'un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne qui joint son centre à celui du Soleil.

W. RAMSAY. — Considérations sur les solutions, p. 305.

L'auteur rappelle l'analogie signalée par le professeur O. Masson, à l'Association australienne pour l'avancement des Sciences, entre la manière dont se comporte un liquide en présence de sa vapeur et la manière dont se comportent deux dissolvants capables de se dissoudre mutuellement. La courbe représentative d'un liquide et de sa vapeur, avec son inflexion au point critique, ressemble à la courbe de solubilité avec son inflexion au point critique de dissolution, ce qui prouve que les deux phénomènes sont essentiellement de même nature.

M. Ramsay applique ces considérations à l'explication des phénomènes qui se présentent dans la sursaturation et dans l'état sirupeux ou visqueux.

W. CASSIE. — Effet de la température sur l'indice de réfraction de certains liquides, p. 343.

L'auteur a déterminé les variations, avec la température, de l'indice de réfraction et de la capacité inductive spécifique d'un certain nombre de corps. Le Tableau suivant montre les résultats obtenus à des températures variant entre 16° et 40° C. La dernière colonne donne les résultats obtenus par MM. Dale et Gladstone.

	Variation pour 1° C.		
	de la capacité inductive spécifique.	de l'indice de réfraction.	de l'indice de réfraction (Dale et Gladstone).
Térébenthine.......	0,0012	—0,0003	—0,0003
Sulfure de carbone..	-0,004	—0,0006	»
Glycérine...........	0,006	—0,0002	—0,00018
Benzoline	0,0006	—0,00037	—0,00037
Benzine	0,0014	—0,00043	—0,00042
Paraffine....	0,0023	—0,00017	»

G. HIGGS. — Les composés bisulfurés du bleu d'alizarine et de la céruline comme sensibilisateurs des rayons de faible réfrangibilité, p. 345.

En employant des plaques sensibilisées avec des composés bisulfurés de l'alizarine bleue et de la céruline, composés dont il indique d'ailleurs le mode de préparation, l'auteur a pu photographier la région de la raie A du spectre solaire. Il a ainsi obtenu des raies qui n'avaient jamais été décrites; ces raies s'étendent jusqu'à λ 8400 dans l'infra-rouge.

ROBERTS-AUSTEN. — Sur certaines propriétés des métaux au point de vue de la loi de périodicité, p. 347.

Dans un précédent Mémoire ([1]), l'auteur a étudié l'effet de 0,2 pour 100 environ d'impuretés sur les propriétés mécaniques de l'or; il a trouvé que les métaux qui diminuent la ténacité et l'extensibilité de l'or ont des volumes atomiques plus élevés que celui de ce dernier métal, tandis que les métaux qui augmentent ces propriétés ont, ou le même volume atomique, ou des volumes atomiques plus petits. Il y avait cependant exception pour l'aluminium et le lithium. M. Roberts-Austen s'est alors proposé de vérifier si le refroidissement d'une masse d'or contenant de l'aluminium ne présente pas certaines particularités et, en particulier, si, comme le montrent les expériences récentes d'Osmond ([2]), un métal pur peut exister sous deux formes moléculaires distinctes et si le passage de la modification ordinaire à la modification allotropique est facilité ou retardé par la présence d'impuretés.

L'auteur s'est servi du pyromètre thermo-électrique de M. Le Chatelier; il a trouvé que, le point de solidification de l'or étant 1045°, la présence de 0,5 pour 100 de plomb abaisse ce point d'environ 7°,5 C. Avec 0,47 pour 100 d'aluminium la masse d'or ne se solidifie complètement qu'à 900° C.

Dans le but de rechercher si l'abaissement du point de solidification de l'or concordait avec les résultats de Raoult sur l'abais-

([1]) *Philosophical Transactions*, p. A. 349; 1888.

([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 346; 1890.

sement du point de solidification des solutions, il a déterminé la chaleur de fusion de l'or qu'il a trouvée égale à 16,33. Dès lors, l'abaissement $\delta\theta$ du point de solidification de l'or dû à la présence de 1 atome d'impureté dans 100 atomes d'or doit être égal à 10°,6 C.

L'expérience n'a pas vérifié ce résultat et n'a donné qu'un abaissement de 5°,2 en moyenne.

Il est à remarquer que l'argent, dont le volume atomique est le même que celui de l'or, peut être ajouté à ce dernier dans des proportions variant de 0,1 à 4 pour 100 sans abaisser le point de solidification de la masse.

J.-A. MAC WILLIAM. — Nouveau réactif pour l'albumine et les autres matières protéiques, p. 368.

M. Mac William a examiné l'action de l'acide salicyl-sulfonique sur l'albumine naturelle et les albumines dérivées, la globuline, la fibrine, sur les protéines et les peptones. Il a également utilisé cet acide à la recherche des subtances protéiques dans l'urine.

Il est arrivé à cette conclusion que l'acide salicyl-sulfonique est probablement le réactif le plus délicat et le plus précis des substances protéiques en solution.

A. MALLOCK. — Mesure du module de Young pour les cristaux, p. 380.

L'auteur, au moyen d'un appareil avec lequel on peut opérer sur de petits échantillons, a déterminé le module de Young pour un certain nombre de corps et notamment pour quelques cristaux. La Table suivante donne les valeurs qu'il a obtenues en unités C.G.S.

Acier	$2,311 \times 10^{12}$
Fer forgé	1,868
Platine	1,754
Fonte	1,608
Cuivre	1,218
Laiton	1,130
Cobalt	$8,895 \times 10^{11}$
Aluminium	6,025

Bismuth	2,87
Plomb	1,87
Zinc 9,7 à	6,1 × 10^{10}
Escarboucle (1)	2,430 × 10^{12}
Escarboucle (autre échantillon)	2,372
Béryl (1)	2,076
Tourmaline (2) (*a*)	1,294
Topaze enfumée (1) (*a*)	1,207
Fluorine (3)	1,200
Fluorine (4)	1,185
Topaze jaune (1)	1,130
Topaze jaune (1)	9,515 × 10^{11}
Topaze jaune (1) (*b*)	8,80
Tourmaline (2) (*b*)	8,135
Quartz (5)	7,46
Verre blanc dur	6,96
Agate	6,381
Pierre blanche d'Arkansas (6)	5,83
Sélénite (7)	5,505
Flint très lourd	5,165
Marbre bleu	3,20
Marbre blanc	1,1

J.-E. KEELER. — Sur les principales lignes du spectre des nébuleuses, p. 399.

Dans le but de rechercher si la ligne principale des nébuleuses coïncide avec le bord de la bande de magnésium en λ5006,4, M. Keeler a comparé la troisième ligne de la nébuleuse d'Orion avec la ligne H_β de l'hydrogène. Il a trouvé que la position normale de la ligne principale des nébuleuses correspond à λ5005,93 avec une erreur probable de 0,03. La position de la bande de la magnésie sur la même échelle est en λ5006,36; elle diffère de 0,43 de la position normale de la ligne nébuleuse.

(1) La position des faces du cristal employé par rapport aux axes cristallographiques n'est pas connue. Les spécimens marqués (*b*) sont à angle droit de ceux qui sont marqués (*a*).

(2) Cristal noir de l'Oural, (*a*) section parallèle aux faces du prisme, (*b*) section perpendiculaire aux faces.

(3) Parallèle à la diagonale du cristal cubique.

(4) Parallèle aux faces du cube.

(5) Parallèle aux faces du prisme.

(6) Pierre onctueuse à grain très fin.

(7) Parallèle au clivage principal.

L'auteur conclut que la ligne principale des nébuleuses et la bande du magnésium ne coïncident pas.

Sir W. THOMSON. — Sur l'action électrostatique exercée par les écrans constitués par des grilles, des plaques, des réseaux ou des plaques perforées de substances conductrices, p. 405.

L'auteur a étudié, au point de vue mathématique, l'action exercée par une plaque plane homogène et percée de trous sur la force électrique d'un champ uniforme dont les lignes de force sont perpendiculaires à la plaque.

Il a également étudié les actions exercées par un écran percé de trous, mais dont la surface n'est pas plane sur un champ uniforme et par un écran perforé, plan ou non, sur la force électrostatique de tout corps électrisé donné.

Sir W. THOMSON. — Actions exercées par les écrans sur des forces électriques et magnétiques variables, p. 418.

Un écran formé d'une substance imparfaitement conductrice exerce la même action qu'un écran métallique semblable si on lui en donne le temps; mais son action est diminuée si l'on fait usage d'une force électrostatique variant rapidement. Dès lors il est facile de voir que l'action d'un écran sur des forces électrostatiques qui varient périodiquement sera d'autant plus faible que la variation sera plus rapide. On peut le démontrer expérimentalement en interposant entre les disques d'un électromètre une feuille de papier en communication métallique avec le disque dont une partie est mobile.

L'attraction disparaît quelques secondes après qu'une différence de potentiel a été établie et maintenue constante entre le disque attiré et le plateau métallique opposé si le papier et l'air qui l'entoure sont dans dans des conditions hygrométriques ordinaires; mais si l'instrument est employé à mesurer des variations rapides de différences de potentiel, l'action exercée par le papier diminue lorsque la fréquence des variations augmente. Avec du papier blanc ordinaire, l'action est nulle s'il y a de 50 à 100 variations par seconde.

L'action exercée par un écran sur une force magnétique variable est soumise à une loi opposée. L'auteur n'étudie que les corps dépourvus de susceptibilité magnétique et possédant une conductibilité électrique plus ou moins grande. Quelque parfaite que soit la conductibilité électrique d'un écran, il est sans action sur une force magnétique constante; mais si la force magnétique varie, il se produit dans l'écran des courants induits qui tendent à diminuer la force magnétique dans l'air du côté opposé à l'aimant. Plus la conductibilité électrique de la substance est grande, plus son action en tant qu'écran est considérable pour une même fréquence de variations; et, pour une même substance, son action comme écran est d'autant plus parfaite que les variations sont plus rapides.

Une feuille de cuivre qui enveloppe un électro-aimant forme un écran presque parfait si son épaisseur est de $2^{cm},75$ au moins et si le courant est renversé quatre-vingt fois par seconde.

Sir W. Thomson a fait construire un appareil dans lequel la variation de la force magnétique est produite par la rotation d'un aimant renfermé dans une enveloppe de cuivre. En donnant à l'aimant une vitesse de rotation suffisamment grande, on a pu annuler les variations de la force magnétique dans l'espace extérieur à l'enveloppe de cuivre et produire une force constante comme celle qui serait due à un aimant idéal.

AYRTON et SUMPNER. — Mesure de l'énergie d'un courant électrique, p. 424.

La méthode employée est indépendante de toute hypothèse sur la nature du courant et n'exige qu'un voltmètre ordinaire à courants alternatifs.

Une résistance sans induction bc de r ohms est réunie en série avec le circuit ab dont on veut mesurer l'énergie. Soient V_1, V_2 et V les indications que donne un voltmètre placé successivement entre a et b, entre b et c et entre a et c. Le travail fourni à ab est donné par la relation

$$W = \frac{1}{2r}(V^2 - V_1^2 - V_2^2). \tag{1}$$

En effet, si v, v_1, v_2 représentent les valeurs instantanées de la différence de potentiel entre a et b, b et c, a et c au même in-

stant t, on a

$$v = v_1 + v_2. \tag{2}$$

Si α représente l'intensité en ampères du courant qui passe dans le circuit au temps t, αv_1 représente l'énergie en watts fournie à ab à cet instant.

Mais $\alpha = \frac{v_2}{r}$, puisque la résistance bc ne possède pas d'induction. On a donc

$$w = \frac{v_1 v_2}{r}.$$

En élevant au carré la relation (2), on obtient

$$v^2 = v_1^2 + 2 v_1 v_2 + v_2^2,$$

d'où

$$w = \frac{1}{2r}(v^2 - v_1^2 - v_2^2).$$

Par conséquent

$$\int_0^T w\,dt = \frac{1}{2r}\left(\int_0^T v^2\,dt - \int_0^T v_1^2\,dt - \int_0^T v_2^2\,dt\right).$$

ou

$$W = \frac{1}{2r}(V^2 - V_1^2 - V_2^2).$$

Si la résistance r n'est pas connue, on peut intercaler entre b et c un ampèremètre et substituer à r dans la formule (1) la valeur $\frac{V_2}{A}$ dans laquelle A représente l'indication de l'ampèremètre.

Cette méthode s'applique à un arc à courants alternatifs et montre que celui-ci agit comme une résistance à induction en supposant que l'on emploie des charbons homogènes et un arc sifflant. Dans ce cas, on obtenait pour V_1, V_2 et V les valeurs 55^{volts},60 et 108 volts, et la différence de phase entre le courant et la différence de potentiel, calculée d'après la formule

$$\cos\varphi = \frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2 V_1 V_2},$$

donnait

$$\varphi = 40^\circ 20'.$$

Le travail de MM. Ayrton et Sumpner renferme en outre quelques considérations sur la meilleure valeur à donner à la résistance sans induction. René Paillot.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Philosophical Magazine.

5e série, t. XXXIV; juillet 1892.

CARL BARUS. — *Les constantes de fusion des roches ignées.* Première Partie. *La mesure des températures élevées*, p. 1.

H. BRAGG. — *La méthode du* « milieu élastique » *pour traiter les théorèmes électrostatiques*, p. 18.

SPENCER UMFREVILLE PICKERING. — *La chaleur de dissolution des gaz dans les liquides*, p. 35.

CAREY LEA. — *Rupture de la molécule des sels haloïdes d'argent sous l'action des forces mécaniques*, p. 46.

L. NATANSON. — *Sur les probabilités des configurations moléculaires*, p. 51.

H.-A. ROWLAND. — *Notes sur la théorie du transformateur*, p. 54.

RICHARD INWARDS. — *Sur un appareil à tracer les courbes paraboliques*, p. 57.

L. RAYLEIGH. — *Sur la question de la stabilité de l'écoulement des fluides*, p. 59.

C. CHREE. — *Rotation des cylindres solides élastiques de section elliptique.* Première Partie, p. 70.

W. POLE. — *Quelques données inédites sur le daltonisme*, p. 100.

F.-J. SMITH. — *Une pompe à air et mercure, pour élever le mercure dans différentes espèces de pompes à mercure*, p. 115.

E. HUGHES et WILSON. — *Action du gaz acide chlorhydrique desséché sur le spath d'Islande*, p. 117.

BOSANQUET. — *Sur le calcul du pouvoir éclairant sur les hydrocarbures et leurs mélanges*, p. 120.

SUR UNE NOUVELLE DÉTERMINATION DU RAPPORT v ENTRE LES UNITÉS C.G.S. ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉLECTROSTATIQUES (1);

PAR M. HENRI ABRAHAM.

Le rapport v est le nombre d'unités C.G.S. électrostatiques contenues dans l'unité C.G.S. électromagnétique de quantité d'électricité.

Nous avons adopté, pour ces recherches, la méthode qui consiste à mesurer en unités électromagnétiques (c_1) la capacité d'un condensateur de forme connue. La mesure électrostatique c de la même capacité est calculée, au moyen des dimensions linéaires du condensateur : le rapport $\frac{c}{c_1}$ est égal à v^2.

Pour avoir c_1 on compare le courant discontinu i_2, que l'on obtient en déchargeant périodiquement le condensateur, avec un courant continu i_1, provenant de dérivations prises sur le circuit de la pile de charge. Ces deux courants passent respectivement dans chacun des fils d'un galvanomètre différentiel : on résout l'équation d'équilibre par rapport à l'inconnue c_1.

La disposition de l'expérience est donnée par la *fig.* 1. Le courant principal I, fourni par une pile P (80 éléments Gouy bien isolés), passe par un renverseur à 6 godets, circule dans un mégohm D suivi de la résistance C qui vaut 500^{ω}, et retourne à la pile. L'un des fils du galvanomètre $G_1 = 6000^{\omega}$, shunté par la résistance variable A, fait partie d'un circuit qui, contenant encore un lest B de 19000^{ω}, est en dérivation sur C. Le second fil, $G_2 = 7000^{\omega}$, est traversé n fois par seconde par le courant de décharge que lui envoie le commutateur. Les communications sont établies de telle sorte que le potentiel prendra alternativement sur l'armature inductrice du condensateur les valeurs qu'il possède aux deux pôles de la pile, dont l'un est le sol.

Si k est le coefficient du différentiel ($i_1 = ki_2$), la condition d'équilibre est

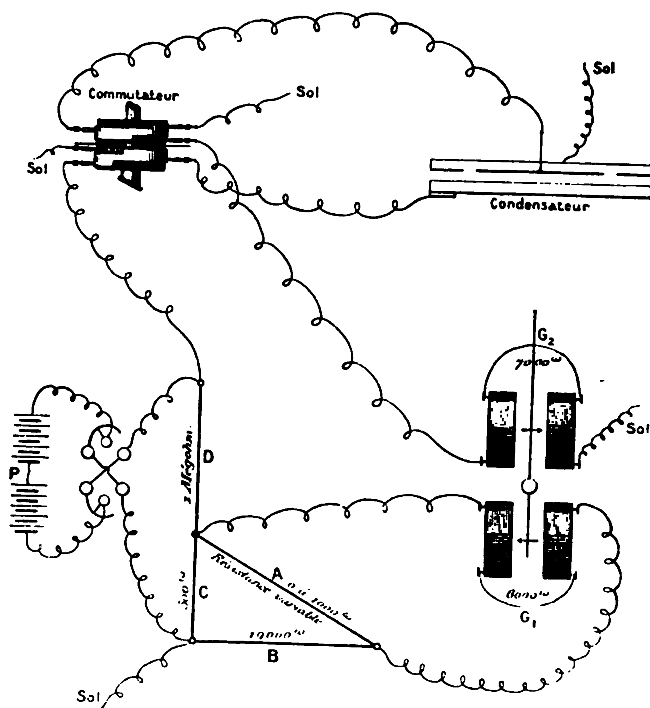
$$\frac{AC}{A(G_1+B+C)+G_1(B+C)}I = k\frac{nc}{v^2}(D+C)I,$$

(1) Extrait d'un Mémoire détaillé inséré aux *Annales de Chimie et de Physique*.

d'où v,

$$v = \sqrt{nck \frac{D+C}{C} \frac{A(G_1 + B + C) + G_1(B+C)}{A}}.$$

Fig. 1.



Mais il faut tenir compte de la capacité parasite du commutateur et des fils de communication. Soit A′ ce que devient A lorsque le commutateur fonctionne *à vide* (condensateur supprimé), la formule corrigée sera

$$v = \sqrt{nck \frac{D+C}{C} \frac{[A(G_1 - B + C) + G_1(B+C)][(A'(G_1 + B + C) + G_1(B+C)]}{(A - A')G_1(B+C)}}$$

et la correction est légitime parce que l'effet perturbateur des fils est bien uniquement d'ajouter la charge induite qu'ils peuvent prendre à la charge induite, d'autre part, sur le collecteur.

Les mesures faites sont rapportées aux étalons C.G.S. :

Les dimensions linéaires du condensateur sont mesurées avec une machine à diviser étalonnée.

Les résistances sont comparées à l'ohm légal.

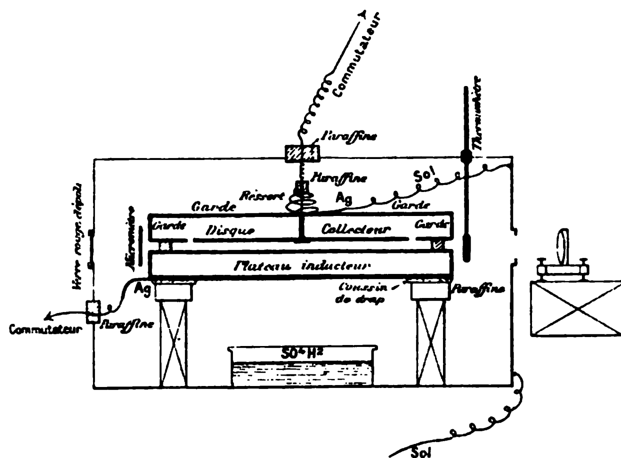
La période de rotation du commutateur est rapportée à la seconde d'une horloge astronomique réglée sur l'Observatoire.

Tout le circuit est rigoureusement isolé par des supports en paraffine. Le galvanomètre et les boîtes de résistances sont dans des enceintes protectrices de métal et de feutre (dont l'atmosphère est desséchée) qui les soustrayent presque complètement aux variations de température. Les divers appareils, qui ont des bornes en laiton, ne communiquent entre eux que par des fils de ce même alliage, afin d'éviter les forces électromotrices thermo-électriques.

Le condensateur.

C'est un condensateur à plateau avec anneau de garde. Il est placé dans l'atmosphère desséchée d'une enceinte métallique reliée au sol (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les surfaces conductrices sont constituées par l'argenture de deux dalles circulaires en glace de Saint-Gobain, épaisses de 23^{mm}, d'un diamètre de 35^{cm}. La totalité des surfaces, dessus, dessous et bords, est argentée, en sorte que le verre n'intervient pas dans

les phénomènes électriques et sert seulement de support rigide aux couches d'argent.

Avant l'argenture, les faces utiles des dalles ont été travaillées en verres d'optique, et les retouches ont été continuées jusqu'à ce qu'un sphéromètre qui donnait plus du micron ne décelât plus de défaut. On a alors argenté les glaces avec les mêmes précautions que pour les miroirs de télescopes, puis l'argent a été doucement poli (1).

Pour séparer le collecteur du système de garde, il a suffi de placer le plateau argenté sur une machine à diviser les cercles, et, avec un burin d'acier labourant l'argenture, on a creusé un sillon parfaitement circulaire mettant le verre à nu (2). Le trait obtenu s'est trouvé avoir juste $0^{mm},1$ de large.

Il n'y a pas de difficulté à prendre le contact avec le plateau inducteur ou avec le système de garde. Pour le collecteur, la dalle qui le porte est percée en son centre d'un trou de $2^{mm},5$ de diamètre évasé en cône vers la face travaillée. Un obturateur en argent le ferme exactement, traverse la dalle, et met ainsi le collecteur en communication avec les appareils de mesure.

Le plateau supérieur (*collecteur* et *garde*) est séparé de l'autre (*inducteur*) par trois rondelles en quartz de même épaisseur que l'on a soin de placer sous l'anneau de garde pour ne pas altérer la capacité utile.

Les résistances d'isolement du condensateur ont été trouvées supérieures à 8.10^{10} unités C.G.S électromagnétiques (80 milliards d'ohms).

Voici le procédé adopté pour la mesure de la distance des armatures.

Vis-à-vis de l'intervalle des plateaux est une lame de verre portant une graduation très délicatement graduée; et, par des procédés de

---

(1) M. Léon Laurent, le constructeur bien connu, a eu l'obligeance de comparer avec ses plans étalons deux des plans qui nous ont servi. Il les a trouvés l'un concave, l'autre convexe, mais applicables l'un sur l'autre à moins de $0^{\mu},6$ pour la partie utile. Les bords sont notablement moins bons.

(2) Quatre diamètres à 45° l'un de l'autre valent respectivement, à 20° :

$$21^{cm},8198;\quad 21^{cm},8190;\quad 21^{cm},8185;\quad 21^{cm},8179;$$

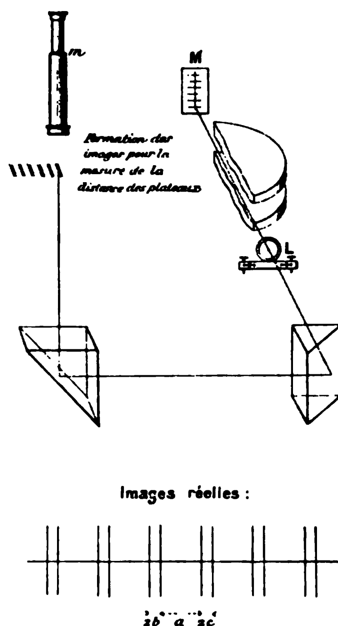
valeur moyenne adoptée :

$$21^{cm},8188.$$

réglage faciles à imaginer, son plan a été rendu perpendiculaire à la direction des plateaux et ses traits ont été placés parallèlement à cette direction.

Les disques argentés constituent d'excellents miroirs plans qui donnent une série d'images du micromètre. Les rayons lumineux, recueillis par une lentille L (*fig.* 3), sont renvoyés par deux

Fig. 3.



prismes à réflexion totale le long de la machine à diviser où ils viennent former des images réelles. Un microscope à réticule, porté par le chariot de la machine et qui donne le micron, permet de pointer ces images ([1]) et d'en mesurer les distances. On n'a, en fait, qu'à déterminer la fraction $\frac{b+c}{a}$ (*fig.* 3) dont l'écartement e des armatures diffère de la distance connue δ des traits du micromètre.

([1]) On a évité toute aberration chromatique dans l'ensemble des réfractions en n'opérant jamais qu'en lumière monochromatique (lampe à incandescence et verre rouge).

Le procédé de mesure donne une épaisseur moyenne; il tient compte des petites déformations d'ensemble que peuvent subir les plateaux, et la valeur de e est en définitive obtenue à un micron près; c'est-à-dire avec une précision d'environ $\frac{1}{7000}$, car e était voisin de 7^{mm}.

J'ai pu constater que la valeur de e pouvait varier de plusieurs microns d'un jour à l'autre, et surtout après chaque démontage. Il serait donc tout à fait illusoire de confondre la distance des armatures avec l'épaisseur des rondelles isolantes qui les séparent.

Avec la largeur attribuée à l'anneau de garde ($6^{cm},5$), et grâce à l'existence de l'argenture postérieure du disque de verre, la protection du collecteur est complète. On a, du reste, une précision suffisante en substituant, comme on le fait, au rayon du collecteur, ce même rayon augmenté de la demi-largeur du sillon isolant : la formule à appliquer est donc, sans aucune correction, la formule théorique

$$c = \frac{S}{4\pi e}.$$

Le commutateur.

Il est constitué par deux bagues métalliques échancrées, montées avec un certain relief sur un cylindre d'ébonite, qui tournent entre des frotteurs.

Ces frotteurs (*fig.* 4) sont des ressorts de laiton battu, très flexibles, avec contre-ressorts et étouffoirs en caoutchouc; les bagues mobiles les frôlent en tournant; sans vibrer, ils fléchissent d'une fraction de millimètre et le contact est établi.

Ces contacts sont établis dans l'ordre qui suit, afin d'éviter toute déperdition et toute action étrangère :

Le condensateur étant au sol,

1° *L'inducteur* est mis en communication avec la pile de charge; le collecteur, qui communique directement avec le sol, se charge par influence.

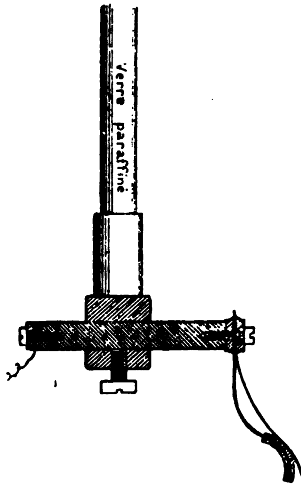
2° *Le collecteur* est mis en communication avec le sol, non plus directement, mais par l'intermédiaire du galvanomètre; il reste chargé.

3° *L'inducteur*, immédiatement après, est mis au sol; le collecteur se décharge dans le galvanomètre.

4° *Le collecteur* est mis directement au sol.

1° *bis*. *L'inducteur*, immédiatement après, est mis en communication avec la pile, etc.

Fig. 4.



De cette manière, le système de garde est au même potentiel que le collecteur; celui-ci n'est jamais isolé avec sa charge; on donne aux périodes de charge et de décharge la plus grande durée possible; le sol et les conducteurs voisins, enfin, sont sans influence.

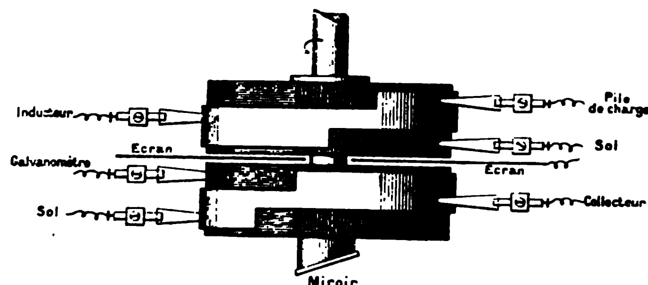
La *fig*. 5 représente le commutateur en projection horizontale, au début de la période de charge.

Un écran métallique, relié au sol, pénètre dans un profond sillon qui sépare les deux bagues du commutateur, et protège ainsi l'une d'elles contre les actions inductrices de l'autre (*fig*. 5). Les fils de communication sont aussi protégés par un dispositif semblable, et c'est ainsi que l'on a pu réduire les capacités parasites à n'être que le $\frac{1}{60}$ de la capacité principale.

La partie mobile du commutateur est montée directement sur l'axe d'une machine Gramme de un cheval.

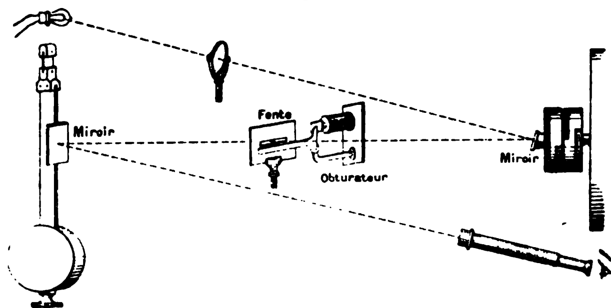
C'est en faisant appel à la méthode stroboscopique que l'on a pu régulariser et mesurer exactement la vitesse du commutateur.

Fig. 5.



Le dispositif adopté dérive de celui que M. Lippmann a proposé pour la comparaison directe de deux pendules. La représentation schématique en est donnée par la *fig*. 6. Une fente hori-

Fig. 6.



zontale est éclairée un instant à chaque tour du commutateur au moyen d'un miroir oblique qui tourne avec lui ; ces éclairs, réfléchis par un miroir plan fixé au pendule d'une petite horloge, sont observés à l'aide d'une lunette au point sur la fente. Lorsque le pendule oscille, les images de la fente se multiplient, et, à chaque oscillation, on en voit deux ou trois dans le champ. Ces images resteront immobiles si le commutateur fait un nombre entier de tours pendant une oscillation double du pendule (¹). On obtient cette immobilité en agissant à la main sur l'axe du moteur.

(¹) On a, en fait, deux séries d'images correspondant à l'*aller* et au *retour* du

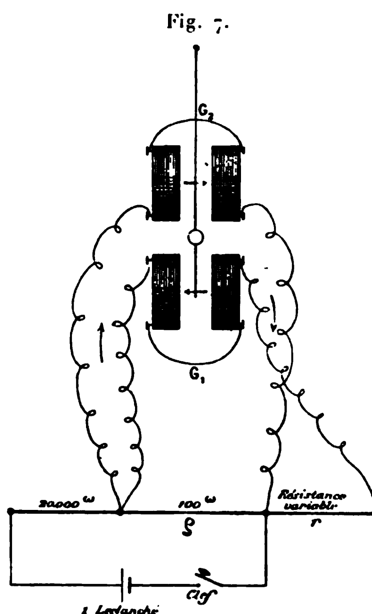
Pour avoir la valeur absolue de la période on compare, par enregistrement électrique, la seconde de la petite horloge avec celle d'une horloge astronomique. Quant au nombre entier de tours que fait le commutateur à chaque oscillation, il n'y a aucun doute à avoir sur sa valeur, puisqu'il reste toujours inférieur à 40 et qu'une erreur du $\frac{1}{40}$ est impossible.

On ne peut répondre de la vitesse du commutateur qu'au $\frac{1}{2000}$: et c'est principalement cela qui limite la précision de l'expérience et la concordance des résultats, comme le montrent les nombres que l'on trouvera plus loin.

Le galvanomètre.

Pour mesurer le coefficient k, on adopte le dispositif de la *fig.* 7,

Fig. 7.



où les deux circuits G_1 et G_2 sont montés en différentiel. Il est clair que si l'équilibre du galvanomètre n'est pas altéré en abais-

---

pendule, et qui semblent se déplacer en sens inverse : on facilite l'observation en supprimant l'une des séries. Pour cela, un obturateur, commandé par un pendule auxiliaire, vient masquer la fente pendant le *retour* du pendule.

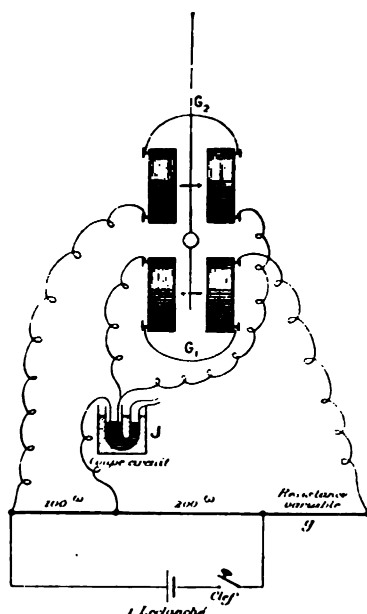
sant la clef, c'est que l'on a

$$k = \frac{G_2}{G_1 + r}.$$

On a observé que le coefficient k restait très constant, soit que l'on augmentât l'intensité des courants, en faisant varier ρ, soit que l'on substituât au courant continu, fourni par le Leclanché, le courant discontinu produit par les décharges périodiques d'un condensateur.

Il n'y a presque rien à changer pour passer de ce dispositif à celui qui nous donnera les valeurs des résistances G_1 et G_2 (*fig.* 8).

Fig. 8.



Les résistances marquées sur la figure 200^{ω} et 100^{ω} ont, en réalité, pour rapport 1,9969. On ajoute à G_1 une résistance variable g_1 pour conserver l'équilibre du galvanomètre lorsqu'on manœuvre le coupe-circuit J, après que l'on a abaissé la clef qui sert à fermer le circuit du Leclanché (lequel renferme encore une résistance de

20000^{ω}). On a alors

$$G_1 + g_1 = 1,9969\, G_2.$$

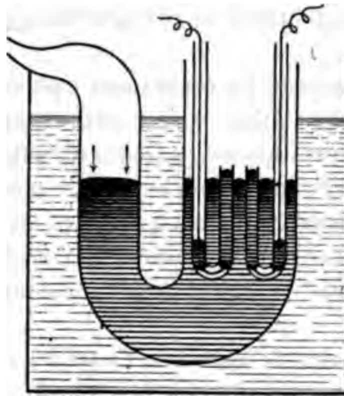
On répète la mesure en permutant les résistances G_1 et G_2; g_1 devient g_2 et l'on écrit

$$G_2 + g_2 = 1,9969\, G_1,$$

équations qui donnent G_1 et G_2.

Le coupe-circuit J a une disposition particulière que montre la *fig.* 9, afin d'éviter toute force électromotrice thermo-électrique.

Fig. 9.



Le circuit est fermé par un contact mercure-mercure entre les petites branches des tubes en J, qui communiquent électriquement avec le mercure des grandes branches par le moyen d'un fil de platine soudé dans le verre et traversant la courbure du J [1].

Les expériences.

Une expérience complète, avec toutes les mesures accessoires, dure près de deux heures, dont la moitié est employée à la partie principale : établir l'équilibre du différentiel pour les décharges périodiques du condensateur.

---

[1] J'emprunte la description de ce coupe-circuit à un travail antérieur, fait en collaboration avec M. Chassagny.

On commence par mettre en activité tout le dispositif, dynamo, pendules, lampes; et, quelques minutes après, on procède à un premier enregistrement du temps.

Ceci fait, on passe à l'expérience principale, que l'on répète deux ou trois fois, pour des vitesses variant du simple au double. Après chaque mesure, et pour la même vitesse, on fait la détermination des capacités parasites.

Aussitôt après, on enregistre à nouveau la seconde des deux horloges.

Sans rien arrêter, la dynamo et les lampes à incandescence continuant à fonctionner, on fait la détermination de la constante k du galvanomètre : on pourrait se tromper de $\frac{1}{5000}$ si l'on arrêtait la dynamo.

C'est maintenant le tour des résistances : on mesure d'abord G_1 et G_2; puis on compare l'ohm étalon aux résistances du pont à décades auxquelles sont rapportées toutes les autres; on détermine enfin la valeur du mégohm, et l'on en profite pour contrôler l'isolement du condensateur et du commutateur (¹).

Entre temps on a fait, à la machine à diviser, les pointés nécessaires pour déterminer la distance des armatures du condensateur.

Il a été fait cinq séries de mesures. Entre les séries II et III, on a démonté le commutateur; avant la série IV, on a visité le galvanomètre, retiré et retourné ses bobines, déréglé son horizontalité et changé tous les fils de communication. Pour la dernière série, on a utilisé un autre condensateur de même type que le nôtre, et qui avait été construit pour le laboratoire de M. Bouty. Ces dernières expériences ont été faites en doublant le voltage de la pile de charge.

Comme toutes ces mesures étaient concordantes, on s'en est tenu là.

(¹) En les mettant en dérivation sur le mégohm, dont la conductibilité ne doit pas être modifiée.

Résultats.

Voici maintenant le Tableau des résultats numériques obtenus :

SÉRIE I (27 avril 1892).....	$299,23.10^8$
	299,20 »
	299,13 »
SÉRIE II (28 avril 1892).....	299,18 »
	299,04 »
	299,24 »
SÉRIE III (30 avril 1892).....	299,29 »
	299,44 »
	299,35 »
SÉRIE IV (2 mai 1892)......	299,15 »
	299,40 »
	299,41 »
SÉRIE V (21 mai 1892)......	299,03 »
	299,06 »
Moyenne...............	**$299,2.10^8$**

Cette valeur me paraît devoir être exacte au $\frac{1}{1000}$.

REMARQUES SUR LES FORMULES DE FRESNEL RELATIVES A LA RÉFLEXION TOTALE;

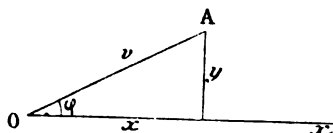
PAR M. P. JANET.

Tout le monde connaît la célèbre interprétation que Fresnel a donnée des formules ordinaires de la réflexion lorsque, par suite de la réflexion totale, ces formules donnent une valeur imaginaire à l'amplitude du rayon réfléchi. On présente d'ordinaire cette extension comme le résultat d'une intuition hardie et heureuse, sans grande justification *a priori*. Il est néanmoins possible de montrer que l'on peut arriver aux formules de la réflexion totale par le raisonnement suivant, qui conserve les principes essentiels de la théorie de Fresnel.

Admettons, d'une manière générale, que le phénomène de la réflexion altère à la fois l'amplitude et la phase du rayon incident.

Prenons pour unité l'amplitude, et pour origine des phases la phase du rayon incident au point d'incidence, et représentons à la manière de Fresnel la vibration réfléchie au même point. Nous obtenons ainsi (*fig.* 1) la droite OA dont la longueur v représente

Fig. 1.



l'amplitude et l'angle φ avec Ox la phase de la vibration réfléchie. Les deux inconnues du problème général de la réflexion sont alors v et φ.

Au lieu de ces inconnues, on peut évidemment en prendre deux autres, à savoir les coordonnées x et y du point A, qui sont liées aux précédentes par les formules

$$x^2 + y^2 = v^2, \tag{1}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi; \tag{2}$$

et l'on sait que la connaissance de ces deux coordonnées se ramène à la seule connaissance de la quantité imaginaire

$$z = x + y\sqrt{-1}. \tag{3}$$

Le problème de la réflexion revient donc à déterminer l'inconnue imaginaire z. Appelons i l'angle d'incidence : z est évidemment une fonction uniforme de i,

$$z = \varphi(i). \tag{4}$$

Appelons θ l'angle limite. La théorie et l'expérience nous apprennent que, pour $i < \theta$, la réflexion se fait sans changement de phase (¹); donc, pour ces valeurs, z est réel, et nous connaissons sa valeur explicite en fonction de i,

$$z = \psi(i). \tag{5}$$

(¹) Ou, ce qui revient au même, avec un changement de phase égal à π.

Par exemple, pour un rayon polarisé dans le plan d'incidence, on a

$$\psi(i) = \frac{n\cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}{n\cos i + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}.$$

L'inconnue z étant une fonction bien déterminée de i, les deux fonctions $\psi(i)$ et $\varphi(i)$ coïncident pour $i < \theta$. Or il résulte d'un théorème de Riemann que, si deux fonctions uniformes coïncident pour une suite continue de valeurs de la variable, elles coïncident pour toutes les valeurs de la variable. Donc, pour $i > \theta$, la fonction $\psi(i)$, qui devient alors imaginaire, continue à coïncider avec $\varphi(i)$ et, par suite, nous fait connaître explicitement z sous la forme

$$z = x + y\sqrt{-1}.$$

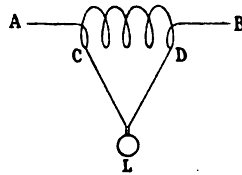
On en déduit les éléments de la vibration réfléchie par les formules (1) et (2) : ce sont précisément les formules de Fresnel relatives à la réflexion totale.

NOTE RELATIVE A QUELQUES EXPÉRIENCES SUR LES COURANTS A HAUTE FRÉQUENCE;

PAR M. P. JANET.

Parmi les remarquables expériences d'Elihu Thomson sur les courants oscillatoires à haute fréquence, l'une de celles qui ont le plus attiré l'attention consiste à illuminer une lampe à incandescence placée en dérivation sur quelques spires circulaires d'un fil épais de cuivre (*fig.* 1). J'ai essayé avec succès de répéter cette

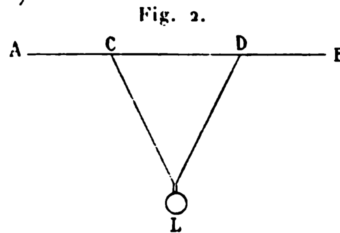
Fig. 1.



expérience en substituant à la spirale une simple tige de cuivre rectiligne (*fig.* 2); dans ces conditions, on obtient encore en général sans difficulté l'incandescence de la lampe. On est tenté, au

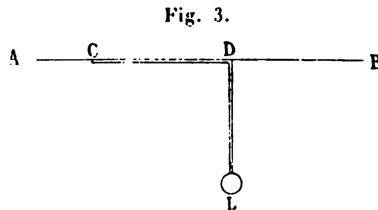
premier abord, d'attribuer cette dérivation du courant principal à travers la lampe à la même cause que dans le cas de la spirale, c'est-à-dire soit à la self-induction de la tige, soit à l'augmentation réelle de résistance de cette tige qui se produit pour ces fréquences élevées. En réalité, cette explication n'est pas exacte, et la véritable cause du courant qui passe alors dans la lampe est l'induction mutuelle qui se produit entre le conducteur AB et le circuit CLD (*fig.* 2).

Fig. 2.



Pour montrer qu'il en est bien ainsi, il suffit de ramener l'un des fils de dérivation contre le fil principal (*fig.* 3), en ayant soin

Fig. 3.

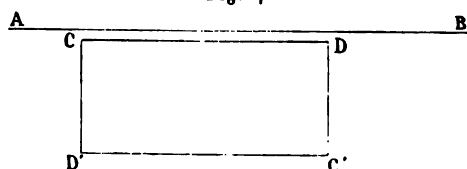


de l'isoler soigneusement dans un tube de verre de petit diamètre: dans ces conditions, la lampe s'éteint. Cela montre bien que la différence de potentiel efficace qui existe entre C et D est insuffisante pour donner un courant sensible dans le circuit de la lampe, et que la vraie cause du courant qui y prend naissance, dans le cas de la *fig.* 2, se trouve dans les variations périodiques du flux qui traverse le circuit CLD.

Comme conséquence de ces faits, on voit que l'emploi d'un électrodynamomètre, ou même d'un électromètre, placé en dérivation sur deux points d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant alternatif, peut amener des erreurs dans la mesure des différences de potentiel efficaces dès que la fréquence devient un peu élevée, les phénomènes d'induction mutuelle prenant alors une importance considérable.

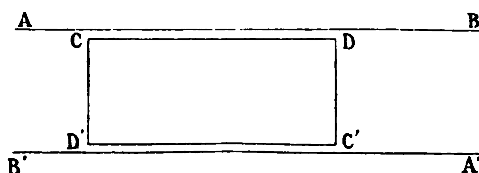
Ceci reconnu, on peut, dans les expériences précédentes, supprimer les communications C et D et approcher de la tige AB un rectangle CDC′D′ (*fig.* 4) muni d'une lampe L. La lampe s'allume encore.

Fig. 4.



Enfin, pour plus de symétrie, on peut intercaler le rectangle CD C′D′ entre les deux fils d'aller et de retour ABA′B′ (*fig.* 5), et

Fig. 5.



l'on retombe ainsi sur la disposition que M. Blondlot a employée dans ses belles recherches sur la propagation des ondulations électriques.

Il est possible de couper le circuit CDC′D′ par un condensateur (bouteille de Leyde); si les conditions de l'expérience sont convenables, la lampe L brille d'un éclat plus vif encore que précédemment. Cette disposition permet de montrer que ce circuit secondaire obéit aux lois connues de la résonance : en effet, si l'on dispose sur ce circuit une bobine dont on puisse faire varier à volonté le nombre des spires, c'est-à-dire la self-induction, on trouve que, la capacité du condensateur étant donnée (et inférieure à une certaine limite), l'éclat de la lampe passe par un maximum très net pour une certaine valeur de cette self-induction. Ce maximum a évidemment lieu au moment où la période de vibration propre du circuit secondaire est égale à la période du courant primaire. D'ailleurs, si l'on fait varier cette dernière en augmentant, par exemple, la capacité du condensateur dont on utilise les décharges, on trouve que, pour rétablir le maximum d'éclat de la

lampe, il faut faire varier dans le même sens soit la capacité, soit la self-induction du circuit secondaire.

Il semble donc que, pour cet ordre de fréquences, le circuit secondaire reprend son véritable rôle de résonateur que les expériences de de la Rive et Sarrasin lui ont fait perdre dans le cas des oscillations hertziennes. Il faut peut-être en conclure que les oscillations employées dans les expériences d'Elihu Thomson s'amortissent bien moins rapidement que celles de l'excitateur de Hertz.

DE L'INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LA TENSION SUPERFICIELLE DE L'EAU;

Par M. Boris WEINBERG.

La détermination de la tension superficielle des liquides a beaucoup intéressé les savants, mais les résultats de leurs recherches ont été bien contradictoires (¹).

Cette discordance des résultats peut être expliquée : 1° par l'insuffisance des méthodes mêmes d'observation et 2° par la contamination de la surface de l'eau.

Ce dernier fait, signalé pour la première fois par Marangoni (*Rendiconti dell' Acc. romana*, [4], t. V, p. 25) et confirmé ensuite par les expériences de Lord Rayleigh (*Phil. Mag.*, t. XXX, p. 386) et de Mlle Pockels (*Nature*, t. XLIII, p. 437), peut avoir une influence considérable sur la valeur de la tension superficielle. La plupart des observateurs ayant opéré avec une surface anomale, salie, il m'a semblé intéressant de déterminer la tension d'une surface normale, propre, c'est-à-dire d'une surface dont le nettoyage ultérieur n'augmente pas la tension. Les recherches de Mlle Pockels m'ont donné l'idée de recourir à la méthode d'arrachement, l'inconstance des résultats des autres observateurs (des différences

---

(¹) J'ai réuni presque toutes les déterminations de la constante capillaire de l'eau; le Tableau en est inséré dans le *Journ. de la Soc. phys.-chim. russe*, t. XXIV, p. 44-7, et le *Rép. de Phys.*, 1892, et peut servir comme exemple de cette discordance.

de 1 à 2 pour 100) m'ayant semblé provenir de la contamination de la surface.

L'objet arraché était un anneau en cuivre, muni de deux diamètres perpendiculaires et qui, à l'aide de trois vis, pouvait être placé horizontalement, pour que l'arrachement se produisît le long de toute la périphérie. Pour nettoyer la surface de l'eau, contenue dans une cuvette ($30^{cm} \times 10,5 \times 8$) en laiton nickelé, je me suis servi de deux petites pelles, dont la largeur était presque égale à celle de la cuvette, et le nettoyage s'est opéré de la manière suivante : j'apposais une des pelles à un bord de la cuvette et je la faisais glisser jusqu'au bord opposé. Grâce à cela, apparaissait d'un côté une surface fraîche et propre, tandis que la graisse s'écoulait par-dessus le bord opposé; puis, en laissant la pelle à sa place, je continuais le même procédé avec la seconde, ensuite de nouveau avec la première et ainsi de suite. Trois ou quatre renouvellements suffisaient pour mener à bout le nettoyage de toute une surface : le poids d'arrachement devenait alors bien constant et n'augmentait pas par suite du nettoyage ultérieur.

Si la surface de l'eau est surmontée d'une couche d'air de température inférieure, nous ne pouvons, premièrement, définir la température précise de la surface et, deuxièmement, l'eau de la surface, en se refroidissant et en descendant, peut produire des courants, qui sont à même d'influer sur le poids d'arrachement. Pour éviter cet inconvénient, la cuvette et l'anneau furent placés dans une caisse à double paroi, que je remplissais d'eau à la température voulue; pour empêcher des changements de température, la caisse fut entourée d'une couche de coton d'environ 5^{cm} d'épaisseur.

La cuvette, l'anneau, les thermomètres, etc. étaient lavés plusieurs fois avec de l'ammoniaque et de l'eau distillée et salissaient si peu la surface qu'il m'arrivait d'obtenir des résultats satisfaisants le lendemain même et sans recourir au nettoyage.

Afin de déterminer d'une manière précise et facile le moment de l'arrachement, j'ai appliqué à la balance la méthode du miroir à double suspension, à l'aide de laquelle on pouvait déterminer les déviations du fléau de $1''$, ce qui correspondait à $0^{mgr},05$.

Pour produire l'augmentation du poids d'une manière continue, je suspendis au-dessus du plateau de la balance un fil de cuivre

($1^{mm},19$ de diamètre), plongé dans un tube vertical, muni d'une échelle graduée en millimètres, et rempli d'eau. En la laissant couler, on découvrait le fil et l'on augmentait par cela même son poids d'une manière continue. Le niveau de l'eau indiquait le poids appliqué (1^{mm} de fil déplace $1^{mgr},112$ de l'eau).

Les résultats obtenus étaient assez constants : l'erreur moyenne était de 5^{mgr} ($\frac{1}{14}$ pour 100 de la grandeur mesurée) et les observations faites à la même température ne différaient même pas parfois de 1^{mgr}, et l'on pouvait déterminer les dixièmes de degré par le poids d'arrachement.

A l'aide de la méthode des moindres carrés, chaque série d'observations (faites avec la même eau, le même jour) était représentée par la formule

$$p = p_0 - \pi\tau = p_0(1 - \varepsilon'\tau),$$

où p désigne le poids d'arrachement à $\tau°$C., p_0 à 0°, π sa variation pour 1°, ε' son coefficient thermique. Les résultats sont exposés dans le Tableau I.

TABLEAU I.

Série.	p.	π.	$\varepsilon'.10^5$.	Erreur probable de p.	Erreur moyenne de p.	Nombre d'observations.	Intervalles de température.
	gr	mgr		mgr	mgr		
1...	7,670	18,0	235	0,5	1,4	7	34,2 — 31,6
2...	7,634	15,8	208	0,7	2,0	6	49,8 — 48,8
3...	7,779	19,1	220	1,3	10,7	56	49,8 — 43,6
4...	7,664	16,9	220	2,7	18,5	30	32,5 — 24,4
5...	8,100	32,9	407	0,5	3,0	47	29,0 — 28,1
6...	7,751	21,1	272	0,3	2,8	44	24,4 — 24,8
7...	7,686	18,3	238	0,3	1,0	11	22,9 — 21,9
8...	7,659	16,8	219	0,4	1,5	9	18,7 — 21,9
9...	7,708	17,2	223	1,3	3,8	14	28,1 — 23,5
10...	7,750	17,9	243	1,4	4,0	10	28,5 — 25,5
11...	7,867	20,2	257	1,5	10,0	32	74,0 — 66,2
12...	7,655	18,1	236	0,3	1,9	45	44,9 — 43,1
13...	7,670	16,6	216	0,4	3,2	83	46,8 — 36,5
14...	7,616	19,2	254	0,6	2,5	57	2,4 — 5,0
15...	7,612	16,9	222	0,4	3,4	59	4,2 — 20,2

Le *poids* de chaque détermination étant pris comme proportionnel au nombre des observations et inversement proportionnel

à leur erreur probable, nous obtenons

$$\pi = 17,32 \quad \text{et} \quad \varepsilon' = 0,002254,$$

d'où

$$p_0 = 7,684;$$

le calcul direct donne

$$p = 7,667.$$

(La 5ᵉ série est rejetée en vertu de la loi de Laplace.)

Mais, dans ce cas, le coefficient thermique se déduit de quelques observations faites dans un petit intervalle de température; afin de résumer toutes les observations embrassant un intervalle de 1° à 74°, j'ai calculé, à l'aide des données du Tableau I, p pour deux températures, que j'ai prises voisines des limites de la température de chaque série dans le but de ne pas extrapoler ces formules. De trente valeurs de p, qui n'étaient, au fait, que les valeurs moyennes de chaque série d'observations, et de trois valeurs, obtenues par des observations à la même température, j'ai obtenu les formules suivantes

$$\text{(I)} \qquad p_1 = 7,6299 - 0,015876\tau \text{ (1)} = 7,6299(1 - 0,0020879\tau),$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} p_2 = 7,6161 - 0,014601\tau - 0,00002262\tau^2 \\ \quad = 7,6161(1 - 0,0019171\tau - 0,000002970\tau^2); \end{cases}$$

le *poids* de chaque p était pris dans ces calculs proportionnel à la racine carrée du nombre des observations et inversement proportionnel à leur erreur probable; les *poids* des observations, faites avec une eau, qu'on avait gardée dans la cuvette un jour ou deux, furent encore diminués de quelques unités.

Les deux formules s'adaptent bien aux résultats des expériences, comme on peut le voir par le Tableau II.

---

(1) La variation du poids d'arrachement pour 1° est beaucoup moins considérable ici que celle des observations faites avec la même eau ($\pi = 15^{\text{mgr}},876$ et $\pi = 17^{\text{mgr}},32$); on pourrait plutôt craindre le contraire, car la plupart des observations (toutes les séries, à l'exception de 6, 8, 14 et 15) étaient faites pendant le refroidissement de l'eau et, dans ce cas, la contamination ainsi que la solution graduelle pourraient diminuer le premier membre de la différence $p_\tau - p_{\tau_1} = \pi(\tau - \tau_1)$ et non le second.

Tableau II.

t	p [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p − [illegible]	[illegible]	p − [illegible]
[illegible]	7,[illegible]	[illegible]	[illegible]	7,[illegible]	−13	7,[illegible]	— 4
[illegible]	7,[illegible]	[illegible]	[illegible]	7,[illegible]	— 3	7,[illegible]	— 2
[illegible]	7,[illegible]	[illegible]	[illegible]	7,351	−10	7,343	−12
[illegible]	7,[illegible]	[illegible]	[illegible]	7,[illegible]	−17	7,483	−13
[illegible]	7,[illegible]	[illegible]	7	7,360	−25	7,361	−24
14	7,[illegible]	[illegible]	5	7,344	−14	7,346	−12
[illegible]	7,[illegible]	[illegible]	7	7,328	−18	7,330	−16
20	7,284	[illegible]	8	7,312	−28	7,315	−31
22	7,[illegible]	7	11	7,281	— 4	7,284	— 1
22	7,[illegible]	8	7	7,281	— 7	7,284	— 4
23	7,265	7	11	7,265	0	7,262	— 3
23	7,312	9	3	7,265	−47	7,268	−44
24	7,242	4	1	7,250	−12	7,254	— 8
24	7,250	6	8	7,250	0	7,254	— 4
25	7,229	6	8	7,234	— 5	7,238	— 9
26	7,254	10	3	7,218	−36	7,222	−32
28	7,182	5	3	7,186	— 4	7,190	— 8
28	7,226	9	4	7,186	−30	7,190	−26
29	7,149	5	3	7,171	−22	7,175	−26
29	7,198	10	3	7,171	−27	7,175	−23
31	7,129	1	4	7,139	−10	7,143	−14
33	7,110	4	1	7,107	— 3	7,110	0
34	7,085	1	4	7,091	— 6	7,094	— 9
35	7,089	13	10	7,075	−14	7,078	−11
43	6,930	12	8	6,947	−17	6,946	−16
44	6,937	3	2	6,931	— 6	6,929	— 8
45	9,895	12	8	6,915	−20	6,912	−17
47	6,888	13	10	6,884	— 4	6,880	— 8
49	6,861	2	4	6,852	+ 9	6,846	+15
50	6,845	2	4	6,836	+ 9	6,829	+16
50	6,823	3	2	6,836	−13	6,829	— 6
66	6,561	11	2	6,582	−21	6,553	+ 8
74	6,399	11	2	6,455	−56	6,411	−12

L'erreur moyenne et l'erreur probable sont moins considérables pour la formule (II) que pour la formule (I) ($12^{mgr},5$ et $1^{mgr},09$ et $14^{mgr},0$ et $1^{mgr},12$).

Pour tirer de ces résultats les valeurs absolues, il faut connaître le périmètre et la section de l'objet arraché. Une faute dans le choix de sa forme ainsi que son manque de régularité m'ont ôté la

possibilité de déterminer α_0 et a_0^2 (1) avec une précision de plus de 1 pour 100.

Le poids d'arrachement est égal à la force nécessaire pour rompre la colonne soulevée suivant son périmètre, Pα, plus le poids de celle dont la hauteur est, selon Laplace, égale à $a = \sqrt{a^2}$, Q$a\sigma$; par conséquent,

$$p = \frac{P\sigma}{2} a^2 + Q\sigma a = P\alpha + Q\sqrt{2\sigma}\sqrt{\alpha}.$$

En connaissant p comme fonction de la température et en tenant compte de la dilatation de l'eau (σ) et du cuivre (P et Q), on peut déduire de ces formules α et a^2 comme fonctions de la température. De la formule (I) on tire

$$a^2 = 16,4(1 - 0,0021880\tau + 0,0000037519\tau^2),$$
$$\alpha = 8,18(1 - 0,0022051\tau)$$

et de la formule (II)

$$a^2 = 16,3(1 - 0,0019750\tau),$$
$$\alpha = 8,16(1 - 0,0020532\tau - 0,0000028432\tau^2).$$

Pour comparer les résultats de mes recherches à ceux des autres observateurs, j'ai étudié la bibliographie du sujet et j'y ai rencontré la discordance suivante : la plupart des auteurs regardent les variations de la constante capillaire comme une fonction linéaire de la température, les autres prennent celles de la tension superficielle pour une fonction linéaire, et Timberg (*Wied. Ann.*, t. XXX, p. 547) admet l'une et l'autre hypothèse, quoique ces quantités soient reliées entre elles par un facteur σ, dont les variations rappellent très peu une fonction linéaire. Quelques

(1) Nous employons les termes usuels : pour la constante capillaire

$$a_\tau^2 = a_0^2(1 - e\tau)(\text{mm.})^2;$$

pour la tension superficielle

$$\alpha_\tau = \frac{a_\tau^2 \sigma}{2} = \alpha_0(1 - \varepsilon\tau)\left(\frac{\text{mgr.}}{\text{mm.}}\right);$$

σ, densité.

auteurs donnent des formules paraboliques, notamment

Wolf..........	$a_\tau^2 = a_0^2(1 - 0,002011\tau - 0,00000416\tau^2)$
Dupré..........	$\alpha_\tau = \alpha_0(1 - 0,001370\tau - 0,0000035496\tau^2)$
Orbé (0°-8°)..	$\alpha_\tau = \alpha_0(1 - 0,0112\tau + 0,00364\tau^2)$.

Citons les résultats des meilleures recherches. La plus précise (l'erreur moyenne de $\frac{1}{30}$ pour 100) est celle de Brunner et indique une variation linéaire de la constante capillaire avec une petite convexité vers l'axe des abscisses :

Brunner..............	$e = 0,001868$ (1)	
Frankenheim..........	$e = 0,001822$ (2)	
»	$e = 0,001875$ (3)	
Sondhauss...........	$e = 0,001911$ (4)	
»	$e = 0,002039$ (5)	
Wolf.................	$e = 0,002011$ (6)	
»	$e = 0,001817$ (6)	
Boulyginsky..........	$e = 0,001980$ (7)	
Volkmann............		$\varepsilon = 0,001829$ (8)
Timberg..............	$e = 0,002252$	$\varepsilon = 0,002536$ (9)
»	$e = 0,002475$	$\varepsilon = 0,002732$ (9)
»	$e = 0,001951$	$\varepsilon = 0,002208$ (9)
Jager................		$\varepsilon = 0,00232$ (10)
Valeur moyenne.	$e = 0,002000$	$\varepsilon = 0,002325$

La formule (II) produisant une variation linéaire de a^2 et la valeur de α, qu'on en déduit, se réduisant à 0 pour 332° [température voisine de la température critique de l'eau, 365°, selon les dernières déterminations de Cailletet et Collardeau (*Comptes rendus*, t. CXIII, p. 1170)], nous lui donnons la préférence et obtenons les valeurs suivantes, approchant des valeurs moyennes

(1) *Pogg. Ann.*, t. LXX, p. 485.
(2) *Die Lehre der Cohäsion*, Breslau, 1835.
(3) *Pogg. Ann.*, t. LXXII, p. 177.
(4) *Diss. Inaug.* Vratislavial, 1841.
(5) *Pogg. Ann.*, Erg. Bd. VIII, p. 266.
(6) *Pogg. Ann.*, t. CII, p. 571.
(7) *Pogg. Ann.*, t. CXXXIV, p. 446.
(8) *Wied. Ann.*, t. XVII, p. 353.
(9) *Wied. Ann.*, t. XXX, p. 545.
(10) *Sitz. Wien. Acad.*, t. C, p. 258.

ci-dessus

$$e = 0{,}001975 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0{,}002254 \text{ (¹)}.$$

Les valeurs absolues (16,3) sont un peu trop grandes en comparaison des valeurs moyennes des observations dans les tubes capillaires (15,36) ou de toutes celles dont j'ai eu connaissance (15,40), mais cela dépend, peut-être, de la propreté de la surface de l'eau.

Pour conclure, je me fais un devoir agréable d'exprimer ma haute reconnaissance à M. le Professeur Borgmann et à M. Lermantoff, qui ont bien voulu m'aider de leurs conseils et de leurs indications utiles, ainsi qu'à mon camarade M. Blumenfeld, qui m'a prêté constamment son concours.

SUR L'EXISTENCE D'UN MAXIMUM DE POLARISATION;

PAR M. L. HOULLEVIGUE.

J'ai recherché comment variait la polarisation d'électrodes de platine immergées dans une solution de sulfate de cuivre, sous l'action de forces électromotrices voisines de celles pour lesquelles ce sel commence à s'électrolyser.

Voici le principe de la méthode employée :

Le courant fourni par deux Daniells au sulfate de zinc traverse une résistance constante de 11000$^{\omega}$ prise sur deux boîtes de 11000$^{\omega}$ chacune. Entre les deux bornes d'une de ces boîtes existe une différence de potentiel qu'on peut faire varier à volonté de 0^{volts} à 2^{volts},2. Un circuit comprend cette différence de potentiel E, un voltamètre V et une résistance R = 3900$^{\omega}$, sur laquelle est shunté un galvanomètre Thomson à double bobine et à fil fin. Une clef de court circuit C est installée de manière que, normalement, R et le galvanomètre soient en dehors du circuit. En appuyant sur C, le courant traverse R et G. V est un flacon de 300^{cc}, fermé par un bouchon en caoutchouc percé de trois trous. Un d'eux laisse passer un tube, communiquant avec une trompe à eau qui donne

---

(¹) Pour l'intervalle 0°-70°

un vide de 75^{cm} de mercure. Les deux autres trous sont traversés par des tubes en verre, portant des électrodes en platine de 10^{cq} de section.

On verse dans V 150^{cc} d'une solution de sulfate de cuivre normale ($31^{gr},5$ Cu par litre) on décime, on y plonge les électrodes nettoyées à l'acide azotique, chauffées au rouge et mises en court circuit, on fait le vide et on le maintient plusieurs heures, jusqu'à ce que les bulles gazeuses aient cessé de se dégager. Au bout de ce temps, on vérifie que les électrodes sont au même potentiel, en les plaçant sur le circuit du galvanomètre, qui doit rester au zéro; puis on procède à la graduation de celui-ci, en mettant V en dehors du circuit et déterminant les déviations δ qui correspondent à des résistances variables ρ' introduites en E.

On procédait alors à l'expérience proprement dite. Pour cela, on mettait V dans le circuit, et en E une résistance donnée ρ.

On maintenait C levée pendant 25^{m}, puis on l'abaissait; on notait la déviation, et l'on recommençait avec une résistance plus grande en E.

Soient E la force électromotrice primaire, p la polarisation en V, i l'intensité du courant. On a

$$E - p = i(R + \rho),$$

très sensiblement, en négligeant la résistance de V (10^{ω} au plus), vis-à-vis de $R + \rho$, dont la plus petite valeur a été 7000^{ω}.

Soit e la force électromotrice qui, dans l'expérience de graduation, donnait la même intensité et, par suite, la même déviation. On a

$$e = i(R + \rho').$$

De ces deux relations, on tire

$$p = E - e\frac{R + \rho}{R + \rho'}.$$

Il est à noter qu'on obtiendrait des résultats très défectueux si l'on ne laissait pas le courant passer pendant un certain temps (de 20^{m} à 30^{m}) dans l'électrolyte, car p est loin de prendre instantanément une valeur fixe, même dans des conditions où il n'y a sûrement pas électrolyse. Exemple :

Liqueur normale...... $\rho = 3000^{\omega}$, $E = 0^{v},6$, $t = 0^{\circ}$.

Temps.	p.
m	v
1	0,513
5	0,560
10	0,569
15	0,578
20	0,580
30	0,580

Voici maintenant les résultats numériques des expériences :

I. *Expériences faites à la température constante* 15° *du laboratoire, en faisant varier la concentration.* — p_n représente la polarisation pour la liqueur normale, p_d la même grandeur pour la liqueur décime.

ρ.	E.	p_n.	p_d.	$E - p_n$.	$E - p_d$.
ω	v	v	v	v	v
5000	1	0,924	0,963	0,076	0,037
5200	1,04	0,943	1,000	0,097	0,040
5400	1,08	0,971	1,017	0,109	0,063
5600	1,12	1,000	1,037	0,120	0,083
5800	1,16	1,013	1,052	0,147	0,108
6000	1,2	1,031	1,061	0,169	0,139
6200	1,24	1,042	1,065	0,198	0,175
6400	1,28	1,054	1,065	0,226	0,215
6600	1,32	1,061	1,063	0,259	0,257
6800	1,36	1,062	1,058	0,298	0,302
7000	1,4	1,058	1,050	0,342	0,350
7200	1,44	1,049	1,040	0,391	0,400
7400	1,48	1,034	1,025	0,446	0,455
7600	1,52	»	1,002	»	0,518
7800	1,56	0,981	0,989	0,579	0,571
8000	1,6	0,961	0,961	0,639	0,639
8200	1,64	0,926	0,924	0,714	0,711
8400	1,68	0,880	0,889	0,800	0,791

L'influence de la concentration paraît, d'après cela, très faible ou même nulle. La différence des valeurs de p_n et p_d tient sans doute à ce que les électrodes n'étaient pas rigoureusement dans le même état au début des deux expériences.

II. *Expériences faites avec la liqueur normale, en faisant varier la température.* — p_0 est obtenu en plaçant V dans la

glace fondante deux heures et demie avant le début de l'expérience; p_{98} est le résultat d'une expérience faite en plaçant V dans une marmite pleine d'eau bouillante à 98°,5; une demi-minute avant de faire une détermination, on arrêtait l'ébullition. Sans cette précaution, le galvanomètre ne prendrait pas une déviation fixe.

ρ.	E.	p_0.	p_{98}.	E — p_0.	E — p_{98}.
ω	v	v	v	v	v
3000......	0,6	0,580	0,318	0,020	0,282
3500......	0,7	0,675	0,376	0,025	0,324
4000......	0,8	0,774	0,446	0,026	0,354
4500......	0,9	0,874	0,507	0,026	0,393
5000......	1	0,966	0,530	0,034	0,471
5500......	1,1	1,037	0,548	0,063	0,552
6000......	1,2	1,089	0,559	0,111	0,641
6500......	1,3	1,118	»	0,182	»
7000......	1,4	1,126	0,512	0,274	0,888
7500......	1,5	1,107	0,490	0,393	1,010
8000......	1,6	1,106	0,426	0,494	1,174
8500......	1,7	1,066	»	0,634	»
9000......	1,8	0,947	0,313	0,853	1,487
9500......	1,9	0,803	0,275	1,097	1,625
10000......	2	0,649	»	1,351	»
10500......	2,1	0,504	»	1,596	»
11000......	2,2	0,376	»	1,824	»

Les courbes ci-jointes représentent les valeurs de p obtenues avec la liqueur normale, à 0°, 15° et 98°,5. Chaque millimètre correspond, en ordonnées et en abscisses, à $0^v,02$.

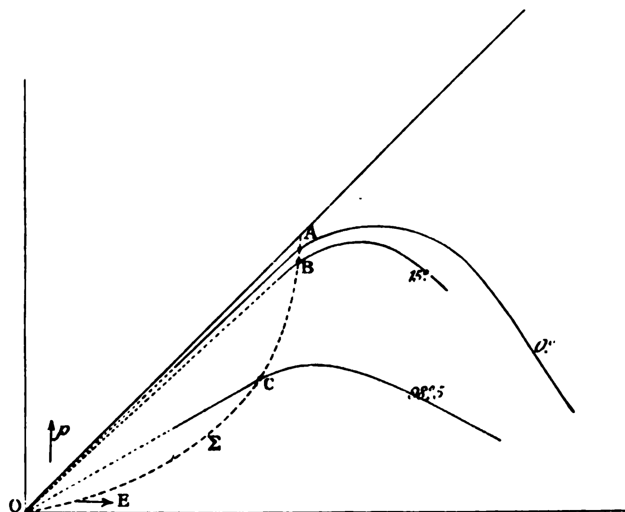
Elles mettent nettement en évidence l'existence d'un maximum de polarisation, maximum qui se produit dans le voisinage du point où l'électrolyse commence. J'avais déjà constaté ce phénomène en étudiant la polarisation des mélanges de sels. Il avait été également indiqué, mais sans explication, par M. Chaperon (*Journal de Physique*, 2e série, t. III), pour des électrodes de platine plongées dans l'eau acidulée et des lames de magnésium immergées dans une solution de potasse caustique. Le phénomène est donc général.

Il est probable que la présence de ce maximum et, par suite, la mauvaise détermination du point où l'électrolyse commence, tiennent à la raison suivante :

Le moment précis où l'électrolyse succède à la polarisation est

celui où la première molécule de cuivre se dépose à l'état libre sur l'électrode négative. Mais on sait que le dépôt métallique ne se fait pas instantanément sur toute la lame. En examinant celle-ci au microscope, elle paraît couverte d'une série de cristaux isolés, qui se développent séparément. Il en résulte que certaines parties

Fig. 1.



de la lame continuent à se polariser, tandis que d'autres sont déjà arrivées à l'état définitif qui caractérise l'électrolyse. Dans ce dernier état, p doit être plus petit, à cause de la présence du dépôt de cuivre dont la polarisation dans son sulfate est très petite. La valeur de p, donnée par l'expérience, n'est qu'une moyenne entre les valeurs de p relatives aux différents points de la lame. De là la continuité observée entre la polarisation et l'électrolyse, puisque la première continue sur certains points, alors que l'autre s'établit sur le reste de la lame.

Ce phénomène est analogue à celui qu'on observait en échauffant progressivement une grande masse liquide, mauvaise conductrice de la chaleur; dans certains points, il y aurait retard à l'ébullition, et dans d'autres points, où l'ébullition aurait lieu, la température redescendrait à une valeur fixe; de sorte qu'un thermomètre de grandes dimensions, donnant la température moyenne

de la masse, indiquerait des températures croissant progressivement, puis redescendant jusqu'à une valeur fixe atteinte quand tout le liquide serait en ébullition.

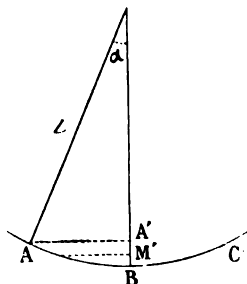
Il est probable, d'après cela, qu'on peut fixer le moment où l'électrolyse commence à la valeur de E, pour laquelle la courbe $y = p$ abandonne la direction rectiligne pour s'infléchir vers les abscisses. C'est ce qui a lieu aux points A, B, C des courbes ci-dessus. Le lieu des points A, B, C, ..., correspondant aux différentes températures, doit se rapprocher de la courbe Σ tracée sur la figure. Σ passe par l'origine, car l'électrolyse doit se produire pour une force électromotrice infiniment petite quand le sel est à la température de sa décomposition. (*Voir* POINCARÉ, *Thèse de doctorat.*)

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DU PENDULE SIMPLE, AVEC TERME CORRECTIF;

PAR M. A. LEDUC.

Les démonstrations classiques de la formule qui donne la durée des *petites oscillations* du pendule simple ont l'inconvénient de ne point faire connaître le degré d'approximation de cette for-

Fig. 1.



mule pour des oscillations d'amplitude donnée. Il faut avoir recours, pour obtenir la valeur du terme correctif, à la formule complète dont la démonstration ne peut pas être donnée à nos élèves des lycées.

Voici une démonstration qui n'exige que la connaissance des intégrales les plus simples.

Soient M la position du point matériel au temps t, A le point culminant de sa course. La vitesse acquise en M a pour expression

$$v = \sqrt{2g \times \mathrm{A'M'}},$$

et, si l'on désigne par a et x les arcs BA et BM, et par a' et x' les cordes qui les sous-tendent, on arrive facilement à l'expression

$$(1) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{l}(a'^2 - x'^2)}.$$

Si l'amplitude 2α est assez petite pour que α^2 *soit négligeable vis-à-vis de l'unité,* cette expression peut se remplacer par

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)},$$

qui conduit rapidement à l'expression de la durée de l'oscillation du pendule

$$(3) \qquad \theta = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Supposons maintenant l'amplitude plus grande, mais assez petite toutefois pour que α^4 *soit négligeable vis-à-vis de l'unité.*

On a

$$a = l\alpha,$$
$$a' = 2l \sin\frac{\alpha}{2}.$$

On peut, dans notre hypothèse, remplacer le sinus par les deux premiers termes de son développement, ce qui donne

$$a' = 2l\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{6.8}\right) = a\left(1 - \frac{\alpha^2}{24}\right),$$

puis

$$a'^2 = a^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right).$$

De même, et à plus forte raison, peut-on écrire, en désignant par β l'angle BOM,

$$x'^2 = x^2\left(1 - \frac{\beta^2}{12}\right),$$

et, par suite,

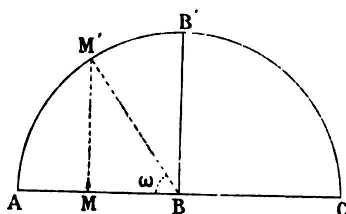
$$a'^2 - x'^2 = \alpha^2 - x^2 - \frac{a^2\alpha^2 - x^2\beta^2}{12} = (a^2 - x^2)\left(1 - \frac{a^2 + x^2}{12\,l^2}\right).$$

Enfin

$$(4)\qquad v = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)\left(1 - \frac{a^2 + x^2}{12\,l^2}\right)}.$$

Rectifions l'arc ABC et décrivons la demi-circonférence de rayon $BA = a$.

Fig. 2.



Déterminons la vitesse v' que doit posséder au temps t un mobile parcourant cette demi-circonférence, pour que sa projection sur AC se confonde constamment avec le mobile pendulaire M. On aura, en désignant par ω l'angle ABM,

$$(5)\qquad v' = \frac{v}{\sin\omega} = a\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{a^2 + x^2}{12\,l^2}\right)} = a\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{a^2 + x^2}{24\,l^2}\right).$$

Calculons la durée de l'oscillation, c'est-à-dire le temps qu'il faudra au mobile M' pour parcourir l'arc AB'C.

L'arc $a\,\delta\omega$ sera parcouru dans un temps $\delta\theta = \frac{a\,\delta\omega}{v'}$. On a donc

$$(6)\qquad \theta = \int_0^\pi \frac{a\,d\omega}{v'} = \int_0^\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{a^2 + x^2}{24\,l^2}\right)d\omega.$$

Observons que $x^2 = a^2\cos^2\omega = a^2\left(\frac{1 + \cos 2\omega}{2}\right)$, et comme $a = l\alpha$,

$$(7)\qquad \theta = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)\int_0^\pi d\omega + \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\alpha^2}{48}\int_0^\pi \cos 2\omega\,d\omega.$$

Or

$$\int_0^\pi d\omega = \pi \qquad \text{et} \qquad \int_0^\pi \cos 2\omega\,d\omega = 0.$$

D'où

$$\theta = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \tag{8}$$

Remarque. — On peut retrouver cette même formule par un procédé moins rigoureux, mais qui a l'avantage de n'exiger aucune intégration.

Partons de la formule (5) et remarquons que la vitesse v' n'augmente que très peu de A en B', passant de la valeur

$$v_1 = a \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right)$$

à la valeur

$$v_2 = a \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{24}\right).$$

Pour calculer le temps $\frac{\theta}{2}$, il suffirait de faire le quotient de l'espace $\frac{\pi a}{2}$ par la vitesse moyenne dans cet intervalle. Celle-ci nous est inconnue; mais on peut la remplacer, au moins à titre d'approximation, par la moyenne arithmétique

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = a \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{16}\right),$$

qui conduit précisément à la formule (8).

SUR UNE MANIÈRE FACILE DE FAIRE L'EXPÉRIENCE DU MARTEAU D'EAU;

PAR M. F. PARMENTIER.

Si l'on remplit avec de l'eau un tube de verre fermé par un bout et que par une forte secousse on projette en dehors du tube une portion du liquide, il se produit le choc sec de l'eau contre le fond du tube, dit *marteau d'eau*, et le fond du tube peut être brisé.

Voici ce qui se passe : en donnant la secousse (on opère comme quand on veut, par secousses, réunir les tronçons séparés du liquide d'une tige thermométrique), la colonne d'eau est projetée

violemment et tout d'une pièce vers l'orifice du tube et le vide se produit vers la partie fermée du tube. Une portion du liquide est rejetée en dehors du tube, mais une autre portion ne peut s'écouler et elle est brusquement repoussée en arrière par la poussée qu'exerce l'atmosphère. D'où le choc sec de l'eau contre le verre.

Les tubes qui conviennent le mieux sont ceux qui servent dans les laboratoires à l'écoulement des gaz (des tubes de 3^{mm} à 10^{mm} de diamètre) auxquels on donne une longueur d'environ 50^{cm}. On peut souder à ces tubes des ampoules, de façon à avoir des tubes affectant la forme de thermomètres; l'expérience marche très bien aussi. Des tubes trop larges ne conviennent pas, la colonne liquide s'y divise trop facilement.

De différents liquides essayés, l'eau nous paraît convenir le mieux : l'éther et l'alcool, par exemple, sont trop fluides et il y a rupture de la colonne; l'huile est trop visqueuse. Cependant, même avec ces liquides, on peut obtenir le choc sec contre le fond du tube.

Le fait que nous signalons est analogue à celui qui occasionne les coups de bélier dans certaines canalisations d'eau quand on ferme un robinet d'écoulement.

J. KLEMENCIC. — Ueber die Reflexion von Strahlen electrischer Kraft an Schwefel und Metalplatten (Réflexion des rayons de force électrique sur des plaques de soufre et de métal); *Wied. Ann.*, t. XLV, p. 62; 1892.

L'appareil se compose d'un inducteur primaire semblable à celui de Hertz; les boules sont recouvertes d'une feuille mince de platine; $\lambda = 66^{cm}$. Cet inducteur est placé au foyer d'un miroir parabolique de 75^{cm} de diamètre et 37^{cm} de profondeur. L'inducteur secondaire, placé au foyer d'un second miroir égal au premier, se compose de deux feuilles minces de laiton de 10^{cm} de large, 30^{cm} de long dont les bords, séparés par un intervalle de 3^{cm}, sont réunis par un élément thermo-électrique formé de deux fils fins de platine et de nickel. Un inducteur secondaire plus petit que le premier et construit de la même manière est placé comme terme de comparaison à l'intérieur du premier miroir.

La plaque de soufre est formée de douze briques réunies dans un cadre en bois mobile autour d'un axe vertical; les dimensions sont 120^{cm} de large, 80^{cm} de haut, 7^{cm} d'épaisseur; poids total 138^{kg}. Les sommets des deux miroirs sont sur une circonférence dont le centre coïncide avec celui de la plaque; l'axe du premier est fixe, celui du second peut prendre diverses inclinaisons. Les deux inducteurs secondaires sont réunis entre eux et au galvanomètre qui mesure ainsi la somme ou la différence des courants produits. La plaque métallique a des dimensions à peu près égales en hauteur et largeur à celles du soufre.

Les résultats principaux sont :

La plaque métallique refléchit fortement les rayons dont les vibrations sont parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence, les seconds avec une intensité plus grande que les premiers. Ce résultat semble dû à la forme de la plaque plutôt qu'à une propriété particulière du métal. La plaque de soufre réfléchit fortement les vibrations perpendiculaires au plan d'incidence, faiblement les vibrations parallèles. Cette dernière réflexion n'a lieu que sous un angle d'incidence inférieur à 60°; l'intensité augmente quand l'incidence diminue.

Les vibrations sur un rayon sont perpendiculaires au plan de polarisation et l'angle de polarisation du soufre (63°), déduit de l'indice de réfraction, est sensiblement égal à celui fourni par l'observation.

L'intensité transmise est inverse de celle réfléchie; la somme est plus grande que l'intensité du rayon incident. Ce résultat déjà signalé par Trouton s'explique probablement par les dimensions trop faibles des plaques et l'influence des bords.

Des expériences faites avec un réseau de fils métalliques écartés l'un de l'autre de $1^{cm},5$ et une plaque ronde de zinc de 80^{cm} de diamètre ont donné des résultats analogues.

C. Daguenet.

O. LEHMANN. — Beobachtungen über electrische Entladungen bei einer grossen Influens Machine (Décharges d'une grande machine d'influence); *Wied. Ann.*, t. XLIV, p. 642; 1891.

M. Lehmann a obtenu dans ses expériences des effets bien plus

intenses que ceux observés jusqu'à présent en se servant d'une machine de Töpler à 60 plateaux mobiles dans la cage de laquelle on pouvait augmenter à volonté la pression.

Il a d'abord repris les expériences de Holtz sur les ombres électriques projetées par un conducteur isolé sur un plateau positif et constaté qu'on peut les déformer par un courant d'air violent lancé perpendiculairement à la décharge. De plus, en remplaçant la pointe négative par un plateau recouvert de soie, il a observé une ombre projetée sur ce plateau aussi bien que sur l'autre; il propose, pour expliquer ce résultat imprévu, d'assimiler le mouvement des particules émises par les électrodes au transport des corps dans l'électrolyse.

On sait qu'un courant d'air déplace l'arc électrique, mais on pouvait penser que les étincelles passent trop vite pour être influencées. Cependant un courant d'air lancé sous une pression de 5 à 8 atmosphères, au voisinage de l'anode, supprime les étincelles et les remplace par des aigrettes; on peut même rapprocher davantage les boules sans que les étincelles passent.

Au contraire, le courant lancé dans le voisinage de la cathode ne produit aucun effet à moins qu'on n'intercale une corde mouillée ou une spirale métallique; dans ce cas, les étincelles sont facilement déviées et modifiées par le courant d'air. Si l'on remplace une des boules par une aiguille à coudre, on voit que le courant d'air fait un trou dans la décharge lumineuse; l'addition d'une bouteille de Leyde rend l'effet moins sensible et peut même le faire disparaître.

Un courant d'air très chaud lancé entre une boule positive et une pointe négative supprime les étincelles et les remplace par des aigrettes; si l'on renverse les pôles, on n'observe plus rien. Ce courant d'air lancé sur une pointe d'aiguille positive donne une flamme jaune qui rappelle l'étincelle d'induction. On peut encore constater que l'air chaud facilite la décharge positive sous forme d'aigrettes en prenant pour anode un réchaud rempli de charbons allumés; il est impossible d'obtenir d'étincelles, mais on observe un vent électrique violent qui souffle sur le charbon; au contraire, les étincelles passent très facilement si l'on intervertit la position des pôles.

Au moment de la décharge, la self-induction doit se développer

dans le circuit; on peut la constater par diverses expériences. On réunit les pôles de la machine, l'un à une planche d'au moins 3^m de long recouverte d'une feuille d'étain, l'autre à un fil fin tendu parallèlement à la planche à environ 15^m de distance ; ce fil s'entoure d'une lueur d'aspect différent suivant qu'il est positif ou négatif. Si l'on fait éclater une étincelle d'environ 2^{cm}, l'aspect change à chaque décharge : le fil s'il est négatif est enveloppé sur toute la longueur d'aigrettes lumineuses et s'il est positif il vibre rapidement par suite de l'attraction variable exercée par la planche. La self-induction dépend des conditions dans lesquelles se produit l'étincelle; si, en effet, on ajoute à la machine deux grandes bouteilles de Leyde dont les armatures extérieures sont réunies par un fil et qu'on approche de ce fil une spirale isolée, on obtient, entre les extrémités de cette spirale, des étincelles qui éclatent en même temps que celles de la machine. Un courant d'air froid ou chaud, entre les boules de l'excitateur, modifie les étincelles données par la spirale; l'interposition d'une flamme les fait disparaître.

On peut observer les mêmes effets avec des tubes vides sans électrodes. Pour cela, on donne au fil réunissant les deux armatures des bouteilles une forme circulaire et on l'interrompt en un point de façon à empêcher les étincelles de passer. Une boule de verre d'urane placée aux environs du fil s'illumine par influence du voisinage et surtout entre les extrémités du conducteur, et un tube de forme annulaire placé en dedans ne s'illumine que faiblement. Au contraire, si l'on réunit les deux bouts du conducteur, le tube devient fortement lumineux par induction et la boule reste obscure.

L'auteur en conclut que l'on pourrait peut-être utiliser cette propriété pour mesurer la chute du potentiel de la décharge comme il a déjà essayé de le faire (*Physique moléculaire*, t. II, p. 231).

C. Daguenet.

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-CHIMIQUE RUSSE.

Tome XXIII; 1891. (Suite.)

D. MENDELEEFF. — Changement de densité de l'eau par l'échauffement, p. 183-219.

En discutant les résultats et les méthodes de toutes les expériences connues sur la dilatation de l'eau entre $-10°$ et $+200°$C., l'auteur a constaté que leurs erreurs dépassent 0,00001 tandis que la précision des observations modernes est bien souvent notablement supérieure. La nécessité des nouvelles recherches que M. Mendeleeff a l'intention d'entreprendre est devenue urgente. En attendant, les résultats déjà connus sont bien représentés par la formule empirique suivante, proposée par l'auteur pour la densité S_t de l'eau à la température t :

$$S_t = 1 - \frac{(t-4)^2}{(A+t)(B-t)C} = 1 - \frac{(t-4)^2}{(94,1+t)(703,5-t)1,9}.$$

Les constantes A, B, C ont été calculées d'après les données les plus probables de S_t pour 20°, 30°, ..., 70° et 80°C., par la méthode des moindres carrés. Les valeurs de S_t extrapolées par cette formule pour les températures de 100° à 200°, comparées avec les résultats des expériences de M. Hirn, ont donné des différences moindres que les erreurs inhérentes à ces expériences.

En discutant les causes des erreurs de la détermination de la densité de l'eau, M. Mendeleeff remarque, entre autres, que l'on a trop peu apprécié l'influence de sa compressibilité. Par exemple, une variation de 0,1 atmosphère de pression barométrique produit une différence de $4 \cdot 10^{-6}$ dans la densité de l'eau à 100°C., une quantité qui est déjà à la limite de la précision d'une bonne observation. La compressibilité de l'eau, à diverses températures, peut être assez bien exprimée, d'après les résultats réunis de Regnault, Wertheim, Grassi, Pagliani et Vicentini, par la formule

$$\mu = 10^{-6}(50,49 - 0,348t + 0,0026t^2).$$

L'influence de la variation de la dilatation du verre avec la température n'est pas non plus négligeable, et c'est à tort que l'on a

considéré le coefficient de dilatation du verre comme constant dans les calculs de la densité de l'eau.

Les résultats des recherches de l'auteur sont réunis dans la Table suivante.

Poids spécifiques de l'eau sous la pression de 1 *atmosphère, calculés en prenant* $S_t = 1$ *pour* 4°C., *d'après la formule*

$$S_t = 1 - \frac{(t-4)^2}{1000\varphi t}, \quad \text{où} \quad \varphi t = 1,9(94,1+t)(703,5-t).$$

t° C.	Poids spécifiques calculés S_t.	Erreurs possibles dans l'état actuel des connaissances, en millionièmes.	Dérivée par rapport à la température $\frac{dS}{dt}$ pour chaque degré C. en millionièmes.	Dérivée par rapport à la pression $\frac{dS}{dp}$ pour chaque atmosphère, en millionièmes.	Valeurs de φt.	Volumes V_t.
− 10°	0,998281	∓ 49	+ 264	+54	114,01	1,001722
− 5	0,999325	∓ 29	+ 157	+52	119,94	1,000676
0	0,999873	∓ 12	+ 65	+50	125,78	1,000127
- 5	0,999992	± 3	— 15	+48	131,52	1,000008
10	0,999738	± 15	— 85	+47	137,17	1,000262
15	0,999152	± 26	— 148	+46	142,72	1,000849
20	0,998272	± 35	— 203	+45	148,18	1,001731
25	0,997128	± 43	— 254	+44	153,54	1,002880
30	0,995743	± 49	— 299	+43	158,81	1,004276
40	0,992334	± 53	— 380	+41	169,06	1,007725
50	0,988174	65	— 450	+40	178,93	1,011967
60	0,983356	72	— 512	+39	188,42	1,016926
70	0,977948	80	— 569	+39	197,53	1,022549
80	0,971996	92	— 621	+40	206,26	1,028811
90	0,965537	109	— 670	+41	214,61	1,035692
100	0,958595	±133	— 718	+42	222,58	1,043194
120	0,943314	±600	— 810	+43	237,38	1,060093
140	0,926211	650	— 901	+48	250,66	1,079667
160	0,907263	700	— 995	+55	262,42	1,102216
180	0,886393	750	—1093	+64	272,66	1,128167
200	0,863473	±800	—1200	+73	281,38	1,158114

P. BACHMETIEFF. — Recherches sur la cause de l'influence de l'aimantation sur les propriétés thermochimiques, p. 301-323.

W. Thomson a constaté déjà, en 1856, qu'un courant thermo-

électrique passe par la soudure chauffée du fer non aimanté au fer aimanté, tandis que le nickel produit dans les mêmes circonstances un courant de direction opposée. L'auteur cherche à prouver, par des expériences directes, que la cause de ce phénomène réside dans la dilatation ou la contraction par l'aimantation et non dans la rotation présumée des aimants moléculaires. Par exemple, un fil de fer de $0^{mm},8$, étiré par une tension de $8^{kg},5$ par millimètre carré, ne produit pas de courant avec le fer aimanté, et une tension plus grande donne de nouveau un courant, mais de direction contraire.

Réciproquement, le même fil non aimanté, étiré par la même force, produit le courant thermo-électrique maximum au contact avec du fer à l'état ordinaire, et cesse de produire un son quand sa bobine magnétisante est traversée par un courant alternatif. Au contraire, un fil de nickel aimanté et étiré a donné, au contact avec du nickel à l'état naturel, un courant thermo-électrique d'autant plus faible que son aimantation était plus intense.

S. MAKAROFF. — Sur quelques causes d'erreurs qui peuvent influencer la détermination des poids spécifiques de l'eau de mer à l'aide de l'aréomètre, p. 324-333.

Pour pouvoir donner des mesures précises, l'aréomètre ne doit présenter aucune variation de ses constantes, tant permanente que passagère. L'auteur a déterminé pour cette raison la perte de poids qu'un de ses aréomètres a subie après sept cents expériences suivies de lavages dans l'eau et d'essuyages à l'aide d'une serviette : cette perte a été trouvée égale à $0^{mgr},61$, le poids total de l'appareil étant 132^{gr}. Elle produit dans le poids spécifique une erreur ne dépassant pas 0,00001.

La lecture d'un aréomètre dans l'eau de mer purgée d'air n'a pas subi de variation appréciable quand il a été placé sous une cloche et la pression de l'air diminuée à 700^{mm}. Mais l'introduction d'un thermomètre dans le cylindre contenant l'eau et l'aréomètre a fait accroître son indication de 0,00017 dans un cylindre de 95^{mm}, et seulement de 0,00005 dans un cylindre de 140^{mm}. La variation diminue, quand on relève le réservoir du thermomètre, et redevient nulle quand on l'éloigne. Je présume que cette cause

inattendue d'erreur pourrait être attribuée à l'attraction entre le mercure du réservoir du thermomètre et le lest de l'aréomètre, la force observée étant de l'ordre de grandeur qui correspond à l'attraction universelle observée à l'aide des balances sensibles.

N. OUMOFF. — Complément à la loi de la diffusion des liquides, et quelques diffusiomètres nouveaux, p. 335-369.

L'équation $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, à l'aide de laquelle Fick exprime la relation entre la densité ρ de la solution au point x du diffusiomètre, la constante de diffusion μ et le temps t sont basés sur la supposition implicite qu'il n'y a pas de contraction pendant le mélange du dissolvant et de la matière transportée par la diffusion. Cette supposition est évidemment erronée dans un grand nombre des cas les plus ordinaires. En supposant qu'il y a contraction, que la masse ρ subit un accroissement $\mu\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\partial t$, et que l'unité de volume devient $1 - \Delta$, l'auteur parvient à l'équation

$$\frac{\Delta}{\partial t}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}.$$

qui se réduit à l'équation de Fick, si $\Delta = 0$.

Pour observer le progrès de la diffusion pendant une période de plusieurs jours sans interrompre l'expérience, l'auteur a construit ses divers *siphons à diffusion*. Dans sa forme définitive, l'appareil est formé d'un verre de 45^{mm} de diamètre contenant le liquide dont on veut observer la diffusion, et d'un tube vertical d'à peu près 2^{cm} de diamètre, prolongé jusqu'à la longueur totale de 50^{cm}, dont la partie capillaire est recourbée une fois en bas et une fois en haut. Tout ce tube en S était rempli d'eau et l'extrémité du tube capillaire bouchée avec de la cire; dans cet état, il a été placé verticalement, l'extrémité inférieure du gros tube plongeant dans le liquide, et débouché. A mesure que la diffusion se produit, la colonne du liquide dans le gros tube devient de plus en plus pesante, et la hauteur de la colonne liquide dans la partie ouverte du tube capillaire, soutenue par l'attraction capillaire, diminue. Des précautions ont été prises pour réduire à une quantité insignifiante l'évaporation du liquide et les variations brusques

de la température. D'après la théorie de Fick, aussi bien que d'après celle de l'auteur, le déplacement du niveau dans le tube capillaire, $h_0 - h$, pendant le temps t, est déterminé par une expression de la forme

$$h_0 - h = R\sqrt{\mu t},$$

mais la valeur de la constante R est

$$R = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma\sqrt{\pi}},$$

d'après la théorie de Fick (σ exprimant la densité du dissolvant), et

$$R = \frac{2(1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)})}{\varphi\sigma\sqrt{\pi}},$$

d'après celle de l'auteur. Pour y déterminer φ, il faut connaître la fonction $\phi = \frac{p\rho}{100}$, exprimant la relation de la densité ρ de la solution et de sa concentration p; la valeur de φ est

$$\varphi = \frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}}{\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \frac{\phi}{\rho}}.$$

L'auteur a déterminé par sa méthode les valeurs de μ suivantes, exprimées en $\frac{cm^2}{sec}$:

	NaCl.	H^2SO^4.	HNO^3.	HCl.	HBr.
μ.....	117.10^{-7}	225.10^{-7}	326.10^{-7}	400.10^{-7}	497.10^{-7}

P. BACHMETIEFF. — Propriétés thermo-électriques des divers amalgames, p. 370-400.

Ayant constaté l'influence de l'extension linéaire de fils des différents métaux sur leurs propriétés thermo-électriques, l'auteur a entrepris une série de recherches sur les amalgames, dans lesquelles les molécules des métaux sont évidemment soumises à une extension cubique par l'interposition des molécules de mercure. Les résultats ont été très divers : les amalgames de zinc, d'étain, de plomb, de cadmium et de cuivre ont donné en contact

avec le cuivre des forces thermo-électriques moindres que le mercure pur, et décroissantes à mesure que la quantité de métal dans l'amalgame augmente. Au contraire, l'amalgame de thallium donne un maximum de courant thermo-électrique quand sa teneur en thallium est de 4,7 pour 100 et celui de sodium quand il contient 1 pour 100 de ce métal. L'auteur a remarqué que l'amalgame de magnésium à 1,5 pour 100 et celui de cadmium à 13,4 pour 100 jouissent des propriétés thermo-électriques de ces métaux à l'état de pureté; il est probable que tous les autres métaux jouiront de la même propriété pour des teneurs plus grandes. Pendant toutes les expériences, une des soudures était à 0° et l'autre à 40° C.

N. HESEHUS. — Expériences expliquant la formation de quelques formes de grêlons, p. 401-409.

La possibilité même de la formation des grêlons cristallisés et de diverses formes bizarres au sein de l'atmosphère ayant été mise en doute par M. Schwedoff en 1880, l'auteur a eu l'idée d'entreprendre quelques expériences sur la solidification des gouttes d'eau et d'antimoine fondu, matière qui se dilate pendant l'acte de la solidification, de même que l'eau. Maintenant un bon nombre de formes diverses de grêlons ont été figurées en 1890 et 1891 dans le *Recueil météorologique* du professeur Klossowsky et la matière pour la comparaison ne manque plus.

Les formes sphéroïdales avec un appendice caudal se forment toujours quand le refroidissement des gouttes d'eau ou d'antimoine va plus vite du côté opposé à cet appendice. Un sphéroïde avec des fissures intérieures est le résultat d'un refroidissement uniforme, mais des protubérances cristallisées se forment aussi bien dans les gouttes d'antimoine que dans les grêlons naturels aux points où l'uniformité a été violée : la masse encore liquide perce en ces points l'enveloppe solidifiée et cristallise par l'expansion brusque. L'analogie entre les figures des diverses formes de grêlons et des gouttes d'antimoine, accompagnant le Mémoire de l'auteur, est assez frappante.

W. MICHELSON. — Sur la multiplicité des théories mécaniques des phénomènes physiques, p. 415-426.

Quelques idées sur ce sujet, émises par M. Poincaré dans l'Avant-propos de son livre : *Électricité et Optique,* ont incité l'auteur a approfondir la question. Il donne une démonstration mathématique générale de la proposition suivante : Si un groupe quelconque de phénomènes physiques peut être expliqué par le mouvement d'un système mécanique à forces conservatrices, il peut tout aussi bien être expliqué par le mouvement d'un nombre illimité de systèmes semblables, différant du premier par le nombre de degrés de liberté de ses mouvements et par le sens mécanique des paramètres expérimentaux. Le grand mérite de la théorie de Maxwell est déterminé par la circonstance qu'elle s'occupe directement des lois les plus générales, subsistant indépendamment de toute hypothèse partielle que l'on peut proposer pour l'explication plus détaillée des phénomènes.

N. SLOUGUINOFF. - Contribution à la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière, p. 427-429.

L'auteur donne une démonstration élémentaire de la formule exprimant l'intensité de la lumière réfléchie et réfractée, d'après les principes de Bosanquet, et remarque que, d'après cette formule, l'intensite de la lumière réfractée est proportionnelle au carré de l'amplitude, multiplié par l'indice de réfraction.

P. BACHMETIEFF. — L'influence de la compression longitudinale sur les propriétés thermo-electriques des fils metalliques, p. 430-435.

Les fils d'à peu près 20^{cm} de longueur ont été insérés dans des tubes en bois divisés en deux par une section longitudinale et retenus par un fort tube en bois; un levier permettait de les comprimer assez fortement sans leur faire subir une flexion latérale. Un courant thermo-electrique plus ou moins fort existait sans compression dans tous les metaux mis en expérience et déjà déformes par une compression prealable. Le nickel seul a donné pendant la compression un courant assez fort, dont l'accroissement

était un peu moins que proportionnel à la force de compression. Les autres métaux ont donné des courants très faibles. Le courant a été dirigé du métal non comprimé par la soudure chauffée au métal comprimé pour le nickel, le cuivre, l'étain et l'argent; pour le fer seul, le courant avait une direction opposée. L'auteur remarque que ce résultat est conforme à la règle qu'il a posée d'après ses expériences sur les métaux soumis à une traction; « le sens du courant entre un métal et le même métal comprimé ou étiré est toujours inverse de celui qu'il donne avec son voisin de côté droit dans le système périodique des éléments, écrit en forme de série continue. »

J. WOULF. — Un nouveau cas de rotation du plan de polarisation de la lumière, p. 436-437.

Le sel double : $KaLiSO^4$ cristallise dans le système hexagonal et donne une rotation de $2°,8$ des rayons jaunes pour 1^{mm} d'épaisseur. Les cristaux de ce sel jouissent d'un faible pouvoir biréfringent : la différence, Δ_D, de ses indices de réfraction pour la ligne D croît avec la température d'après la formule

$$\Delta_D = 535.10^{-6} + 236.10^{-8}t.$$

N. SLOUGUINOFF. — Formule servant à déterminer le quotient des conductibilités thermiques d'un corps à l'état solide et à l'état liquide, p. 456-457.

L'auteur propose de déterminer l'épaisseur de la couche solide qui se forme sur une des surfaces parallèles, distantes de H, de la matière fondue, quand l'une est maintenue à la température t et l'autre à T, et quand l'état stationnaire est atteint. En nommant λ la chaleur latente, τ la température de la solidification, δ la densité, k et k' les conductibilités du corps à l'état solide et liquide, on peut écrire, pour l'accroissement dx de l'épaisseur de la couche solide x pendant le temps $d\theta$, l'équation suivante

$$\lambda\delta\, dx = k\frac{\tau - t}{x}d\theta - k'\frac{T - \tau}{H - x}d\theta.$$

Si une convection de la chaleur ne vient pas fausser le résultat,

l'état stationnaire s'établira quand $dx = 0$; alors

$$k\frac{\tau - t}{h} = k'\frac{T - \tau}{H - h}.$$

J. BORGMANN. — Quelques expériences sur les oscillations électriques, p. 458-467.

L'emploi d'un électromètre d'Arsonval, dont une paire de quadrants était en communication avec la terre, pour déterminer la position des nœuds et ventres des oscillations électriques, n'a pas réussi à l'auteur. L'électromètre et tous les objets de la salle d'expériences se chargeaient uniformément d'électricité positive, si le marteau de la bobine Ruhmkorf vibrait régulièrement et d'électricité négative dans le cas contraire.

Pour démontrer devant un grand auditoire les expériences de Thomson sur l'inégale vitesse de propagation des ondes électriques dans des fils conducteurs entourés d'air ou de paraffine, l'auteur a remplacé le micromètre à étincelles par un tube de Lecher, dont l'illumination est beaucoup plus visible de loin.

La non-transparence des milieux conducteurs pour les rayons d'induction électromagnétique peut être rendue visible à tout l'auditoire à l'aide d'un tube de Lecher placé dans un autre tube concentrique rempli d'acide sulfurique dilué : le tube ne s'illumine pas, au voisinage du vibrateur de Hertz, mais la lumière apparaît à mesure que le niveau de l'acide baisse.

N. KASANKINE. — Sur les constantes capillaires des solutions aqueuses saturées, p. 468-472.

Guidé par quelques considérations théoriques, l'auteur a entrepris une série d'observations de la constante capillaire des solutions aqueuses, saturées à 17° et à 33°, de bichromate de potasse, de borax, de phosphate de soude, d'acide borique, de sulfates de fer et de cuivre, d'azotate de baryte et d'alun, pour constater que le produit de la hauteur de la colonne capillaire par la densité de la solution est constante. En effet, les différences des nombres obtenus d'après les observations de l'auteur dépassent peu les erreurs de ses observations. W. LERMANTOFF.

E. LÉVAY. — Rapport du travail du courant à l'énergie chimique dans les éléments galvaniques (*Wied. Ann.*, t. XLII, p. 103; 1891).

Ces recherches confirment, quant à la grandeur et quant au signe, les résultats obtenus antérieurement par M. Jahn [1] à l'aide d'une méthode un peu différente. E. Bouty.

A. APPUNN. — Ueber Combinationstöne und summationstöne (Sur les sons résultants); *Wied. Ann.*, t. XLII, p. 338-343.

Si l'on produit d'abord le son 1, puis un harmonique d'ordre élevé, 10 par exemple, M. Appunn dit qu'on entend très nettement le son d'addition 11.

Les sons résultants d'addition ou de soustraction peuvent aussi se combiner entre eux pour fournir des sons résultants d'ordre supérieur, et ces derniers deviennent parfois assez intenses, quand ils peuvent être produits de plusieurs manières, par la combinaison de sons résultants d'ordres divers des deux mêmes sons fondamentaux. E. Bouty.

J. ROSENTHAL. — Ueber die electrische Leitfähigkeit fester Elektrolyte bei verschiedenen Temperaturen (Sur la conductibilité des électrolytes solides à diverses températures); Inaugural-Dissertation. Leipzig, 1891.

Les expériences ont été réalisées principalement avec le chromate, le chlorure, le bromure, l'iodure et l'oxyde de plomb. Quand on maintient longtemps ces corps à une température élevée, on constate que la conductibilité du chromate de plomb décroît avec le temps, tandis que celle du chromure, du bromure et de l'oxyde décroît. L'auteur attribue ces changements à des modifications moléculaires. E. Bouty.

---

[1] Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. VI, p. 575.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Wiedemann's Annalen.

T. XLVI; n° 7, 1892.

P. Drude. — *Sur les phénomènes magnéto-optiques*, p. 353.

B. Walter. — *Valeurs exactes des indices de réfraction de l'eau*, p. 423.

H. Krone. — *Photogramme des couleurs spectrales*, p. 426.

G. Neumann et F. Streintz. — *Action de l'hydrogène sur le plomb et d'autres métaux*, p. 431.

F. Streintz. — *Contributions à la théorie de l'élément secondaire*, p. 449.

A. Toepler. — *Production et observation d'oscillations électriques très rapides*, p. 464.

H.-E.-J.-G. du Bois. — *Théorie mathématique du magnétisme du fer*, p. 485.

G. Adler. — *Sur la capacité des condensateurs*, p. 500.

G. Adler. — *Énergie magnétique du fer*, p. 503.

H.-O.-G. Ellinger. — *Indice de réfraction des rayons électriques dans l'eau*, p. 513.

St. Lindeck. — *Remarques sur le Mémoire de M. Mitthaler* « Sur l'emploi de la manganine pour les bobines de résistance », p. 515.

SUR LE DÉBIT D'UNE MACHINE ÉLECTROSTATIQUE A INFLUENCE;

PAR M. H. ABRAHAM.

1. L'appareil qui a servi pour nos mesures réalise assez exactement la machine théorique.

Cette sorte d'électrophore continu comporte un disque en glace de Saint-Gobain (diamètre 50^{cm}, épaisseur 3^{mm}) qui sert de support rigide à deux *porteurs* en argent A et A′ (1). Le disque tourne, autour de l'axe O, entre deux plans fixes un peu plus grands (diamètre 60^{cm}, épaisseur 5^{mm}); toutefois ceux-ci ne sont argentés que sur leurs faces internes; la largeur de la bande diamétrale isolante est réduite à 2^{cm}, leur argenture déborde donc de 5^{cm} sur celle du plateau mobile. Les deux secteurs supérieurs des plans fixes forment le *collecteur* C, les secteurs inférieurs constituent l'*inducteur* B. On prend le contact avec B et C au moyen de petites pinces p, p, en laiton doré. On a utilisé, pour le montage, le bâti d'une machine de Holtz; les grands plateaux sont fixés par des vis et des écrous en ébonite E.

La machine, bien suspendue, est animée par un moteur Gramme d'un cheval avec transmission souple. La méthode stroboscopique permet d'obtenir une rotation régulière. A cet effet, un aide observe le disque stroboscopique D sur lequel un diapason à miroir fait osciller un trait lumineux (image réelle du filament incandescent d'une lampe électrique). En agissant à la main sur l'axe, on obtient l'immobilité apparente de l'une des couronnes circulaires de D, c'est-à-dire la fixité dans la vitesse de rotation, avec toute la précision que comporte le diapason, soit un peu plus du millième, lorsqu'on utilise l'entretien électrique.

2. Le fonctionnement se comprend aisément.

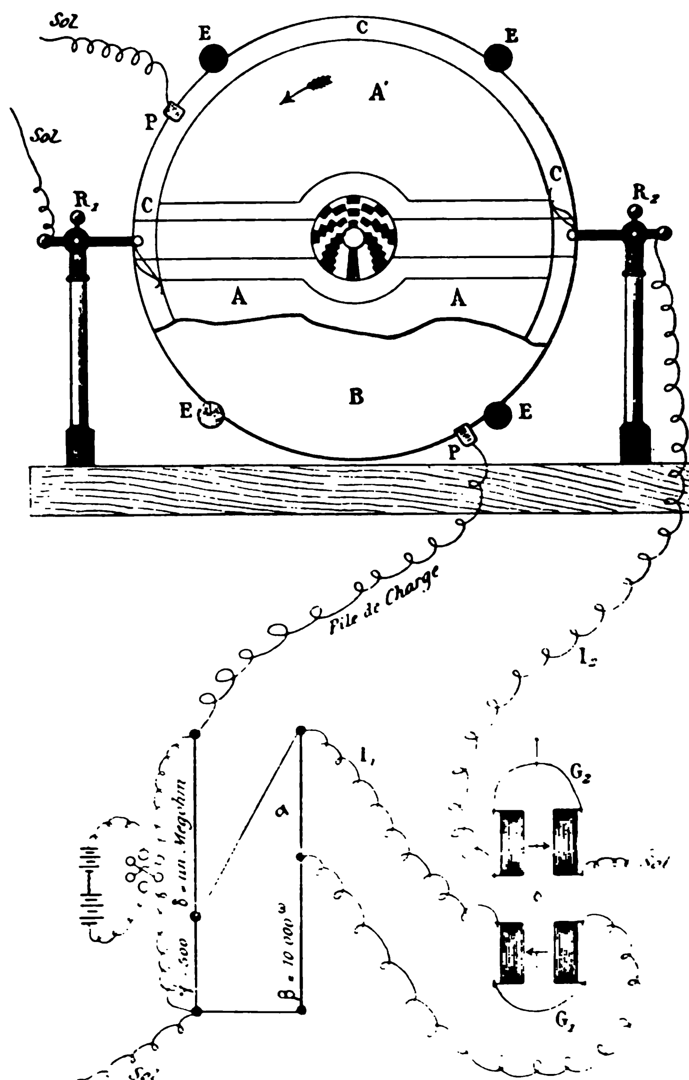
Lorsque le *porteur* A passe dans l'*inducteur* B, le ressort R_1

---

(1) Pour constituer ces conducteurs, on a tout d'abord collé à la gomme laque un ruban d'argent sur la tranche du disque, puis on a complètement argenté celui-ci, dessus, dessous et bords; après quoi l'on a détruit l'argent des deux faces et de la tranche sur une large bande diamétrale qui a isolé les deux porteurs A et A′.

le met en communication directe avec le sol : B charge A par

Fig. 1.



influence. A, continuant à tourner, passe bientôt dans C qui est au sol et le ressort R_2 le met au sol par l'intermédiaire d'un galva-

nomètre : A s'y décharge complètement; puis A passe dans B, etc., et le deuxième porteur, A', double l'effet du premier.

Le courant discontinu fourni par l'appareil ne traverse en réalité que l'un des circuits, G_2, d'un galvanomètre différentiel (la paire de bobines supérieures d'un Thomson de 13000$^{\omega}$). L'autre fil, G_1, est parcouru par une dérivation convenable que fournit la pile de charge elle-même, et l'on équilibre le différentiel en réglant la résistance variable α.

3. On a pu établir en premier lieu que *la quantité d'électricité débitée par la machine est rigoureusement proportionnelle au potentiel de charge de l'inducteur* B.

L'équilibre étant en effet établi et laissant la vitesse bien constante, on a fait varier ce potentiel de charge du simple au double (40 et 80 éléments Gouy) : l'équilibre a subsisté. Or le courant qui passe dans G_2 est exactement proportionnel au potentiel de charge (loi d'Ohm); si donc l'équilibre du différentiel a subsisté, c'est que le débit de la machine, lui aussi, est proportionnel à ce potentiel. Et la proposition est établie par une expérience de substitution rapide, très sûre par conséquent : je répondrais presque du dix-millième.

4. On a fait varier la vitesse de la machine suivant les rapports simples auxquels conduit la méthode stroboscopique; et l'on a pu voir que, au millième, *le coefficient de debit* (capacité) *de la machine est proportionnel à la vitesse de rotation.*

Il suffisait évidemment de montrer que la fraction i_1 de courant principal I qu'il faut envoyer dans G_1 pour rétablir l'équilibre est proportionnelle à la vitesse; et cette fraction elle-même dépend d'une manière très simple des résistances du circuit

$$\frac{i_1}{I} = \frac{x\gamma}{\alpha(\beta+\gamma+G_1)+G_1(\beta+\gamma)}.$$

Voici, d'ailleurs, une expérience :

Pour des vitesses de rotation n proportionnelles à

$$\frac{1}{8},\quad \frac{1}{7}\quad \text{et}\quad \frac{1}{6},$$

la résistance α prit successivement les valeurs

$$394^{\omega},0, \quad 456^{\omega},9, \quad 542^{\omega},5,$$

avec

$$(\beta = 9986^{\omega}, \qquad \gamma = 500^{\omega},8, \qquad G_1 = 6248^{\omega}).$$

On en déduit que le rapport $n : \frac{i_1}{I}$, qui eût dû être constant, a pris des valeurs proportionnelles à

$$1,367,$$
$$1,367,$$
$$1,369.$$

Le procédé employé pour régulariser la vitesse ne peut pas donner une précision beaucoup plus considérable, car pour des expériences qui, comme celle-ci, doivent durer plusieurs minutes, on ne peut pas affirmer que la période du diapason entretenu électriquement ne varie pas de quelques dix-millièmes.

5. Il était encore intéressant de voir que le coefficient de débit de la machine était bien celui que l'on peut calculer d'après ses dimensions géométriques. Pour ces mesures absolues, l'appareil avait été pourvu d'un compteur de tours à enregistrement électrique.

Soit C la valeur électrostatique de la capacité d'un *porteur* quand il est à l'intérieur de l'*inducteur* B et qu'il communique avec le sol. B étant chargé à un potentiel mesuré en unités électromagnétiques par

$$I(\gamma + \delta),$$

le débit de la machine faisant n tours par seconde est, dans ce dernier système d'unités,

$$i_2 = 2n \frac{C}{v^2} I(\gamma + \delta).$$

Si k est la constante du différentiel, on doit avoir

$$i_1 = k i_2,$$

c'est-à-dire

$$I \frac{\alpha\gamma}{\alpha(\beta + \gamma + G_1) + G_1(\beta + \gamma)} = 2kn \frac{C}{v^2}(\gamma + \delta) I,$$

et l'on peut même considérer cette expression comme fournissant

une détermination de v (1),

$$v = \sqrt{2knC\frac{\gamma+\delta}{\gamma}\frac{\alpha(\beta+\gamma+G_1)+G_1(\beta+\gamma)}{\alpha}}.$$

Toute la difficulté réside dans l'évaluation de la capacité C. Cette capacité a pour expression

$$C = \frac{S}{4\pi e},$$

où e représente la distance moyenne des armatures et S la *surface utile du porteur*.

Par *surface utile,* il faut entendre la surface géométrique, $1360^{cm^2},5$, à laquelle il faut tout d'abord ajouter une surface de $75^{cm^2},2$ pour la correction due au bord extérieur (formule de Kirchhoff). Quant à la correction due aux bords intérieurs, elle est tout à fait incertaine et peut devenir soit $65^{cm^2},4$, soit $87^{cm^2},1$ selon la valeur 2 ou 3 que l'on attribue à la constante diélectrique du verre.

Cette incertitude eût pu être réduite en employant un système de garde, mais cela n'était pas bien nécessaire, car la valeur de e n'est pas non plus bien sûre. On mesure e en pointant les surfaces avec une lunette portée par le chariot d'une machine à diviser; les pointés sont très précis; mais la rotation de la machine peut produire des déplacements appréciables des plateaux fixes qui font varier e.

En somme, la capacité ne peut être calculée au centième sûr; on ne doit donc pas s'attendre à un contrôle plus exact (cette concordance, d'ailleurs, est juste atteinte par les expériences); nous en donnerons un seul exemple :

$$k = 1,0587, \qquad n = 6^{\text{tours}},835, \qquad e = \begin{cases} 1^{\text{re}}\text{ face} \ldots\ldots & 0^{cm},878 \\ 2^{\text{e}}\text{ face} \ldots\ldots & 0^{cm},809 \end{cases}$$

$$\frac{\gamma+\delta}{\gamma} = 19937, \qquad \beta+\gamma = 10487^{\omega}, \qquad G_1 = 6108^{\omega},$$

$$\alpha = 316^{\omega},2.$$

(1) C'était précisément en vue d'obtenir *une nouvelle détermination de v* que ces mesures avaient été entreprises; elles ont conduit à des expériences plus précises qui font l'objet d'un autre travail (*voir* p. 361 de ce volume). On y pourra trouver en détail la détermination du coefficient k et des diverses résistances.

Si l'on adopte l'une ou l'autre des deux corrections pour S, on trouve

$$v = 2,98 . 10^{10}$$

ou bien

$$v = 3,01 . 10^{10}.$$

C'est bien là, au centième, la valeur exacte du rapport v; c'est-à-dire que, à ce degré d'exactitude, *le débit observé est bien égal au débit calculé.*

6. En résumé, en établissant une machine électrostatique à induction bien définie, on a obtenu une concordance très satisfaisante entre la théorie et l'expérience pour les points suivants :

1° *Le débit est proportionnel au potentiel de charge de l'inducteur, au* $\frac{1}{10000}$.
2° *Le débit est proportionnel à la vitesse, au* $\frac{1}{1000}$.
3° *Le débit observé est égal au débit calculé, au* $\frac{1}{100}$.

Mais il convient de dire que pour les expériences actuelles les mesures sont beaucoup plus sûres que le calcul *a priori,* et c'est surtout à ce dernier que doivent être attribués les écarts.

SUR LES FRANGES VISIBLES DANS UN OCULAIRE NADIRAL;

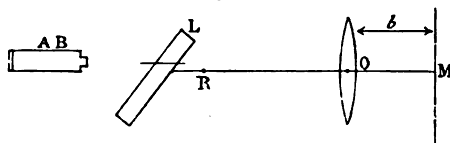
PAR M. A. HURION.

Lorsque l'on cherche à rendre normal à l'une des faces d'un prisme l'axe optique d'une lunette de goniomètre muni d'un oculaire nadiral, on peut quelquefois observer des franges rectilignes perpendiculaires au plan de réflexion de la lumière sur la glace transparente de l'oculaire. Le phénomène devient bien visible au moment où le tirage est tel que l'on voie en même temps le réticule et son image de retour. D'autre part, la frange centrale noire ne coïncide pas avec le point de croisement des fils du réticule quand ce dernier est exactement superposé à son image.

Le dispositif suivant permet d'étudier les différentes circonstances du phénomène. Une lame transparente à faces parallèles L

(*fig.* 1) renvoie sur un objectif O la lumière d'une source S. Un miroir plan M est placé normalement à l'axe optique OR; et l'on observe les franges à l'aide d'un microscope AB à long foyer. Ce microscope peut recevoir deux mouvements, l'un suivant la direction RO et l'autre perpendiculairement à RO.

Fig. 1.



Partant de la position qui correspond au maximum de netteté des franges, on peut approcher ou éloigner le microscope de la lame L jusqu'à ce que le phénomène ne soit plus visible et noter le déplacement total. On trouve ainsi, avec un objectif de 345^{mm} de distance focale et une lame de verre L de 3^{mm},5 d'épaisseur, les nombres suivants :

Déplacement.	*b*.
35^{mm}	295^{mm}
8	206
5	150

La quantité *b* désigne la distance du miroir M à l'objectif. La localisation dans le plan focal paraît d'autant plus nette que le miroir est placé plus près de la lentille.

L'expérience a donné aussi pour distance de la frange centrale au réticule, en opérant sous une incidence de 45°, 1^{mm},24 avec une lame de verre de 3^{mm},5 d'épaisseur et 2^{mm},17 avec une lame de quartz de 6^{mm}.

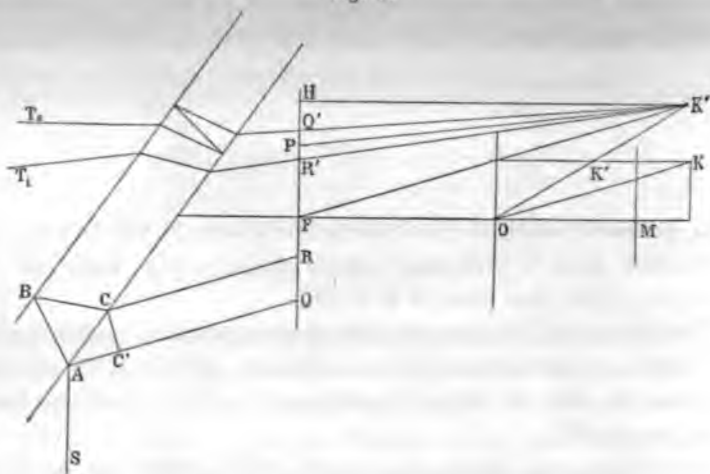
Les phénomènes observés sont dus à l'interférence de deux systèmes d'onde. Les premières pénètrent dans la lame L, se réfléchissent sur sa seconde face, traversent l'objectif, se réfléchissent sur le miroir M et reviennent sur la lame L qu'elles traversent directement. Dans le second système, la lumière commence par se réfléchir sur la première face de L, puis, au retour, se réfléchit deux fois à l'intérieur avant de la traverser.

La théorie générale de ces sortes d'interférence a été donnée par M. Mascart (¹). Le but du présent article est d'expliquer les particularités précédemment signalées.

L'action de la source peut être remplacée par celle d'une série d'ondes planes dont les normales sont peu inclinées sur la direction générale de la lumière incidente. Prenons pour plan de la figure un plan normal à la lame mené par le foyer F de l'objectif: il rencontrera forcément la source, et nous considérerons d'abord les ondes planes ayant leurs normales dans le plan de la figure.

Soit I l'angle d'incidence correspondant au rayon réfléchi FO et R l'angle de réfraction correspondant : les angles d'incidence et de réfraction que nous aurons à considérer varieront peu autour de ces valeurs moyennes. Considérons une onde plane normale à SA et rencontrant la lame : elle va donner naissance à deux systèmes d'ondes planes réfléchies dont les normales seront AQ et CR, présentant une différence de marche $2me\cos c + \frac{\lambda}{2}$, en tenant

Fig. 2.



compte des pertes de phases dues à la réflexion. La distance CC' des divers rayons réfléchis provenant d'un même élément de l'onde incidente sera $2e\tan g r\cos i$, en désignant par e l'épaisseur de la

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 4ᵉ série, t. XXIII, p. 149.

lame. Les rayons réfléchis viennent couper le plan focal en deux points Q et R (*fig.* 2), et, comme ils font avec FO des angles très petits, la distance QR est très sensiblement égale à $2e \tang r \cos i$.

Les ondes planes considérées seraient transformées par la lentille en ondes convergentes ayant pour centre le point K du plan focal F′ qu'on obtient en menant OK parallèle à AQ. Le miroir M a pour effet de faire converger les ondes au point symétrique K′, de sorte que, après un nouveau passage à travers la lentille, les ondes auront pour centre le point K″. Toutes ces transformations s'effectuent sans faire changer la différence de marche des deux ondes.

Cherchons la direction du rayon correspondant au rayon incident CR; le rayon CR passant par le point R sort de la lentille parallèlement à OR; sous l'action du miroir M, il prend une direction OR′, en désignant par R′ le symétrique de R par rapport à OF; donc, après son nouveau passage à travers la lentille, il viendra passer en R′. On voit d'après cela que les rayons à considérer sont K″R′ et K″Q′ : ils traverseront la lame comme l'indique la figure, en prenant une différence de marche de sens contraire à la première.

Si l'on néglige les quantités du deuxième ordre, la différence de marche de ces rayons est la même que celle de deux ondes planes normales à la droite K″P, bissectrice de l'angle D′K″R′. Dès lors, en désignant par i' l'angle de K″P avec la normale à la lame, on aura pour expression de ce nouveau retard

$$2me\cos r',$$

et pour retard définitif

$$2me(\cos r - \cos r') + \frac{\lambda}{2} = d(me\cos r) + \frac{\lambda}{2} = -2me\sin r\,dr + \frac{\lambda}{2}.$$

D'autre part, on a la relation

$$\cos i\,di = m\cos r\,dr,$$

ce qui donne pour expression du retard

$$-\frac{2me\cos i\sin r}{m\cos r}di + \frac{\lambda}{2} = -\frac{me\sin 2i}{\cos r} + \frac{\lambda}{2}.$$

Comme di est du premier ordre, on peut remplacer i et r par

les quantités I et R, qui n'en diffèrent que de quantités du premier ordre. On obtient ainsi pour le retard la valeur

$$-\frac{me \sin 2I}{\cos R} di.$$

Or di peut se calculer facilement; si nous menons K″H parallèle à OF, nous aurons

$$i' - i = di = PK''H - FK''H = \frac{PH}{K''H} - \frac{FH}{K''H} = -\frac{FP}{K''H};$$

nous poserons $FP = x$ et nous calculerons K″H en fonction des données.

Désignant par a la distance MF′ du miroir plan au foyer F′ et par f la distance focale de la lentille, nous voyons que la distance du point K′ à la lentille est $f - 2a$; si p désigne la distance du point K″ à la lentille, il vient

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{f - 2a} = \frac{1}{f},$$

d'où

$$p = \frac{f(f - 2a)}{2a},$$

$$K''H = p + f = \frac{f^2}{2a},$$

$$di = \frac{2ax}{f^2},$$

et l'expression de la différence de marche devient

$$\frac{2me \sin 2I}{\cos R} \frac{ax}{f^2} + \frac{\lambda}{2};$$

elle ne dépend que de x, c'est-à-dire de la position du point P. Voyons maintenant où vont se rencontrer les deux rayons qui sortent de la lame. Le rayon K″R′ se déplace vers le haut et parallèlement à lui-même d'une quantité $e \frac{\sin(i_1 - r_1)}{\cos r_1}$; le rayon K″Q′ subit vers le bas un déplacement $2e \cos i_2 \tang r_2 - e \frac{\sin(i_2 - r_2)}{\cos r_2}$. Ces longueurs peuvent être supposées comptées parallèlement à R′Q′ en négligeant les quantités de second ordre. Les rayons se rapprochent de la quantité

$$2e \cos i_2 \tang r_2 + e \frac{\sin(i_1 - r_1)}{\cos r_1} - e \frac{\sin(i_2 - r_2)}{\cos r_2}.$$

Leur distance primitive R'Q' dans le plan focal était $2e\cos i \tang r$; on voit qu'elle devient

$$2e\Delta_1(\cos i \tang r) + e\Delta_2 \frac{\sin(i-r)}{\cos r}.$$

Δ_1 et Δ_2 représentent les variations correspondant aux variations angulaires $i_1 - i = \frac{2a}{f^2}\text{FR}'$ et $i_2 - i_1 = \frac{2a}{f^2}\text{R}'\text{Q}'$. La distance des points où les rayons percent le plan focal est donc de l'ordre de $\frac{e^2}{f^2}$, c'est-à-dire du second ordre. On peut dès lors prendre, pour point de rencontre des rayons, le point où le rayon T_1 coupe le plan focal.

Considérons les rayons K''P et K''R'; le premier subit à travers la lame un déplacement $e\frac{\sin(i'-r')}{\cos r'}$; le déplacement du second est égal à $e\frac{\sin(i_1-r_1)}{\cos r_1}$; la différence de ces quantités sera du second ordre. Dès lors, on peut dire que la distance du point de rencontre D des rayons considérés, au point P' où le plan focal est rencontré par le rayon réfracté correspondant à K''P, est égale à PR' ou $e\cos i \tang r$, car P est situé au milieu de R'Q'. D'ailleurs, en négligeant les quantités du second ordre, on peut poser $\text{PR}' = e\cos \text{I} \tang \text{R}$.

Dès lors, si l'on envisage des rayons situés dans le plan de la figure et rencontrant la lame sous des incidences variables, on pourra toujours trouver deux rayons réfléchis provenant d'un même rayon incident et tels qu'au retour leur bissectrice vienne passer par le point P. Dès lors, quelle que soit l'incidence primitive, la différence de marche restera la même, et les rayons efficaces viendront se rencontrer dans le plan focal à une même distance de l'image de P vue à travers la lame. On aura donc un phénomène net et sensiblement localisé dans le plan focal. La localisation sera d'autant plus nette que les rayons efficaces se rencontreront sous un angle plus grand. Or l'angle augmente quand K'' se rapproche de la lentille, c'est-à-dire quand la distance b du miroir plan à la lentille diminue, ce qui est conforme à l'observation.

Les positions des points de la droite FP correspondant à des franges noires seront données par la relation suivante, où x désigne

la distance variable FP,

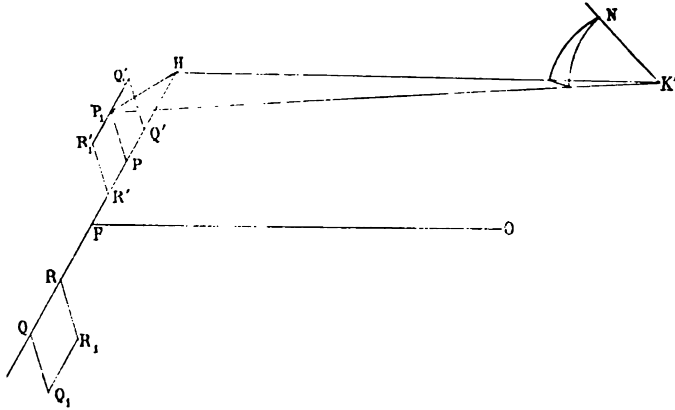
$$\frac{2me\sin 2\mathrm{I}}{\cos\mathrm{R}}\,\frac{ax}{f^2}+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$x=\frac{f^2}{2mae}\,\frac{\cos\mathrm{R}}{\sin 2\mathrm{I}}\,k\lambda.$$

Mais ces valeurs de x ne définissent pas la position des franges, car il faut tenir compte de ce fait que les rayons efficaces, au lieu de se rencontrer sur l'image P' du point P vu à travers la lame, viennent couper le plan focal à une distance de cette image égale à $e\cos\mathrm{I}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{R}$, comptée à partir du point P' du côté de la lumière incidente. Ceci explique pourquoi la frange centrale correspondant à $x=0$ ne coïncide pas avec l'image du réticule comme on l'a fait remarquer plus haut. D'ailleurs, pour les exemples cités, les valeurs de l'écart calculées sont celles que donne l'expérience.

Si l'on veut se rendre compte de la forme des franges, on pourra considérer des rayons situés dans des plans parallèles au plan de la figure précédente que nous supposerons horizontal. Prenons

Fig. 3.



l'onde rencontrant la lame sous l'incidence i et les deux rayons réfléchis provenant d'un même rayon incident et rencontrant le plan focal en Q_1R_1 au lieu de QR (*fig.* 3). Ces rayons viendront repasser au point K'' précédemment déterminé, et il est facile de voir qu'ils rencontreront de nouveau le plan focal en $R'_1Q'_1$ symétriques de R_1 et Q_1 par rapport à F. Le rayon moyen devient $K''P_1$ et tout

revient à calculer l'angle i'_1 que fait cette droite avec la normale à la lame.

Menons $K''H$ normale au plan focal et $K''N$ normale à la lame; le plan $HK''N$ est horizontal, et il vient $I = HK''N$, $i'_1 = P_1K''N$. Nous poserons $P_1K''N = \alpha$, et nous désignerons par φ l'angle aigu du plan $P_1K''H$ avec le plan horizontal.

Dès lors il vient

$$\cos i'_1 = \cos I \cos \alpha - \sin I \sin \alpha \cos \varphi,$$

l'angle a étant petit; on peut écrire

$$\cos i'_1 = \cos I - \alpha \cos \varphi \sin I = \cos(I + \alpha \cos \varphi)$$

ou

$$i'_1 = I + \alpha \cos \varphi.$$

D'ailleurs

$$\alpha = \frac{P_1H}{K'H}, \qquad \alpha \cos \varphi = \frac{P_1H \cos \varphi}{K'H} = \frac{HP}{K'H}.$$

On a aussi, comme dans le calcul précédent, $i = \frac{FH}{K'H}$, d'où

$$\delta i = \frac{FH - HP}{K'H} = \frac{x}{K'H}.$$

Ainsi la différence de marche est la même pour tous les rayons dont les bissectrices sont situées sur une même perpendiculaire à FH et les franges sont rectilignes.

Les valeurs de x calculées montrent que les franges sont équidistantes. La distance de deux franges noires successives est égale à

$$\frac{f^2}{2mae} \frac{\cos R}{\sin 2I};$$

elle varie proportionnellement à f^2 et en raison inverse du produit mae.

Cette formule se vérifie facilement en opérant en lumière homogène et mesurant la distance des franges : les résultats s'accordent avec la théorie. En particulier, les franges disparaissent complètement quand le miroir est placé exactement au foyer de l'objectif.

Les conditions de localisation des franges sont plus variées quand on remplace le miroir plan par un miroir concave. Ce dernier peut, en effet, être assimilé à un miroir plan sur la face duquel

serait collée une lentille convergente de distance focale égale au rayon de courbure du miroir. Dès lors, les franges se formeront dans le plan focal du système optique constitué par l'objectif de distance focale f et la lentille de distance focale R. La distance focale du système résultant est donnée par la relation

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{R} - \frac{b}{Rf},$$

d'où

$$R = \frac{Rf}{R + f - b}.$$

b désigne la distance du miroir concave à l'objectif. Il faudra dans les formules précédentes remplacer f par F.

Quant à la valeur a, distance du miroir plan au foyer du système, elle sera donnée par la relation

$$\frac{1}{b - f} + \frac{1}{a} = \frac{1}{R},$$

d'où

$$a = \frac{R(f - b)}{R - b}.$$

La distance de deux franges successives est de l'ordre de $\frac{F^2}{a}$ et l'on a

$$\frac{F^2}{a} = \frac{f^2 R}{(R + f - b)(f - b)}.$$

Donc la distance de deux franges successives devient infinie, soit pour $f = b$, soit pour $b = R + f$.

La première solution correspond au cas où le miroir est placé au foyer de l'objectif et alors les franges disparaissent comme précédemment.

Mais, pour $b = R + f$, la valeur de F est elle-même infinie et le quotient de la distance de deux franges par F qui est de l'ordre de $\frac{F}{a}$ est égal à $\frac{f}{f - b}$, c'est-à-dire une quantité finie. Dès lors, les franges sont localisées à l'infini.

Toutes les particularités indiquées par le calcul se vérifient dans les expériences.

J'ajouterai que, si l'on opère en lumière blanche avec un objectif non achromatique et un miroir plan, on trouve une position de

ce dernier pour laquelle les franges, en général peu nombreuses et fortement colorées, deviennent presque incolores, et couvrent tout le champ visible. L'apparence du phénomène est celle des franges des demi-lentilles signalée par MM. Macé de Lépinay et Perot ([1]). La théorie de cette sorte d'achromatisme des franges est d'ailleurs fort simple. Dans la formule qui donne la distance x d'une frange noire à la frange centrale figurent les quantités f et a. Or, si b représente la distance du miroir plan à la lentille, on a

$$a = f - b,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$x = \frac{f^2}{2me(f-b)} \frac{\cos R}{\sin 2I} k\lambda.$$

f varie avec la longueur d'onde pour un objectif non achromatique, de sorte qu'en général x dépend de λ. Cependant on peut trouver une valeur de b telle que $\frac{x}{\lambda}$ soit indépendant de la longueur d'onde, au moins pour la partie la plus lumineuse du spectre. Il suffit, pour obtenir cette valeur de b, d'écrire l'équation

$$\frac{d\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{d\lambda} = 0,$$

dans laquelle on donnera à λ la valeur $0^\mu,589$ correspondant à la raie D.

Les calculs n'offrent aucune difficulté et les résultats qu'ils donnent sont conformes aux observations.

([1]) *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 376.

INFLUENCE DE L'AIMANTATION SUR LA LONGUEUR D'UN BARREAU DE BISMUTH;

PAR M. EDM. VAN AUBEL.

Les changements de longueur que subissent les barreaux de fer, de nickel, de cobalt sous l'influence de l'aimantation ont fait l'objet de plusieurs travaux.

Il était intéressant, pour la théorie du diamagnétisme, d'examiner aussi comment se comporte, dans les mêmes circonstances, un corps diamagnétique, le bismuth par exemple.

MM. Tyndall (¹) et Grimaldi (²) n'ont pu observer aucune variation de longueur.

Au contraire, M. Bidwell (³) a trouvé que le bismuth s'allonge faiblement dans des champs magnétiques dont l'intensité est supérieure à 500 unités C.G.S. Le plus grand allongement observé était d'environ $\frac{1,5}{10000000}$ de la longueur et correspondait à un champ magnétique de 842 unités C.G.S. L'effet n'était pas dû à la chaleur, car il se produisait instantanément lorsqu'on faisait passer le courant dans la bobine aimantante et disparaissait immédiatement avec lui. M. Bidwell ne croit pas non plus qu'on puisse attribuer cet allongement à la présence du fer comme impureté dans le bismuth. L'acier au manganèse ne s'allongeait presque pas; dans un champ de 850 unités, l'allongement était seulement $\frac{1}{50000000}$ de la longueur.

M. le Professeur Classen ayant eu l'amabilité de me remettre une grande quantité de bismuth absolument pur, j'ai pensé qu'il serait utile de refaire ces expériences en utilisant un champ magnétique intense et la méthode des franges d'interférence de M. Fizeau, qui me paraît à la fois la plus commode et la plus sen-

---

(¹) TYNDALL, *On some mechanical effects of Magnetisation*, publié dans ses *Researches on Diamagnetism and Magne-Crystallic Action*. London, 1870.

(²) GRIMALDI, *Il Nuovo Cimento*, 3ᵉ série, t. XXIII, p. 211; 1888. *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 552; 1889.

(³) BIDWELL, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. t. CLXXIX, p. 216; 1888. *Proceedings of the Royal Society of London*, t. XLIII, p. 408; 1888.

sible. Le bismuth que j'ai employé est le métal dont M. Classen s'est servi pour la détermination du poids atomique (1) et dont j'ai fait une étude dans mon Mémoire *Sur les changements de résistance électrique du bismuth dans un champ magnétique* (2).

Le courant électrique qui passe dans la bobine magnétisante produit des vibrations qui auraient pu donner lieu à des perturbations dans les observations. Aussi j'ai fait cimenter solidement le support de la tige de bismuth et la partie optique de l'appareil dans un mur de fondation d'une des caves du laboratoire; la bobine parcourue par le courant était placée sur une table indépendante du mur.

La tige de bismuth a une longueur de 31^{cm} et un diamètre de 11^{mm}; elle est placée verticalement suivant l'axe de la bobine magnétisante.

J'ai fait couler, en une fois, une pièce en cuivre ayant la forme d'un prisme A terminé par un anneau B, dont le plan est parallèle à l'axe du prisme. L'anneau a un diamètre extérieur de 5^{cm} et une section carrée de $1^{cm},5$ de côté environ. La moitié du prisme A est enchâssée dans le mur de manière que le plan de l'anneau B soit horizontal. Celui-ci est soudé à l'intérieur d'un cylindre en cuivre C de 5^{cm} de diamètre et de 30^{cm} de longueur, fermé à la partie inférieure. Au centre de la base inférieure de ce cylindre se trouve une vis D d'un pas assez fin qui peut se déplacer suivant l'axe du cylindre. Elle supporte par sa pointe l'extrémité inférieure de la tige de bismuth, tandis que la pointe d'une vis analogue E appuie au centre de l'autre extrémité de cette tige. Aux points de contact des vis avec le barreau de bismuth, on a creusé de petits enfoncements afin de le maintenir dans l'axe du cylindre C et par suite de la bobine aimantante.

La vis E peut se déplacer dans son écrou qui est formé par un levier en cuivre, très solide, mais aussi léger que possible, dont l'axe fixe se trouve en F sur une pièce soudée à l'anneau B.

Les longueurs FE et FG valent respectivement 2^{cm} et 37^{cm}.

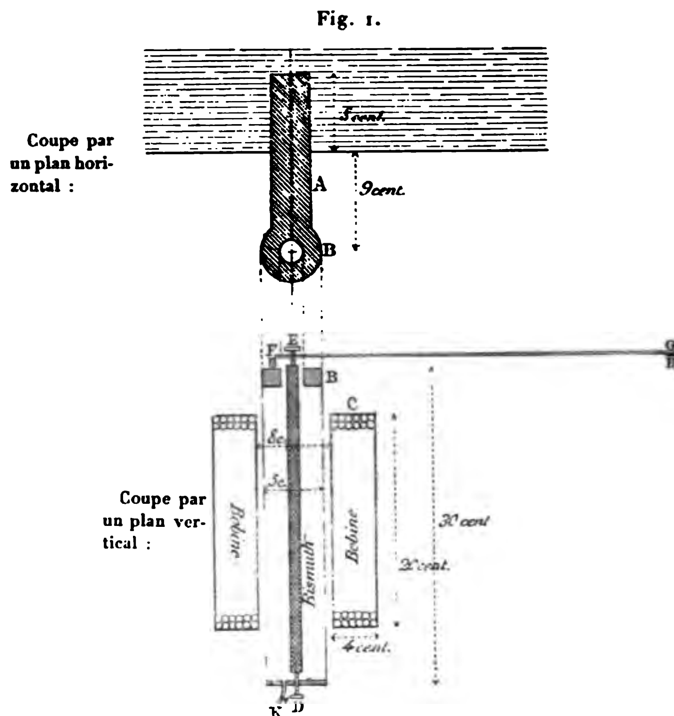
---

(1) *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, Jahrgang XXIII, p. 938; 1890.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, décembre 1889.

L'extrémité G porte à la partie inférieure une petite plaque de verre H bien plane fixée au moyen d'un peu de cire (*fig.* 1). Au-dessous de cette plaque de verre H est un prisme à réflexion totale, rectangle isoscèle. Une des faces de l'angle droit est parallèle à la lame H, l'autre est verticale. La lumière de la soude envoyée par

Fig. 1.



une lame de verre à faces parallèles, placée à 45°, se réfléchit sur la face hypoténuse du prisme. Elle forme dans la lame d'air qui sépare le prisme de la plaque de verre H des franges d'interférence et revient dans un microscope après réflexion sur la face hypoténuse du prisme. La lame de verre, qui renvoie les rayons lumineux dans le prisme, est fixée, ainsi que le prisme, sur un petit trépied en cuivre muni de trois vis calantes. Les pointes de ces vis reposent dans trois petits enfoncements pratiqués sur la face supérieure d'un anneau horizontal semblable à l'anneau B et fixé comme lui dans le mur. Le microscope est pris dans une pince

qui fait partie d'un support scellé également dans le mur. Les trois vis calantes du trépied et les deux vis D et E permettent de régler facilement l'appareil.

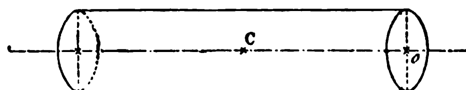
Un déplacement des franges indiquera une variation de longueur qu'il est facile de calculer. En effet, quand il passe, en un point fixe déterminé, dans le champ du microscope, 1 frange ou $\frac{1}{10}$ de frange, c'est que la distance des deux surfaces a varié en ce point de $0^{mm},0002944$, ou $0^{mm},00002944$, la longueur d'onde de la soude étant $0^{mm},000588$.

L'observation des franges d'interférence fournit donc un moyen très sensible pour apprécier des changements de longueur excessivement petits; c'est dans la mince lame d'air interposée entre la petite plaque de verre H et le prisme que se produit la différence de marche qui donne lieu à la production des franges.

Pour produire l'aimantation, nous avons employé une bobine cylindrique qui existait déjà au laboratoire et qui avait un diamètre intérieur de 8^{cm}, un diamètre extérieur de 16^{cm} et une hauteur de 20^{cm}. Elle portait 10 couches de fil, chacune de 50 tours, et était parcourue par un courant de 48 ampères.

On peut facilement calculer, au moyen des différentes constantes de cette bobine [1], l'intensité du champ magnétique H_C au centre C ou H_0 au point O; on trouve ainsi $H_C = 1292$ et $H_0 = 722$ unités C.G.S. environ.

Fig. 2.



Mais il est préférable de calculer l'intensité *moyenne* du champ magnétique dans la bobine au moyen de la rotation du plan de polarisation de la lumière de la soude, qui traverse un tube de 20^{cm} contenant du sulfure de carbone. En adoptant le nombre $0',043$ pour la constante de Verdet [2], on obtient ainsi $H_m = 1039$ unités C.G.S.

---

(1) E. HOSPITALIER, *Traité élémentaire de l'énergie électrique*, t. I, p. 154; 1890.

(2) MASCART et JOUBERT, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 860-861; 1886.

Comme on le voit, le champ magnétique qui était produit dans mes expériences était beaucoup plus intense que celui dont M. Bidwell s'est servi.

Avec le microscope que j'ai employé, on peut apprécier facilement $\frac{1}{10}$ de frange. Or nous avons vu que $\frac{1}{10}$ de frange correspond à une variation dans l'épaisseur de la lame d'air égale à

$$\frac{1}{10}\frac{\lambda}{2} = 0^{mm},00002944.$$

Par conséquent l'appareil permet d'évaluer un déplacement de l'extrémité de la tige de bismuth égal à

$$0^{mm},00002944 \times \frac{2}{37} = 0^{mm},00000159,$$

$\frac{2}{37}$ étant le rapport des bras du levier FEG. Comme la longueur de la tige de bismuth qui se trouve à l'intérieur de la bobine est de 20^{cm}, la variation de longueur relative $\frac{\Delta l}{l}$ que l'on pourra apprécier est

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{0^{mm},00000159}{200} = 0^{mm},000000008 \text{ environ.}$$

Or M. Bidwell a trouvé une variation $\frac{\Delta l}{l}$ égale à 0,00000015. Il résulte de là que l'allongement si faible observé par ce physicien devait être aperçu facilement avec mon appareil. Néanmoins aucun allongement n'a été constaté.

Pour réduire autant que possible l'influence de la température, qui d'ailleurs ne gêne pas beaucoup les observations, on se sert d'écrans en carton; en outre le cylindre C est complètement rempli d'eau que l'on peut laisser couler par le tube K et remplacer quand on le désire.

Mes expériences démontrent que la grande influence du magnétisme sur la résistance électrique ou sur le pouvoir thermo-électrique du bismuth ne peut s'expliquer par les déformations que ce métal subit dans le champ magnétique [1].

---

[1] *Voir* GRIMALDI, *loco citato*.

D'ailleurs la résistance électrique du fer, métal qui subit par l'aimantation une variation de longueur très sensible, se modifie beaucoup moins dans un champ magnétique que celle du bismuth.

On peut encore en conclure que les molécules du barreau de bismuth ne s'orientent pas sous l'action de l'aimantation.

NOTE COMPLÉMENTAIRE RELATIVE A L'ACTION D'UN COURANT SUR UNE AIGUILLE AIMANTÉE;

PAR M. E. GARNAULT.

Depuis la publication de ma précédente Note sur ce sujet (¹), M. Giuseppe Basso m'a fait parvenir plusieurs brochures extraites des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, 1870-1882. M. Basso y donne la description d'un instrument destiné à obtenir l'intensité d'un courant au moyen de la déviation maximum produite en faisant varier la distance du courant à l'aiguille aimantée.

Aucun Traité français ne mentionnant le fait d'un maximum de déviation, je dois dire que j'ignorais l'existence des publications de M. Basso. Mon but, un peu différent de celui du savant italien, était seulement la démonstration expérimentale de l'action d'un courant passant soit par l'aiguille, soit à une distance déterminée de l'aiguille, et de mettre ainsi en évidence l'existence de cette déviation maximum.

E. WIEDEMANN et H. EBERT. — Ueber electrische Entladungen (Décharges électriques); *Phys. Méd. Société*, Erlangen, 8 février 1892.

L'appareil employé par MM. Wiedemann et Ebert pour étudier l'influence des oscillations électriques sur les gaz diffère peu de celui de Lecher. Il se compose de deux condensateurs communiquant avec une machine à vingt plateaux; l'une des armatures de chacun d'eux porte une branche de l'excitateur, l'autre est réunie par un fil de 12^m à 13^m de long à l'armature d'un condensateur secondaire de $7^{cm},6$ de diamètre dont les plateaux peuvent être écartés à volonté; les deux fils sont tendus parallèlement l'un

---

(¹) *Voir* p. 245 de ce Volume.

à l'autre à 30^{cm} de distance. L'exploration du champ se fait avec un tube de Geissler sans électrodes placé en général parallèlement à l'axe du condensateur secondaire ou parfois entre les plateaux. Des ponts jetés sur les conducteurs permettent de déterminer dans chaque expérience la position des nœuds.

Les auteurs étudient d'abord les conditions dans lesquelles les tubes s'illuminent le plus facilement en faisant varier la longueur, le diamètre, la position de ces tubes. Les plus sensibles sont en général ceux munis d'une armature métallique intérieure ; ils ne doivent pas être trop étroits, ils s'illuminent d'autant mieux que la pression est plus faible jusqu'à une certaine limite ; des tubes de 4^{cm} de diamètre, 5^{cm} de longueur ou des boules de 8^{cm} de diamètre réalisent des conditions convenables. La lueur se produit brusquement à une certaine distance du condensateur, puis l'intensité augmente lentement quand on rapproche le tube.

Les corps conducteurs, les dissolutions électrolytiques, et même les tubes illuminés par la décharge se comportent comme des écrans par rapport aux tubes explorateurs ; l'ombre s'étend dans l'espace tout autour des écrans, en avant, en arrière et latéralement ; elle s'étend d'autant plus loin que le corps est plus conducteur et le tube d'essai plus étroit. Le verre et le mica ne donnent rien ; cependant, la propriété n'est pas intimement liée à la conductibilité, puisque des métaux, du mercure ou une dissolution de sel agissent à peu près de même. Les tubes se comportent comme les métaux, à condition d'être illuminés par la décharge ; s'ils sont obscurs, leur action est nulle.

Si l'on place une boule entre les plateaux du condensateur secondaire, on observe, dans l'intérieur de cette boule, une sorte de solide lumineux creux, séparé des parois par un intervalle obscur ; dans ces expériences, la pression est environ 1^{mm} ; les plateaux sont remplacés par des réseaux de fils placés très près des parois, mais sans les toucher. Le phénomène est symétrique par rapport au plan de symétrie du condensateur ; le solide est formé en son milieu de lueur rose et terminé par deux calottes de lueur négative séparées de la première par un intervalle obscur. Quand on écarte les plateaux, la lueur négative disparaît ; le contraire a lieu quand on diminue la pression. Dans des tubes cylindriques fermés par des bases diélectriques ou métalliques, le phénomène est sensi-

blement le même; la nature du gaz modifie seulement les colorations.

Un cylindre d'étain parallèle à l'axe du condensateur placé autour de la boule ne change pas le phénomène; on remarque aussi que des corps placés dans l'appareil vide projettent une ombre dont les dimensions varient avec la pression.

Lorsque les tubes sont placés près du condensateur secondaire parallèlement à l'axe, les phénomènes sont symétriques ou dissymétriques suivant qu'il y a ou qu'il n'y a pas de pont sur les conducteurs; les plateaux forment autour d'eux une ombre qui s'étend d'autant plus loin dans le gaz que celui-ci est plus raréfié. L'extrémité des tubes et surtout les tubes capillaires opposent une résistance au passage des oscillations; la lumière change du rose au bleu quand elle passe d'une portion large dans une portion étroite du tube. Il est facile de reconnaître, au moyen d'un tube vide entourant le conducteur, la position des nœuds par l'absence de lueur en ces points.

Tous ces résultats sont déduits de nombreuses expériences pour le détail desquelles on ne peut que renvoyer au Mémoire original. C. Daguenet.

L. NATANSON. — O jednośći linii ortobarycznych roztworów i plynów jednorodnich (Sur la concordance des courbes orthobares relatives aux dissolutions et aux fluides homogènes); *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, juin 1891.

Dans ce Mémoire, l'auteur cherche à préciser certaines idées émises récemment par M. Orme Masson sur la théorie des dissolutions.

M. Orme Masson, poursuivant le cours des recherches inaugurées par M. van't Hoff avec tant de bonheur, a pu indiquer une analogie remarquable que présentent les systèmes formés par un liquide et une vapeur saturée avec certaines dissolutions de deux liquides partiellement solubles l'un dans l'autre. Convenons, pour mettre cette analogie sous sa forme la plus simple, de considérer les vapeurs comme dissolutions de la matière dans le vide, et les liquides comme dissolutions du vide dans de la matière; le cas des

deux dissolutions mutuelles en équilibre deviendra dès lors le cas général, qui comprendra, comme cas particulier, l'équilibre ordinaire d'un liquide en présence d'une vapeur saturée.

En se plaçant à ce point de vue, l'auteur s'est demandé s'il n'y avait pas lieu de transporter aux dissolutions les propositions bien connues de M. van der Waals sur la correspondance des relations fondamentales qui sont applicables aux différents corps à l'état de vapeur saturée. Dans le but d'y répondre, on a construit cinq *lignes orthobares*, d'après l'expression de MM. Ramsay et Young (c'est-à-dire les courbes qui indiquent la relation des volumes du liquide et de la vapeur, aux limites mêmes de la saturation, avec la température). Les cinq combinaisons de liquides qui ont été choisies sont celles dont la solubilité a fait l'objet des études de M. Alexejeff, et dont la dilatation thermique peut être considérée comme connue. Ces cinq combinaisons sont les suivantes : aniline et eau, aniline et soufre, alcool isobutylique et eau, phénol et eau, essence de moutarde et soufre. La considération de ces courbes ayant fait connaître les valeurs des éléments critiques (savoir : la température et le volume de l'unité de masse au point critique de dissolution), ces valeurs ont été adoptées comme unités nouvelles, et l'on a trouvé que les courbes orthobares rapportées aux éléments critiques respectifs concordent entre elles, les différences qui leur étaient particulières ayant disparu. A ce résultat vient s'en joindre un autre. La courbe orthobare, qui est unique pour les dissolutions différentes, est la même que celle qui convient aux corps homogènes. Cette conclusion est corroborée par le calcul des courbes orthobares pour l'éther (d'après MM. Ramsay et Young et M. Battelli), pour l'alcool éthylique et l'alcool méthylique (d'après MM. Ramsay et Young), pour l'acide carbonique enfin et le protoxyde d'azote (d'après MM. Cailletet et Mathias), ainsi que par la comparaison détaillée de toutes ces courbes avec celles qui ont été calculées pour les dissolutions.

L. NATANSON.

THE AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE.

T. XLIII (janvier-juin 1892).

CARL BARUS. — Relation entre le point de fusion et la pression dans le cas de la fusion des roches ignées, p. 56.

Des mesures faites sur les silicates, on conclut que $\frac{dT}{dp} = 0,025$ à 1170°, pour les silicates, ce qui coïncide à peu près avec les valeurs trouvées pour $\frac{dT}{dp}$, pour diverses substances organiques, margarine, paraffine, naphtaline, etc. Il semble que la variation du point de fusion avec la pression, dans le cas du type normal de fusion, soit à peu près la même pour tous les corps.

T.-C. MENDENHALL. — Emploi d'un pendule libre comme étalon de temps, p. 85.

L'auteur a obtenu des résultats très constants, à plusieurs mois d'intervalle, en employant un pendule à demi-seconde, d'une masse un peu supérieure à 1^{kg}, la masse étant presque entièrement concentrée dans la lentille, et muni d'un couteau d'agate oscillant sur des plans d'agate. On compare la durée d'un chronomètre coupe-circuit à celle de ce pendule par une méthode optique qui n'est qu'une variété de la méthode stroboscopique : à chaque seconde du chronomètre éclate une étincelle ou apparaît une fente lumineuse, dont on observe, dans une lunette, les images réfléchies dans deux miroirs plans verticaux, l'un fixe, l'autre monté sur le couteau du pendule : quand le pendule passe dans la position d'équilibre, les images coïncident.

J. TROWBRIDGE. — Un *phasemètre*, p. 232.

C'est une application de la méthode de Lissajous. A deux diaphragmes de téléphones sont fixés deux petits miroirs disposés de manière à donner à un rayon lumineux, qui est réfléchi par tous les deux, deux mouvements rectangulaires entre eux. Les diaphragmes des téléphones ne sont pas également emboîtés à tous les coins; on peut modifier le serrage de façon à régler le mouve-

ment du diaphragme à l'absence du courant alternatif employé. Une variation dans la phase relative des courants, dans les deux téléphones, modifiera la figure de Lissajous obtenue.

C.-E. LINEBARGER. — Nature des solutions colloïdales. p. [illegible].

Les poids moléculaires de la dextrine et de la gomme arabique déterminés par leurs pressions osmotiques. p. [illegible].

L'auteur rappelle en quoi une solution de *colloïde* se distingue d'une simple *suspension* dans le liquide ; entre autres propriétés, les solutions de colloïdes ont un coefficient de diffusion défini et exercent une pression osmotique définie. Dans le cas de substances étudiées récemment par Keiffer, la gomme arabique, la dextrine, comme dans le cas de l'acide tungstique colloïdal, la molécule qui intervient dans le phénomène de l'osmose se trouve être sept fois la molécule chimique.

M. J. PUPIN. — Sur l'action mutuelle des courants de décharge dans le vide. p. 263.

Décharges électriques à travers le vide imparfait et décharges en forme de couronnes. p. 463.

Pour étudier l'action réciproque des courants de décharge passant dans l'air raréfié, M. Pupin prend d'abord un réservoir de verre, où aboutissent, de chaque côté, deux tubes en relation avec des ballons de verre recouverts, à l'extérieur, de papier d'étain. On a ainsi deux appareils à vide sans électrodes qui ont une partie centrale commune. Les deux traînées lumineuses, sensiblement parallèles, obtenues en reliant les quatre ballons deux à deux aux pôles d'une bobine d'induction, sont d'abord courbes et tournent leur convexité l'une vers l'autre : pour une valeur déterminée de la pression, elles deviennent rectilignes, puis s'infléchissent en sens inverse, tournant leur concavité vers l'intérieur.

L'auteur s'est demandé s'il fallait voir là une répulsion électrostatique, arrivant à l'emporter sur l'attraction électrodynamique. Il conclut qu'il n'y a pas d'effet direct d'un courant sur l'autre, en refaisant l'expérience avec deux réservoirs distincts, ne

communiquant plus directement; dans ce cas, il n'y a aucune action d'un des courants de décharge sur l'autre.

Il décrit plusieurs expériences sur la décharge dans les tubes sans électrodes, analogues aux expériences de J.-J. Thomson et de M. Tesla. Les photographies obtenues rappellent celles de la couronne solaire.

F.-J. ROGERS. — Magnésium comme source de lumière, p. 301.

L'étude de la lumière du magnésium a donné les résultats suivants. Le spectre de la lumière du magnésium, déjà étudié par Pickering, se rapproche beaucoup plus du spectre solaire que le spectre d'aucune autre lumière artificielle. La température de la flamme du magnésium, qui est d'environ 1340°, est intermédiaire entre celle du brûleur Bunsen et celle de la lampe à appel d'air, bien que le caractère de son spectre soit celui d'un spectre correspondant à une température de 5000° C. environ, si la lumière était due à une incandescence ordinaire. La *puissance rayonnée* est 13,5 pour 100, valeur plus haute que pour aucune autre source artificielle (excepté peut-être la lumière de la décharge électrique dans le vide pour laquelle M. Staub de Zurich a trouvé 34 pour 100). L'énergie rayonnée émise par le magnésium brûlant est d'environ 4630 calories par gramme de métal brûlé ou 75 pour 100 de la chaleur totale de combustion; elle n'est que de 15 à 20 pour 100 dans le cas du gaz d'éclairage. Le rendement total est d'environ 10 pour 100 pour le magnésium au lieu de un quart pour 100 pour le gaz d'éclairage.

C.-C. HUTCHINS. — Radiation de l'air atmosphérique, p. 357.

Note sur l'absorption de la chaleur rayonnante par l'alun, p. 526.

Un tuyau de fer galvanisé de 1^m de long, de 2,5 pouces de diamètre, est incliné d'un angle de 45° environ; on le chauffe à la partie inférieure : l'air chaud s'échauffe en haut par un bec de plomb dont on peut régler la position de telle sorte que la colonne d'air chaud conserve, dans l'atmosphère de la salle, après la sortie du tube, des dimensions bien constantes le plus longtemps possible. C'est cet air chaud qui est la source de cha-

leur dont on étudie la radiation avec un élément thermo-électrique. Les résultats obtenus varient d'un jour à l'autre; les plus faibles proportions de gaz étrangers modifient la radiation : l'humidité accroît la radiation d'une façon régulière. Si la colonne rayonnante est amincie, au-dessus d'une certaine section, le rayonnement est nul, et la radiation rapportée à l'unité de surface rayonnante augmente rapidement avec la section de la colonne jusqu'à devenir constante. La chaleur rayonnée correspond à des longueurs d'onde assez grandes pour qu'elle soit totalement arrêtée par une lame de quartz.

A propos d'un reproche adressé, dans un Mémoire sur le magnésium, à Julius Thomsen par M. Rogers, M. Hutchins a fait des expériences pour voir si la solution d'alun absorbait les rayons calorifiques mieux que l'eau pure : il trouve que ce sont les lames d'alun solide qui sont des absorbants énergiques pour la chaleur obscure, mais que la solution d'alun n'est pas un meilleur absorbant que l'eau pure.

CLEVELAND ABBE. — Radiation atmosphérique de la chaleur et son importance en Météorologie, p. 364.

Une partie de la chaleur versée à notre globe par le Soleil est rayonnée vers l'espace, non pas par la surface même de la terre, mais par les couches inférieures de l'atmosphère qui rayonnent leur chaleur au travers des couches supérieures, et celles-ci rayonnent aussi vers l'espace. Le pouvoir émissif de l'air, déduit des nombres de Maurer pour le rayonnement annuel moyen, est notablement inférieur au nombre donné par Hutchins : il n'y a pas à s'étonner outre mesure de ce désaccord, étant donnée l'incertitude du calcul qu'on fait subir au nombre de Maurer. L'auteur montre comment l'énorme chaleur, ainsi rayonnée par l'atmosphère elle-même, intervient dans l'explication de certains phénomènes météorologiques.

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-CHIMIQUE RUSSE.

Vol. XXIV, n°s 1, 2, 3, 4; année 1892.

A. POTILIZINE. — Méthode nouvelle pour déterminer le point de fusion des substances inorganiques, p. 1-23.

(Partie du Journal commune aux deux Sections).

On obtient des résultats concordants à $\pm 0^{\circ},016$C. près, en déterminant directement, à l'aide d'un thermomètre sensible et bien vérifié, la température de fusion ou de solidification, à la condition d'employer au moins 20^{gr} de matière et de faire varier la température lentement, 1°C. par minute à peu près. Mais on dispose rarement d'une aussi grande quantité de matière à essayer : par conséquent, on a été contraint d'imaginer plusieurs méthodes ne demandant que très peu de matière, et se basant sur l'emploi des tubes capillaires ou du courant électrique. Les résultats obtenus par ces méthodes diffèrent notablement entre eux, si l'on fait varier le diamètre des tubes capillaires ou l'épaisseur de la couche de la matière; les températures obtenues sont généralement plus élevées que celles déterminées par la méthode directe. La méthode calorimétrique de Carnelly pour les sels plus réfractaires, basée sur l'emploi d'un creuset en platine épais, contenant quelques milligrammes de matière, donne des résultats encore moins précis (différences de 4°C. à 14°C.).

L'auteur propose l'emploi d'un tube deux fois recourbé, formant un manomètre ouvert, rempli de mercure. La branche inférieure doit être étirée et la pointe capillaire résultante plongée pendant quelques secondes dans la matière à essayer à l'état fondu, pour la boucher hermétiquement. En cet état, on l'introduit à côté d'un thermomètre dans un tube à réaction plongé dans un bain de matière, approprié à la température à observer et chauffé lentement. Au moment de la fusion du bouchon, le mercure du manomètre baisse brusquement. L'auteur a trouvé, par sa méthode, la température de fusion du bromure d'argent égale à

$$428^{\circ},6\,\text{C.} \pm 0,115,$$

et celle de l'azotate de potasse égale à $336,57 \pm 0,11$. Le dia-

mètre de la partie capillaire du tube variait de $0^{mm},6$ à $0^{mm},8$ et la longueur du bouchon de matière à essayer était à peu près 6^{mm}.

La même méthode peut servir aussi pour les températures plus hautes : dans ce cas, le tube manométrique est fait en verre réfractaire et le thermomètre est remplacé par un morceau de platine que l'on fait tomber dans un calorimètre au moment de la fusion, indiquée par le mouvement du mercure du manomètre.

P. BACHMETIEFF. — Chaleur *magnétique* des fils de fer et de nickel soumis à une tension longitudinale, p. 1-8.

L'origine du son émis par le fer sous l'influence d'une aimantation intermittente, aussi bien que le changement de ses propriétés thermo-électriques par l'aimantation, étant expliquées par les variations de ses dimensions, l'auteur a eu l'idée d'entreprendre des expériences pour constater que l'échauffement du fer pendant son aimantation peut aussi être attribué uniquement à cette cause secondaire. Mais les résultats ont été négatifs. Un couple thermo-électrique, cuivre et maillechort, a été placé en contact avec le fil; celui-ci est étiré par l'intermédiaire d'un levier chargé de poids et aimanté par un courant intermittent; ce courant passe dans une bobine isolée du fil étiré par un espace annulaire traversé par un courant d'eau, afin d'obvier à l'échauffement direct. Pour un fil de fer bien recuit, l'échauffement décroît quand on augmente la tension, atteint un minimum et croît de nouveau pour des charges encore plus grandes. L'inverse se présente pour un fil de nickel; un fil de cuivre ne s'échauffe pas du tout, et, par suite, l'action des courants induits est insignifiante. La tension correspondante au minimum d'échauffement pour le fer est celle pour laquelle la variation de longueur s'annule; par conséquent, on ne peut pas attribuer la *chaleur magnétique* à la seule variation des dimensions.

N. DELAUNAY. — Note sur la théorie cinétique des gaz, p. 9-12.

La théorie du mouvement hélicoïdal de Ball démontre qu'un ellipsoïde à trois axes, solide et élastique, peut recevoir un mouvement hélicoïdal dextrogyre par des chocs reçus en quelques

points de quatre de ses octants, mais que les chocs reçus aux points des quatre autres octants produisent un mouvement hélicoïdal lévogyre. Par conséquent, un gaz idéal, formé de molécules ellipsoïdales, présente une sorte de bipolarité : une partie de ses molécules possède un mouvement hélicoïdal dextrogyre et les autres un mouvement lévogyre.

D. BOBYLEFF. — Mouvement d'une sphère creuse, contenant un gyroscope en rotation et roulant sur un plan horizontal p. 14-15.

L'auteur a déjà communiqué, l'année précédente, à la Société mathématique de Saint-Pétersbourg, la théorie mathématique de ce genre de mouvement. La courbe décrite par le point de contact est analogue à la courbe élastique; elle consiste en parties qui se répètent périodiquement, mais leur forme varie beaucoup selon les conditions du commencement du mouvement. L'appareil a été construit par M. Frauzenne, mécanicien de l'Université de Saint-Pétersbourg. Pour observer les courbes, on fait rouler la sphère sur une table saupoudrée de lycopode, ou mieux encore, sur un double de papier à calquer et de papier blanc : le poids de la sphère est suffisant pour tracer une empreinte nette de sa trajectoire.

D. GOLDHAMMER. — Essai sur la théorie électromagnétique de la dispersion et de l'absorption de la lumière, p. 17-40.

L'auteur remarque que la théorie électromagnétique de Kolaczek, tout en donnant des résultats conformes à l'expérience quand il s'agit des phénomènes optiques, conduit à la conclusion erronée que la résistance de tous les milieux pour un courant stationnaire est infiniment grande. Pour obvier à cet insuccès, il cherche à remplacer les formules fondamentales de Maxwell par d'autres, un peu plus générales, qui conduisent à des formules résultantes contenant un plus grand nombre de constantes arbitraires et susceptibles de s'adapter mieux aux données de l'expérience.

D. GOLDHAMMER. — La théorie électromagnétique explique-t-elle les phénomènes lumineux dans les métaux? p. 40-44.

M. Cohn, dans un Mémoire publié dans le volume LV des *Annales de Wiedemann,* démontre que la théorie de Maxwell est en contradiction complète avec les données expérimentales concernant les phénomènes optiques dans les métaux. L'auteur remarque que les définitions que Maxwell donna aux quantités D et x s'appliquent à l'état stationnaire du milieu, c'est-à-dire au cas où la période d'oscillation est ∞. Pour tous les cas où cette condition est remplie, les résultats de sa théorie s'accordent parfaitement avec l'expérience. Mais on n'a plus le droit d'appliquer les formules de Maxwell aux cas pour lesquels la période d'oscillation n'est plus infinie, sans leur faire subir des modifications appropriées que l'auteur indique.

W. LERMANTOFF. — A propos des expériences sur la production artificielle de la pluie, p. 69.

Étant posé que l'introduction des produits d'une explosion ou bien la concussion seule peuvent produire la pluie, il est nécessaire de les faire parvenir dans la couche atmosphérique dans laquelle les conditions propres à la formation de la pluie existent. Nous possédons déjà dans divers mouvements tourbillonnaires, si bien étudiés par Thomson, Helmholtz et autres, un moyen pour atteindre ce but, moyen qui paraît inconnu aux expérimentateurs américains. M. Guillaume cite dans *La Nature* le fait d'une pluie abondante qui a suivi immédiatement l'explosion d'une fabrique de dynamite près de Bordeaux; or, on construit cette sorte d'édifice avec des murs solides et une toiture légère, conditions éminemment favorables pour la formation d'un tourbillon annulaire, dirigé vers le haut.

W. LERMANTOFF. — Sur la construction des chapes en agate pour les aiguilles aimantées, d'après la méthode de feu G. Brauer, p. 70.

Au lieu de chercher à produire un trou conique, ce qui est pratiquement impossible, M. Brauer lui donnait la forme d'une surface sphérique, de $0^{mm},5$ à 1^{mm} de rayon, en usant la pièce à l'émeri à l'aide d'une broche arrondie en laiton, tournant très vite,

et en polissant à la manière usitée par les lapidaires. La pointe d'acier a été formée sur le tour à l'aide d'une fine pierre à aiguiser; sous un grossissement de cinquante fois, elle doit présenter la forme d'un ellipsoïde de rotation très allongé. Le contact entre ces deux surfaces (quoique de second ordre) se produit en un point, tandis que dans la construction usuelle il se forme bien vite une paire de facettes qui glissent l'une sur l'autre. Quelques courtes aiguilles de galvanomètre, récemment faites d'après cette méthode par le mécanicien du laboratoire de Physique de l'Université de Saint-Pétersbourg, M. Frauzenne, ont donné une mobilité bien supérieure à celle des galvanomètres de Siemens.

W. WITKOWSKY. — Sur l'appareil de M. Ederin pour la mesure des bases géodésiques, p. 77-95.

L'appareil de M. Éderin a pour but d'accélérer les opérations nécessaires pour la mesure d'une base, sans en diminuer la précision. Il est formé d'un fil d'acier et d'un autre en laiton, de 25^m de longueur et de 2^{mm} de diamètre, chacun, tendus, pendant l'emploi, librement à la main, mais par l'intermédiaire de dynamomètres, qui doivent indiquer toujours la tension normale de 10^{kg}. Chaque fil est prolongé aux deux bouts par des réglettes divisées en millimètres. Un des deux observateurs amène le zéro de sa réglette en contact avec un repère, placé sur un trépied léger, et l'autre fait en même temps la lecture de la position du deuxième repère sur la réglette correspondante. Immédiatement après, l'opération est répétée à l'aide du deuxième fil, pour pouvoir éliminer l'influence de la température. La distance des zéros des réglettes étant mesurée dans les mêmes conditions de tension du fil, la précision de la mesure devient très grande. L'auteur a entrepris une série de mesures de deux bases par l'appareil de M. Éderin, suivies de vérifications de l'appareil lui-même. Les erreurs probables de l'observation variaient entre $\pm 0^{mm},34$ et $1^{mm},21$ ou entre $\frac{1}{3176000}$ et $\frac{1}{992700}$ de la longueur de la base mesurée. Les vérifications des fils à diverses époques ont constaté une diminution de leur longueur bien appréciable, due probablement à la réaction élastique, de sorte qu'il a fallu représenter la longueur du fil à une époque donnée par une formule parabolique.

V. ROSENBERG. — Appareil pour simuler le phénomène de la déviation des vents alizés, p. 96-97.

On place un vase cylindrique en verre sur une petite plate-forme horizontale, fixée sur l'axe de la machine centrifuge, et l'on dispose dedans deux tubes verticaux munis de réservoirs d'eau et de becs effilés, courbés horizontalement de manière que l'un des minces filets s'écoule le long d'un rayon, du centre à la circonférence, et l'autre de la circonférence au centre. Pendant la rotation de l'appareil, on voit les deux veines liquides se dévier conformément à la loi des vents alizés. W. Lermantoff.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annales de Chimie et de Physique.

6e série, t. XXVI; août 1892.

Mascart. — *Sur l'arc-en-ciel*, p. 501.

T. XXVII; septembre 1892.

E. Bouty. — *Sur la coexistence du pouvoir diélectrique et de la conductibilité électrolytique*, p. 62.

J. Macé de Lépinay et A. Pérot. — *Contribution à l'étude du mirage*, p. 94.

W. Louguinine. — *Détermination des chaleurs spécifiques de l'érythrite et de la mannite*, p. 138.

Octobre 1892.

C. Miculescu. — *Sur la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur*, p. 202.

Philosophical Magazine.

5e série. T. XXXIV; août 1892.

Lord Rayleigh. — *Sur l'instabilité d'un cylindre d'un liquide visqueux sous l'action des forces capillaires*, p. 145.

C. Chree. — *Cylindres élastiques tournants de section elliptique*, p. 154.

E. Wytke Smith. — *Note sur la mesure de la résistance interne des piles*, p. 173.

Lord Rayleigh. — *Sur l'instabilité des surfaces fluides cylindriques*, p. 177.

W.-B. Croft. — *Figures produites par l'haleine*, p. 180.

E. Edser et H. Stansfield. — *Instrument portatif pour mesurer les champs magnétiques; avec quelques observations sur le champ inutilisé des dynamos*, p. 186.

F.-Y. Edgeworth. — *Moyennes corrélatives*, p. 190.

Liveing et Dewar. — *Sur le spectre de l'oxygène liquide et sur les indices de réfraction de l'oxygène, du bioxyde d'azote et de l'éthylène*, p. 205.

Septembre 1892.

A.-B. Basset. — *Difficultés de la théorie de l'écrasement des conduites à vapeur*, p. 221.

W. Williams. — *Sur la relation des dimensions des quantités physiques aux directions de l'espace*, p. 234.

F. Bedall et A.-C. Crehore. — *Résistance, self-induction et capacité équivalentes des circuits parallèles soumis à des forces électromotrices harmoniques*, p. 271.

T. Trouton. — *Sur la théorie et l'usage de noyaux aimantés d'une manière permanente, dans le téléphone*, p. 276.

A.-A. Michelson. — *Sur l'application des méthodes interférentielles aux mesures spectroscopiques*, p. 280.

M.-M.-P. Rudski. — *Note sur le niveau de compression nulle dans une sphère homogène qui se refroidit*, p. 299.

Octobre 1892.

Lord Rayleigh. — *Intensité de la lumière réfléchie par l'eau et le mercure au voisinage de l'incidence normale*, p. 309.

Prof. Ewing. — *Sur les joints dans les circuits magnétiques*, p. 320.

J. Dewar et J.-A. Fleming. — *Sur la résistance électrique de métaux purs, d'alliages et de corps non métalliques à la température d'ébullition de l'oxygène*, p. 326.

E.-B. Rosa. — *Nouvelles expériences sur la capacité inductive des électrolytes*, p. 344.

R.-H.-M. Bosanquet. — *Calcul du pouvoir éclairant des hydrocarbures et de leurs mélanges*, p. 355.

G.-D. Liveing. — *Note sur la prétendue découverte par Plücker du spectre de lignes de l'hydrogène dans la flamme oxyhydrique*, p. 371.

C. Barus. — *Propriétés thermo-électriques du platine iridié et du platine rhodié*, p. 376.

Wiedemann's Annalen.

T. XLVI, n° 8; 1892.

H. Rubens et B.-W. Snow. — *Sur la réfraction des rayons de grande longueur d'onde dans le sel gemme, la sylvine et la fluorite*, p. 529.

H.-E.-J.-G. du Bois. — *Réflexion et transmission de la lumière à travers certains objets ælotropes*, p. 542.

E. Ketteler. — *L'indice de réfraction limite pour des longueurs d'onde infiniment grandes; transformation des formules de dispersion*, p. 572.

Ph. Lenard. — *Sur l'électricité développée par les chutes d'eau*, p. 584.

Ph. Lenard. — *Note sur un phosphoroscope éclairé par l'étincelle*, p. 637.

A. Toepler. — *Sur la production et l'observation d'oscillations électriques très rapides*, p. 642.

A. Winkelmann. — *Sur l'emploi et le mode d'action du téléphone dans les méthodes électriques de zéro*, p. 666.

T. XLVII, n° 9; 1892.

H. von Helmholtz. — *Le principe de la moindre action en électrodynamique*, p. 1.

W. Negbaur. — *Sur les différences de potentiel de piles avec des électrolytes solides secs*, p. 27.

U. Saxen. — *Sur la réciprocité de l'endosmose électrique et des courants dus à l'écoulement*, p. 46.

V. Bjerknes. — *Phénomènes de résonance et pouvoir absorbant des métaux pour l'énergie des ondes électriques*, p. 69.

L. Zehnder. — *Reproduction objective des recherches de Hertz sur les rayons de force électrique*, p. 77.

D.-A. Goldhammer. — *Dispersion et absorption de la lumière d'après la théorie électrique de la lumière*, p. 93.

L. Holborn et Wien. — *Sur la mesure des hautes températures*, p. 107.

G. Melander. — *Sur la dilatation des gaz aux basses pressions*, p. 135.

J. v. Zakrzevski. — *Sur la chaleur spécifique et la chaleur latente de fusion de la glace*, p. 155.

K. von der Mühl. — *Sur les vues théoriques de Georg Simon Ohm*, p. 163.

M. Toepler. — *Changement du volume spécifique du soufre avec la température*, p. 169.

K. Wesendonck. — *Remarques sur le Mémoire de M. von Obermayer :* Sur les décharges électriques par les pointes, etc., p. 175.

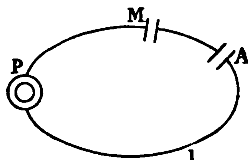
SUR LA COEXISTENCE DU POUVOIR DIÉLECTRIQUE ET DE LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTROLYTIQUE;

PAR M. E. BOUTY (1).

1. Beaucoup de corps isolants à froid deviennent des électrolytes à une température suffisamment élevée. Comment s'opère la transition? Y a-t-il, à partir d'une certaine température, coexistence du pouvoir diélectrique et de la conductibilité électrolytique et quels en sont les effets (2)? Telles sont les questions que je me suis posées et qui m'ont amené à entreprendre le présent travail.

2. Les appareils et les méthodes que j'ai employés sont les mêmes qui m'ont déjà servi dans l'étude des propriétés diélectriques du mica (3), ce qui me permettra d'être très bref. Le circuit d'une pile P (*fig.* 1) de force électromotrice E constante

Fig. 1.



et de faible résistance contient : 1° l'appareil A (condensateur ou auge électrolytique) que l'on veut étudier; 2° un microfarad auxiliaire M; 3° un pendule interrupteur I qui permet de fermer le circuit pendant des temps t connus, très courts et variables à volonté.

---

(1) Extrait d'un Mémoire plus étendu publié dans les *Annales de Chimie et de Physique,* 6e série, t. XXVII; septembre 1892.

(2) MM. Cohn et Arons (*Wied. Ann.*, t. XXVIII, p. 454; 1886 et *Journal de Physique,* 2e série, t. VI, p. 546) ont prouvé les premiers que l'on considérait à tort comme infinie la constante diélectrique des corps conducteurs, et démontré expérimentalement la superposition du pouvoir diélectrique et de la conductibilité dans un certain nombre de liquides mauvais conducteurs.

(3) *Étude des propriétés diélectriques du mica* (*Annales de Chimie et de Physique,* 6e série, t. XXIV, p. 394).

Supposons d'abord que A est un condensateur à diélectrique parfait, dont la capacité C est négligeable par rapport à celle du microfarad. Quand l'équilibre électrique est établi, la charge q_1 du microfarad est égale à celle du condensateur A et cette dernière a très sensiblement pour valeur

$$q_1 = CE. \tag{1}$$

Si la résistance de la pile et des conducteurs est négligeable, l'équilibre pourra être considéré comme atteint au bout d'un temps θ très court, moindre que un dix-millième de seconde par exemple, et la charge q reçue par le microfarad demeurera invariable pour toute durée de fermeture du circuit supérieure à θ.

Supposons en second lieu que A est une auge électrolytique non polarisée, de capacité électrostatique pratiquement nulle, mais dont la résistance r est énorme.

L'équilibre électrique ne sera atteint qu'au bout d'un temps extrêmement long, et le microfarad recevra dans un temps t une charge égale à celle qui est débitée à travers l'auge. La résistance de la pile et des conducteurs métalliques étant toujours supposée négligeable, les électrodes sont portées dans un temps θ très court à la différence de potentiel E caractéristique de la pile : dès lors l'auge est traversée par un courant dont l'intensité initiale $\frac{E}{r}$ ne décroît ensuite que très lentement en vertu de la polarisation. L'auge débite donc et le microfarad reçoit, dans le temps t, une charge q_2 pratiquement égale à $\frac{E}{r}t$

$$q_2 = \frac{E}{r}t. \tag{2}$$

Tous ces résultats ont été vérifiés directement.

Supposons enfin que l'on place en A un condensateur parfait de capacité C, mais qui porte en dérivation l'auge électrolytique dont nous venons de parler. La charge Q reçue dans le temps t par le microfarad sera la somme des charges q_1 et q_2 reçue par le condensateur et débitée par l'auge, et il en sera évidemment de même si le condensateur et l'auge sont superposés, c'est-à-dire dans le cas pratique d'un condensateur imparfait dont le diélectrique

possède une faible conductibilité électrolytique. On aura donc

$$(3) \qquad Q = q_1 + q_2 = CE + \frac{E}{r} t = \frac{E}{r}(Cr + t).$$

3. Voici maintenant la manière de procéder aux expériences définitives.

Après avoir constitué un condensateur A à lame d'air et déterminé la charge q qu'il reçoit d'une pile de force électromotrice E, on étudie la variation avec le temps de la charge Q emmagasinée par le microfarad, quand on a remplacé l'air du condensateur A par la substance à la fois diélectrique et conductrice qu'il s'agit d'étudier. Soient c la capacité du condensateur à lame d'air, C la capacité initiale du condensateur à lame diélectrique et conductrice, k la constante diélectrique. On a, par des définitions,

$$(4) \qquad q = cE = \frac{C}{k} E.$$

Nous avons vu qu'on a, d'autre part,

$$(3) \qquad Q = \frac{E}{r}(Cr + t).$$

Or, entre la capacité C d'un condensateur à lame diélectrique de forme quelconque et la résistance r d'une masse conductrice de même forme et de dimensions identiques, subsiste la relation (5),

$$(5) \qquad Cr = \frac{k\rho}{4\pi}.$$

Dans cette formule, ρ représente la résistance spécifique de la substance conductrice, *cette dernière étant évaluée dans le système d'unités électrostatiques*. C et r doivent être exprimés dans un même système qui peut être indifféremment le système électrostatique ou le système électromagnétique.

En substituant à C sa valeur tirée de (5) dans les formules (4) et (3), elles deviennent

$$(6) \qquad q = \frac{E}{r} \frac{\rho}{4\pi},$$

$$(7) \qquad Q = \frac{E}{r}\left(\frac{k\rho}{4\pi} + t\right),$$

d'où

$$\frac{Q}{q} = k + \frac{4\pi}{\rho} t. \tag{8}$$

Le second membre de (8) est indépendant de l'unité de charge adoptée, de la force électromotrice de la pile, de la forme et des dimensions du condensateur. Toutes ces données peuvent être choisies par d'autres considérations, et les mesures de Q et de q détermineront à la fois k et ρ, la constante diélectrique et la résistance spécifique de la matière étudiée.

4. Pour que les expériences soient possibles, c'est-à-dire pour qu'elles fournissent *à la fois* des valeurs de k et de ρ suffisamment exactes, il est nécessaire que les deux termes du second membre de (8) soient du même ordre de grandeur. Les valeurs que l'on peut donner à t, limitées par la qualité de l'interrupteur, sont susceptibles de varier, dans mes expériences, de $0^s,0001$ à $0^s,03$. Le produit $\frac{k\rho}{4\pi} = T$, qui a les dimensions d'un temps, doit donc être compris entre des limites du même ordre, ce qui restreint singulièrement le choix des substances à étudier. Si T est trop petit, l'effet de la conductibilité domine au point de rendre la détermination de k illusoire; s'il est trop grand, c'est ρ qui sera mal déterminé.

Pratiquement j'ai reconnu que ma méthode ne peut être employée à la mesure d'une résistance spécifique que si la valeur de cette résistance (ρ) *évaluée dans le système électromagnétique* est inférieure à 10^{13} ohms; elle ne s'applique à la mesure de k que pour des résistances spécifiques supérieures à 10^9 ohms. La première limite est sans importance, puisque des procédés bien connus permettent de mesurer des valeurs de (ρ) très supérieures. Il n'en est pas de même de la seconde : la méthode que je propose me paraît en effet être la première qui permette de constater, *avec une certitude qui ne laisse aucune place au doute,* l'existence du pouvoir diélectrique chez les corps doués d'une conductibilité électrolytique sensible.

On remarquera que la plus forte résistance spécifique trouvée par M. Foussereau pour l'eau distillée (¹) est seulement de

(¹) FOUSSEREAU, Thèse de doctorat, *Annales de Chimie et de Physique,* 6ᵉ série. t. V, p. 340; 1885.

7.10^5 ohms, et pour l'alcool absolu ([1]) de 7.10^6 ohms. Pour atteindre directement cette dernière substance, il faudrait rendre mon interrupteur environ cent fois plus exact, et mille fois plus exact pour l'eau distillée. *Il faudrait aller encore un million de fois au delà* pour s'attaquer aux sels fondus ou aux dissolutions salines concentrées.

I. — Corps liquides.

5. En dehors des isolateurs proprement dits tels que la benzine, l'essence de térébenthine et le sulfure de carbone purs, on peut s'adresser à des échantillons plus ou moins impurs de ces substances ou à des mélanges de ces mêmes corps avec quelques centièmes d'alcool ou d'éther.

Voici d'abord les résultats relatifs aux liquides isolants ([2]) :

Substance.		k.	(ρ) en ohms.
Sulfure de carbone		2,715	$> 1,5.10^{13}$
Essence de térébenthine		2,314	$= 1,75.10^{12}$
Benzine n° 1	à 20°	2,21	$1,56.10^{12}$
	à 70°	2,22	$7,90.10^{11}$
Benzine n° 2		2,315	$2,86.10^{12}$
Benzine ordinaire		2,395	$1,09.10^{12}$

On remarquera que, pour divers échantillons d'une même substance, la constante diélectrique varie peu, tandis que la résistance spécifique est susceptible de varier dans des limites assez larges, conformément à ce qu'on savait déjà sur la conductibilité des substances isolantes. Quand on élève la température, la constante diélectrique demeure sensiblement invariable, tandis que la résistance spécifique diminue rapidement.

6. L'addition d'alcool à la benzine élève sensiblement la constante diélectrique et diminue la résistance spécifique dans un rapport considérable. Avec un mélange de 19 parties en poids de la benzine n° 2 du Tableau ci-dessus, et de 1 partie d'alcool, on a trouvé

$$k = 2,635, \qquad (\rho) = 2,133.10^{10} \text{ ohms}.$$

([1]) Foussereau, *Journal de Physique*, 2e série, t. IV, p. 454; 1885.

([2]) Tous les produits purs employés dans ce travail ont été fournis par MM. Poulenc.

Si l'on imagine que la benzine et l'alcool conservent, dans ce mélange, leur pouvoir diélectrique et leur conductibilité propres, on pourra déduire de ces mesures, par extrapolation, la constante diélectrique x et la résistance spécifique y de l'alcool absolu employé. Occupons-nous d'abord de la résistance spécifique. En admettant, pour densités de la benzine et de l'alcool à la température de l'expérience, respectivement 0,878 et 0,792, la composition en volume du mélange est :

Alcool	0,0551
Benzine	0,9449

et l'on aurait, pour déterminer y,

$$0,0551 \frac{1}{y} + 0,9449 \frac{1}{2,86.10^{12}} = \frac{1}{2,133.10^{10}},$$

d'où

$$y = 1,18.10^{8} \text{ ohms}.$$

Le même calcul, appliqué à un mélange de 5 pour 100 en poids d'alcool et 95 de sulfure de carbone, a donné seulement

$$y = 1,45.10^{9} \text{ ohms}.$$

Les nombres ainsi trouvés sont respectivement dix-sept fois et deux fois environ supérieurs à la plus grande résistance spécifique mesurée par M. Foussereau pour l'alcool absolu, et je me suis assuré, au contraire, que mon alcool était meilleur conducteur que celui de M. Foussereau.

D'ailleurs, si l'on étudie successivement divers mélanges formés aux dépens de la même benzine et du même alcool, on trouve que la conductibilité croît en proportion beaucoup plus rapide que l'alcool ajouté. Ainsi, pour trois mélanges contenant respectivement 2, 4,5 et 7 pour 100 d'alcool en poids, les conductibilités mesurées se sont trouvées entre elles comme les nombres 1, 13,7 et 94.

Pour interpréter ce résultat, on doit admettre que l'alcool doit la plus grande part de sa conductibilité à quelque substance étrangère peu ou point soluble dans la benzine pure, et qui ne peut subsister, en totalité, dans les mélanges de benzine ou de sulfure de carbone trop pauvres en alcool. La résistance spécifique appar-

tenant en propre à l'alcool se trouverait du même ordre que celle de la benzine ou des autres bons isolateurs.

7. En ce qui concerne le pouvoir diélectrique, sans donner précisément un nombre constant, des calculs de ce genre fournissent au moins des résultats d'un ordre de grandeur invariable. Pour le mélange de 5 pour 100 en poids d'alcool et de 95 de benzine étudié ci-dessus, on a l'équation

$$0,0551\,x + 0,9449.2,315 = 2,635,$$
$$x = 8,13.$$

Trois autres mélanges contenant respectivement 2, 4,5 et 7 pour 100 d'alcool dans un autre échantillon de benzine ont donné respectivement :

Proportion d'alcool en poids.	x.
0,02	6,87
0,045	10,95
0,07	8,56

Enfin un mélange de 5 pour 100 d'alcool en poids et de 95 d'essence de térébenthine a donné

$$x = 5,15.$$

Ces divers nombres présentent entre eux des divergences assez considérables en valeur absolue, quoique médiocres, si l'on a égard à l'importance de l'extrapolation et aux variations énormes de la résistance spécifique. Leur moyenne

$$x = 7,93$$

donne au moins un renseignement approximatif relativement à la constante diélectrique de l'alcool pur.

Rappelons à cet égard que, dans un récent Mémoire, M. Rosa [1] donne pour la constante diélectrique de l'alcool le nombre 25,7 et que MM. Cohn et Arons [2] avaient trouvé, pour la même quan-

(1) ROSA, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 188; 1891.
(2) COHN et ARONS, *Wied. Ann.*, t. XXXIII, p. 13 et 31; 1888.

tité, la valeur 26,8. Des nombres aussi élevés paraissent incompatibles avec les résultats de l'ensemble de mes mesures.

8. Je n'ai fait qu'une seule mesure sur un mélange de 0,05 d'éther et 0,95 d'essence de térébenthine; elle donne, pour la constante diélectrique de l'éther.

$$x = 4,76.$$

M. Quincke (¹), qui a mesuré directement par diverses méthodes la constante diélectrique d'éther bien privé d'eau, a trouvé des nombres compris entre 4,4 et 4,8.

9. En résumé, *les expériences qui précèdent montrent nettement les effets de la superposition du pouvoir diélectrique et de la conductibilité électrolytique.* Elles ne prouvent cependant pas que les deux propriétés sont afférentes aux mêmes molécules, puisqu'on est au contraire bien certain que, dans les mélanges étudiés, la conductibilité est attribuable, au moins en grande partie, à des impuretés qu'ils renferment en quantités très minimes.

Cette objection mérite d'être discutée de près. Les expériences suivantes nous aideront peut-être à la résoudre.

II. — Glace et sels solides.

10. Parmi les corps solides conducteurs, j'ai étudié la glace et les azotates alcalins.

D'après M. Foussereau (²), la résistance spécifique de la glace d'eau distillée est déjà supérieure à 10^9 ohms à la température de — 1°. Quant aux azotates de potasse et de soude et à leurs mélanges, leur résistance à la température ordinaire est d'autant plus grande, elle reste supérieure à 10^9 ohms jusqu'à une température d'autant plus haute que leur point de fusion est lui-même plus élevé. Ainsi, pour l'azotate de soude fondant à 298°, cette résis-

(¹) QUINCKE, *Wied. Ann.*, t. XIX, p. 725; 1883.

(²) FOUSSEREAU, Thèse de doctorat, *Annales de Chimie et de Physique*, 6ᵉ série, t. V, p. 350, 365 et suiv.; 1885.

tance reste supérieure à 10^9 jusqu'à 167° environ, tandis que, pour le mélange à équivalents égaux d'azotates de potasse et de soude fondant à 219°, elle tombe au-dessous de cette limite, peu au-dessus de 50°. La méthode que j'ai décrite est applicable à ces corps entre les mêmes limites de température.

11. Les expériences sur les corps solides sont beaucoup plus délicates que les précédentes, relatives aux mélanges liquides. Outre la difficulté d'obtenir une couche mince et homogène remplissant exactement l'intervalle des plateaux du condensateur sans le déformer, on doit toujours redouter l'effet de la conductibilité de la couche superficielle qui, pour peu qu'elle soit notable, faussera complètement les résultats de l'expérience. On peut assimiler cette couche superficielle et la portion très étroite des bords du condensateur qu'elle intéresse à une auge électrolytique supplémentaire dont les dimensions et la conductibilité n'ont avec celles de l'auge principale aucune relation connue. Supposons réalisé le cas limite où, la capacité de polarisation de cette auge supplémentaire étant très faible et sa conductibilité relativement grande, la polarisation pourrait atteindre en $0^s,0001$ une fraction notable de sa valeur. Soit a la quantité d'électricité correspondante. Le débit propre de l'auge supplémentaire pourra être représenté par

$$Q' = a + bt + ct^2 + \ldots$$

et la quantité totale d'électricité recueillie par le microfarad serait

$$Q + Q' = \frac{E}{r}(Cr + t) + a + bt + ct^2 + \ldots.$$

Sa limite apparente pour $t = 0$ est non plus CE, mais $CE + a$.

Si l'on songe que, dans ces expériences, C ne dépasse jamais quelques millièmes de microfarad et que les capacités de polarisation peuvent être de l'ordre de $\frac{1}{10}$ de microfarad par millimètre carré, on jugera de l'importance des erreurs que l'on est ainsi exposé à commettre. La plus petite valeur trouvée pour C, et par conséquent pour k, sera toujours la plus probable.

12. *Glace*. — Un intérêt spécial s'attachait à l'étude de ce

corps. D'après MM. Cohn et Arons ([1]), Tereschin ([2]), Cohn ([3]), l'eau distillée possède une constante diélectrique quarante fois supérieure au carré de son indice de réfraction moyen. Plus récemment encore, M. Rosa ([4]) a trouvé

$$k = 75,7.$$

Il était curieux de savoir si ma méthode, appliquée à la glace, fournirait un nombre aussi considérable.

J'ai fait usage d'un condensateur en laiton dont les plaques, épaisses de 2^{mm}, ont environ 1^{dmq} de surface; elles sont séparées par des cales de mica et serrées par des vis isolées et placées à l'encontre des cales. Ce condensateur est soutenu horizontalement dans une cuvette de porcelaine A contenant de l'eau distillée récemment bouillie. A l'aide d'une lame de mica étroite et longue que l'on glisse entre les plateaux, on chasse soigneusement les bulles; puis la cuvette A est placée sur de petites cales dans une cuvette B plus grande où l'on introduit une quantité de chlorure de méthyle suffisante pour baigner le fond et un peu les bords de la cuvette A. La congélation de l'eau se produit lentement de bas en haut et le condensateur se trouve pris dans un bloc de glace dont la température s'abaisse finalement aux environs de $-23°$. La pile P de la *fig.* 1 est remplacée par une dérivation connue prise sur le circuit d'un élément Daniell.

L'une des meilleures expériences a donné

$$k = 78,8, \qquad (\rho) = 4,41.10^9.$$

La mesure, parfaitement normale et régulière, ne semble pas comporter de cause d'erreur capable d'altérer k du dixième de sa valeur. Celle-ci est presque identique aux valeurs de k proposées pour l'eau liquide par les expérimentateurs cités plus haut. Cette coïncidence, peut-être un peu fortuite, paraîtra cependant bien remarquable, eu égard à l'accroissement énorme de résistance qui accompagne la congélation.

([1]) Cohn et Arons, *Wied. Ann.*, t. XXXIII, p. 13; 1886.
([2]) Tereschin, *ibid.*, t. XXXVI, p. 792; 1889.
([3]) Cohn, *ibid.*, t. XXXVII, p. 42; 1889.
([4]) Rosa, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, p. 188; 1891.

En ce qui concerne la résistance spécifique, il faut bien spécifier qu'on ne mesure ici qu'une valeur *apparente* dénuée de signification précise. D'une part, rien ne garantit la parfaite uniformité de température de la glace; mais il faut surtout noter, d'autre part, que la glace se fend irrégulièrement en tous sens pendant le refroidissement, tout au moins à l'extérieur du condensateur; il est donc peu probable qu'elle demeure parfaitement continue entre les plateaux. Ces causes ne peuvent altérer notablement la valeur de k; mais la dernière peut suffire à fausser sensiblement la valeur de ρ.

13. Si à partir de $-23°$, on laisse la glace se réchauffer lentement, sa résistance spécifique *apparente* diminue beaucoup; dans une de mes expériences, j'ai pu continuer des mesures dans des limites où cette résistance est devenue quinze fois plus faible, sans que la constante diélectrique ait paru varier d'une manière sensible.

14. Des traces de sels en dissolution dans l'eau diminuent aussi beaucoup la résistance de la glace. Une expérience tentée avec de l'eau de Seine filtrée et bouillie a donné une valeur de (ρ) voisine de 5.10^7 ohms. Grâce à la grandeur de k, les mesures demeurent possibles quoique peu précises : j'ai trouvé en moyenne $k = 84$; ce nombre ne diffère de celui qui convient à la glace pure que de $\frac{1}{17}$, c'est-à-dire d'une quantité bien inférieure à la limite des erreurs que comporte la dernière mesure. M. Rosa avait déjà trouvé que des traces de sels en dissolution n'altèrent pas la constante diélectrique de l'eau liquide.

15. *Sels solides.* — J'attache une importance particulière aux mesures réalisées avec des sels solides. La conductibilité des liquides précédemment étudiés, celle de la glace elle-même, pouvaient être attribuées, au moins en partie, à des impuretés, c'est-à-dire à des molécules d'une autre nature, très conductrices, disséminées en petit nombre dans la masse principale isolante. Avec les sels solides rien de semblable à craindre : électrolytes parfaits quand ils sont fondus, ces sels conservent à l'état solide une conductibilité, qui, très grande encore au voisinage du point de fusion, diminue ensuite rapidement à mesure que la tempéra-

ture s'abaisse; s'ils renferment quelques traces d'impuretés, *la conductibilité spécifique de celles-ci est du même ordre;* leur influence est donc négligeable; il suffira d'éviter la formation d'une couche superficielle hygrométrique.

16. J'ai fait usage du condensateur à disques de fer employé pour les mélanges liquides. Ce condensateur est immergé dans le sel en pleine fusion; pendant le refroidissement on promène entre les plateaux une lame de mica, que l'on manœuvre à l'aide de pinces et de tiges de fer, de manière à chasser le plus possible les bulles, parfois assez adhérentes ([1]).

Cela fait je retire le condensateur du sel fondu au moment où la solidification va commencer, et je le laisse refroidir hors du bain en le maintenant bien horizontal; le liquide retenu par capillarité forme entre les plateaux une couche adhérente et régulière. Il ne reste plus qu'à plonger l'appareil encore chaud dans un bain de paraffine fondue qui l'enveloppera d'une couche bien isolante et dénuée de pouvoir hygrométrique.

17. L'azotate de potasse et l'azotate de soude purs, fondant respectivement à 327° et à 298°, sont d'un maniement relativement difficile pour ces expériences; ils offrent l'inconvénient de cristalliser en grosses masses par refroidissement et présentent alors des fissures visibles déjà nombreuses; la paraffine fondue pénètre en tous sens dans la masse, dont la structure, plus finement cloisonnée qu'on ne l'aurait supposé d'abord, apparaît très nettement quand on essaye ensuite de dissoudre le sel dans l'eau.

Le mélange à équivalents égaux d'azotates de potasse et de soude, beaucoup plus fusible (point de fusion 219°) fournit au contraire une masse d'apparence porcelanique et continue, dont la structure très finement cristalline, n'offre pas de fissures perceptibles à l'œil nu. C'est donc à ce mélange que j'ai eu principalement recours pour les expériences définitives.

([1]) Bien entendu, il faut s'assurer, en démontant le condensateur après chaque expérience, que cette condition a été parfaitement réalisée; ou, s'il est resté quelques petites bulles, en évaluer le mieux possible la surface, qui ne doit pas dépasser une petite fraction de la surface utile.

Quand un condensateur préparé avec ce mélange et bien paraffiné est abandonné à lui-même à la température ordinaire, la résistance croît peu à peu, sans doute en vertu des progrès de la cristallisation du mélange salin et des fissures imperceptibles qui l'accompagnent. Une mesure faite sur un tel condensateur le lendemain de sa construction a donné

$$k = 3,76 \qquad (\rho) = 6,05.10^{10} \text{ ohms.}$$

Deux nouvelles mesures, réalisées le surlendemain et le jour suivant, ont donné les couples de valeurs

$$k = 3,69 \qquad (\rho) = 1,64.10^{11} \text{ ohms,}$$
$$k = 4,01 \qquad (\rho) = 3,6.10^{11} \text{ ohms.}$$

La dernière valeur de k, la moins influencée par la conductibilité, doit être la plus exacte; nous adopterons en nombre rond la valeur

$$k = 4,$$

qui paraît aussi convenir à l'azotate de potasse et à l'azotate de soude purs.

En ce qui concerne la résistance spécifique, l'état plus ou moins avancé de la cristallisation, la moindre fissure résultant du retrait peuvent en modifier la valeur apparente; il ne faut donc attribuer qu'une importance secondaire aux nombres qui la représentent.

18. Il était particulièrement intéressant d'étudier l'effet de la température. Le même condensateur a été porté dans une étuve de Wiessnegg munie d'un régulateur, et deux bonnes séries de mesures ont pu être exécutées l'une à 52°, l'autre à 58°. Pendant chacune de ces mesures la température a été maintenue constante à moins de 1° près.

On a trouvé ainsi :

Température.	k.	(ρ) en ohms.
15,4	4,01	$3,6 \cdot 10^{11}$
52	4,72	$4,05 \cdot 10^{9}$
58	4,71	$2,61 \cdot 10^{9}$

La résistance spécifique *apparente* décroît avec une extrême rapidité, conformément aux résultats déjà cités des expériences de

M. Foussereau; de 15° à 58°, elle a varié dans le rapport de 138 à 1.

La constante diélectrique varie peu avec la température; l'accroissement de moins de $\frac{1}{6}$ indiqué par les expériences ci-dessus peut même se trouver exagéré.

Une expérience faite sur l'azotate de soude, spécialement en vue d'étudier les variations de k et de (ρ) avec la température, a fourni les résultats suivants qui, malheureusement, ne peuvent être donnés qu'en valeur relative, par suite de la présence, dans le condensateur, de bulles d'une importance notable.

Température.	$\frac{k_t}{k_{15}}$.	$\frac{\rho_t}{\rho_{15}}$.
15°	1	1
100	1,06	0,089
129	1,16	0,032
144	1,13	0,020
170	»	0,007

La conductibilité de l'azotate de soude à 144° ne peut être attribuée à une couche superficielle hygrométrique. *Nous nous trouvons donc en présence de corps chez lesquels le pouvoir diélectrique et la conductibilité, dont nous venons de constater la superposition, appartiennent bien aux mêmes molécules;* et le doute exprimé ci-dessus (p. 452) à propos des liquides, semble définitivement écarté.

19. Nous admettrons donc comme vraisemblable que, si les expériences pouvaient être étendues aux électrolytes ordinaires, elles fourniraient des résultats analogues et donneraient des valeurs finies de k. *La distinction entre les diélectriques et les électrolytes résiderait donc uniquement dans l'ordre de grandeur de leur conductibilité.*

20. Si l'on veut se former une image de la manière dont l'électricité agit dans ces expériences, on peut recourir à l'hypothèse de Grotthuss. Quand deux plaques métalliques, plongées au sein de la masse polarisable et électrolytique, sont portées à une certaine différence de potentiel, les molécules de la masse reçoivent une

orientation déterminée, ce qui n'exige qu'un temps très court et constitue la polarisation diélectrique; cette polarisation a pour effet l'écoulement sur les électrodes de la charge diélectrique CE. Ensuite, les chaînes électrolytiques se rompent, si toutefois elles en sont susceptibles, et le transport aux électrodes des ions libres est accompagné de l'écoulement, à travers l'auge, d'une quantité d'électricité $\frac{E}{r}t$.

CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DES CORPS ISOLANTS;

PAR M. ÉDOUARD BRANLY.

De même que les corps opaques sont transparents sous une petite épaisseur, les corps isolants sont susceptibles de devenir conducteurs quand on les prend en couches très minces.

Pour le montrer, formons à la température de fusion de la résine un mélange intime de résine et de limaille fine d'aluminium. Introduisons à chaud ce mélange dans un tube de verre entre deux tiges métalliques et laissons lui reprendre la température ordinaire. Le mélange devient solide et très dur, il est formé de particules métalliques séparées par des couches isolantes de résine extrêmement minces. Ce tube AB, placé dans le circuit d'un élément Daniell D et d'un galvanomètre G, oppose au courant une résistance qu'on peut dire infinie. Si sensible, en effet, que soit le galvanomètre, son aiguille n'est pas déviée. Si la proportion de résine a été suffisamment réduite, ce mélange isolant peut devenir conducteur sous diverses influences électriques, perdre sa conductibilité et la reprendre.

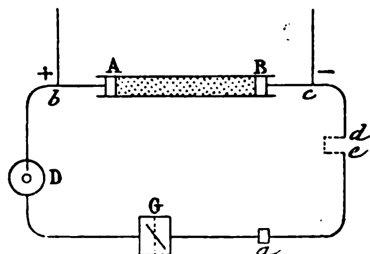
Supposons d'abord fermé et isolé le circuit qui comprend l'élément Daniell, le galvanomètre et le tube; l'aiguille du galvanomètre est au zéro. On interrompt le circuit en *de* et l'on relie un instant les extrémités *b* et *c* du tube AB aux deux pôles d'une pile de 250 éléments. Si, après avoir supprimé la communication avec la pile de 250 éléments, on ferme de nouveau le circuit en *de*, on constate que le tube AB est devenu conducteur, sa résistance n'est plus que de quelques centaines d'ohms et parfois beaucoup

moindre. Un petit coup de règle frappé sur la table qui porte le tube fait disparaître cette conductibilité.

Si l'un des pôles de la pile de 250 éléments est alors réuni à un point quelconque de notre circuit, tandis que l'autre pôle peut être isolé, il suffit de toucher avec un morceau de métal un point *a* du circuit pour que la conductibilité du tube AB reparaisse. Que s'est-il passé? Le circuit avait été chargé par le pôle de la pile de 250 éléments, en touchant le point *a*, on fait circuler une décharge brusque d'électricité à laquelle est dû le rétablissement de la conductibilité.

La production d'une étincelle de bouteille de Leyde à quelque distance du circuit (la pile de 250 éléments n'est plus reliée au

Fig. 1.



tube) rétablit de même la conductibilité, un petit choc la supprime : ces effets se répètent autant de fois qu'on le désire, un galvanomètre Bourbouze suffit pour faire l'expérience.

Le cylindre d'aluminium et de résine peut être remplacé par un mélange de fleur de soufre et de poudre d'aluminium agglomérés à la température de fusion du soufre. D'autres mélanges de poudres métalliques et d'isolants solides, liquides et gazeux se comportent de même.

Avec certains isolants, les mélanges peuvent offrir primitivement une conductibilité notable, le passage d'une décharge électrique dans le circuit (ouvert ou fermé) produira un accroissement brusque de conductibilité. Cet accroissement de conductibilité persistera tant que les trépidations du voisinage ne l'auront pas fait disparaître.

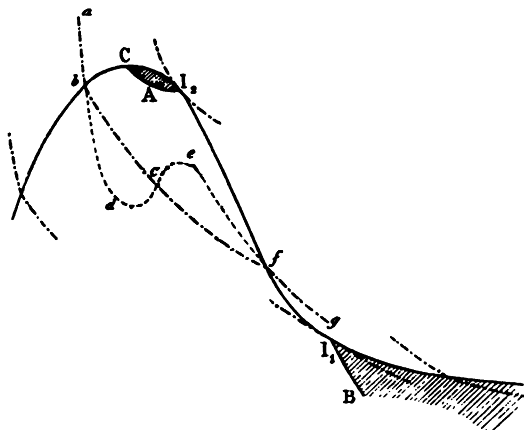
SUR LES ADIABATIQUES D'UN SYSTÈME DE LIQUIDE ET DE VAPEUR;

PAR M. C. RAVEAU.

Nos connaissances générales relatives aux propriétés calorimétriques des vapeurs se réduisent aux deux points suivants :

1° Il existe, certainement pour plusieurs corps et vraisemblablement pour tous, une température à laquelle la chaleur spécifique de vapeur saturée change de signe, en passant du négatif au positif lorsque la température s'élève; la courbe de saturation (¹) est donc tangente, au premier point d'inversion I_1 (*fig.* 1), à une

Fig. 1.



adiabatique dont les points voisins du point de contact sont à l'intérieur de cette courbe.

2° M. Mathias (²) a indiqué que la chaleur spécifique de vapeur saturée devenait infinie et négative au voisinage du point critique; il existerait un second point d'inversion I_2 (*fig.* 1), où l'adiabatique tangente à la courbe de saturation serait extérieure à cette courbe.

Dans un travail *Sur la continuité entre l'état liquide et l'état*

(¹) J'ai adopté l'expression de *courbe de saturation* pour désigner le lieu des points qui représentent le liquide saturé et la vapeur saturée.

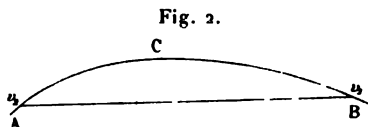
(²) Thèse de doctorat. *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IX, p. 449; 1890.

gazeux et sur la théorie générale des vapeurs [1], M. Duhem a énoncé le même résultat, qu'il avait obtenu, en même temps que M. Mathias, par une voie entièrement théorique. La démonstration que j'en donne plus loin me semble affranchie de quelques objections que l'on pouvait faire aux deux précédentes.

Dans ce travail : 1° j'étudie les propriétés calorimétriques de la matière au voisinage du point critique; 2° je donne des théorèmes généraux sur la forme et l'orientation des adiabatiques à l'intérieur et au voisinage de la courbe de saturation.

I. Considérons, au voisinage du point critique C, la courbe de saturation ABC, supposée tracée dans le plan des pv (*fig.* 2), et

Fig. 2.



la partie rectiligne AB d'une isotherme infiniment voisine de l'isotherme critique; j'établirai d'abord que les quantités de chaleur dégagées suivant AB et ACB ne diffèrent que d'un infiniment petit d'ordre supérieur au second.

En effet, appelons v_1 et v_2 les volumes spécifiques de la vapeur saturée et du liquide saturé et $d\varpi$ la quantité infiniment petite dont varie la pression de saturation entre le point critique et l'isotherme AB; l'aire ACB est de l'ordre de $(v_1 - v_2)\,d\varpi$. Si $v_1 - v_2$ est du premier ordre, $d\varpi$ est d'un ordre supérieur, d'après la forme de la courbe, et le produit est d'un ordre supérieur au second. En vertu du principe de l'équivalence, on a, en représentant la quantité de chaleur dégagée le long d'une ligne par les lettres qui désignent cette ligne mises entre crochets :

$$[\mathrm{ACB}] + [\mathrm{BA}] = \frac{1}{\mathrm{E}}(v_1 - v_2)\,d\varpi,$$

$$[\mathrm{ACB}] = [\mathrm{AB}] + \frac{1}{\mathrm{E}}(v_1 - v_2)\,d\varpi,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(1) *Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, 1891. Sur quelques divergences entre les résultats énoncés dans ce travail et ceux du présent Mémoire, je renverrai le lecteur à une Note de M. Duhem. (*Voir* ci-après, p. 470).

Il en résulte que la quantité de chaleur dégagée le long d'un segment de ACB est dans un rapport fini avec la longueur de ce segment; en effet, on a

$$[AB] = \frac{T}{E}(v_1 - v_2)\frac{d\varpi}{dT};$$

la quantité de chaleur par unité de longueur de AB est

$$\frac{[AB]}{AB} = \frac{T}{E}\frac{d\varpi}{dT}.$$

$\frac{d\varpi}{dT}$ a une valeur finie au point critique; le théorème est donc établi pour l'isotherme AB et, par suite de la remarque précédente, pour ACB.

Nous pouvons maintenant démontrer les théorèmes suivants :

1° *La chaleur spécifique* γ_2 *du liquide saturé est positive et infinie au point critique.*

En effet, on a

$$\gamma_2 = \frac{[AC]}{dt} = \frac{T}{E}\frac{d\varpi}{dT}\frac{dv_2}{dT},$$

mais

$$\frac{dv_2}{dT} = \frac{dv_2}{d\varpi}\frac{d\varpi}{dT},$$

et $\frac{dv_2}{d\varpi}$ devient infini au point critique.

2° *La chaleur spécifique* γ_1 *de la vapeur saturée est négative et infinie au point critique.*

3° *Au point critique le rapport* $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ *a pour valeur* -1.

Avant d'établir ce théorème, je ferai une remarque sur les courbes qui divisent dans un rapport constant les parties rectilignes des isothermes; l'abscisse v d'un point de ces courbes est donnée par la formule

$$v = pv_1 + qv_2,$$

où nous supposons $p + q$ égal à 1.

On en tire

$$\frac{dv}{d\varpi} = p\frac{dv_1}{d\varpi} + q\frac{dv_2}{d\varpi};$$

au point critique $\frac{dv_1}{d\varpi}$ et $\frac{dv_2}{d\varpi}$ sont infinis et de signe contraire; si ces deux dérivées sont de même ordre, il existe un couple de valeurs P, Q tel que

$$P\frac{dv_1}{d\varpi}+Q\frac{dv_2}{d\varpi}$$

soit fini, je dis qu'il n'y aura pas d'autre couple de valeurs satisfaisant à cette condition.

En effet, posons

$$V = P\,dv_1 + Q\,dv_2,$$

on aura

$$\frac{dv}{d\varpi}=\frac{dV}{d\varpi}+(P-p)\frac{dv_1}{d\varpi}+(Q-q)\frac{dv_2}{d\varpi};$$

les différences $P-p$, $Q-q$ sont de signe contraire; les deux derniers termes du second membre sont de même signe et leur somme est infinie, par suite aussi $\frac{dv}{d\varpi}$. Ainsi, parmi les courbes qui divisent dans un rapport constant le segment rectiligne des isothermes, il ne peut y en avoir qu'une seule qui ne soit pas tangente à la courbe de saturation au point critique.

Il est évident que l'expérience ne peut nous désigner d'une façon absolue la valeur du rapport $\frac{P}{Q}$ auquel correspond cette courbe singulière; en effet, les expériences s'arrêtent à une distance *finie* du point critique; on pourra toujours considérer deux courbes assez voisines, quoique distantes d'une quantité finie, pour qu'à la limite des expériences, leurs coefficients angulaires soient très voisins et qu'on ne puisse prévoir laquelle des deux fait un angle fini au point critique avec la courbe de saturation.

Il y a cependant une raison de croire que la courbe, lieu des milieux des cordes de la courbe de saturation coupe celle-ci sous un angle fini. Les expériences de MM. Cailletet et Mathias ([1]) et celles de M. Amagat ([2]) ont montré que la courbe qui représente, en fonction de la température, la demi-somme des densités du liquide et de la vapeur sous pression de saturation est une droite;

([1]) *Journal de Physique*, 2e série, t. V, p. 549; 1886 et t. VI, p. 414; 1887.
([2]) *Ibid.*, 2e série, t. X, p. 288; 1892.

M. Mathias [1] a déduit des expériences de M. Sidney Young que ce diamètre était bien rectiligne jusqu'à des températures inférieures de 300° à celle du point critique. Il est donc *extrêmement probable* que le diamètre se continue rectilignement, dans la région inaccessible à l'expérience, jusqu'au point critique.

Ceci posé, l'équation du diamètre considéré est

$$\frac{2}{\varphi} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = a\mathrm{T} + b,$$

d'où l'on tire

$$\frac{2\,d\varphi}{\varphi^2} = \frac{dv_1}{v_1^2} + \frac{dv_2}{v_2^2} = -a\,d\mathrm{T},$$

ou

$$2\,d\varphi = \frac{\varphi^2(v_1^2+v_2^2)}{v_1^2 v_2^2}\,\frac{v_2^2\,dv_1 + v_1^2\,dv_2}{v_1^2+v_2^2},$$

et, en éliminant φ à l'aide de la première équation,

$$\frac{d\varphi}{d\varpi} = \frac{2(v_1^2+v_2^2)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2}\,\frac{v_2^2\,dv_1+v_1^2\,dv_2}{(v_1^2+v_2^2)\,d\varpi} = -\frac{a}{2}\,\frac{d\mathrm{T}}{d\varpi}.$$

Au point critique, où v_1 et v_2 sont égaux, on a finalement

$$\frac{d\varphi}{d\varpi} = \frac{1}{2}\,\frac{dv_1}{d\varpi} + \frac{1}{2}\,\frac{dv_2}{d\varpi} = -\frac{a}{2}\,\frac{d\mathrm{T}}{d\varpi},$$

ce qui prouve qu'en ce point la courbe lieu des milieux des parties rectilignes des isothermes fait bien un angle fini avec la courbe de saturation.

Les deux quantités infinies $\frac{dv_1}{d\varpi}$ et $\frac{dv_2}{d\varpi}$ ayant une différence finie, leur rapport est égal à -1, par suite aussi celui des deux chaleurs spécifiques γ_1 et γ_2, comme nous l'avions énoncé.

II. 1° *A l'intérieur de la courbe de saturation, la distance des adiabatiques, comptée sur une parallèle à l'axe des v, va en croissant à mesure que la température s'abaisse.*

Désignons par Δv la distance de deux adiabatiques, on a

$$\frac{[\Delta v]}{\mathrm{T}} = \text{const.};$$

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXV, p. 35; 1892.

mais

$$[\Delta v] = \frac{T}{E}\frac{d\varpi}{dT}\Delta v,$$

d'où

$$\frac{d\varpi}{dT}\Delta v = \text{const.}.$$

La courbe qui représente la tension de vapeur en fonction de la température étant convexe vers l'axe des T, $\frac{d\varpi}{dT}$ va en décroissant avec la température; Δv va donc en croissant et le faisceau des adiabatiques s'épanouit à mesure que la température s'abaisse.

Les adiabatiques des gaz parfaits présentent la même propriété.

2° *En pénétrant à l'intérieur de la courbe de saturation, les adiabatiques se réfractent et leur direction se rapproche de celle de l'axe des v.*

Soit *mn* la courbe de saturation, du côté qui correspond au liquide (*fig.* 3); D un point infiniment voisin, DC et DP l'iso-

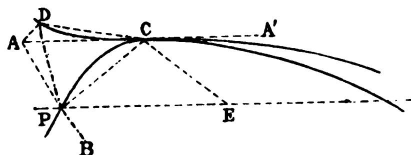
Fig. 3.

therme et l'adiabatique qui passent par ce point. Cherchons à déterminer, sur le prolongement de la partie rectiligne de l'isotherme qui passe en C, le point A où viendrait passer l'adiabatique BP si elle se continuait régulièrement.

Pour cela, menons l'adiabatique CE; l'aire ACEP serait égale, d'après un théorème connu, au produit de la différence des températures en C et P par la différence des entropies. Il en est de même pour l'aire DCEP, les triangles DCP et ACP ont donc même surface et le point A se trouve sur une parallèle menée par D à la courbe *mn*, d'où résulte le théorème énoncé.

Au point critique, le théorème ne s'applique plus, parce que l'angle ACD est infiniment petit (*fig.* 4); néanmoins la propriété subsiste ([1]).

Fig. 4.



En effet, par un point D distant de C d'une longueur infiniment petite du premier ordre, menons une parallèle à PC; à cause de l'inflexion de l'isotherme, la distance de D à la droite AC est du troisième ordre et l'angle DCA est du second ordre. DAC, qui est égal à CPE, est du premier ordre; la longueur AD est du second ordre; il en est de même de AP et de PD : les trois côtés du triangle ADC sont du même ordre, les angles sont finis et l'adiabatique se réfracte.

Continuons à décrire la courbe de saturation : au point I_2 (*fig.* 1) ces deux branches de l'adiabatique se raccordent; au delà la branche de gauche est située *au-dessous* du prolongement de l'autre. Il y a un nouveau raccord en I_1, avec interversion. Dans tous les cas, l'adiabatique est moins inclinée sur l'axe des v à l'intérieur de la courbe qu'à l'extérieur.

Considérons, en particulier, une des adiabatiques qui passent entre I_1 et I_2; en cherchant à raccorder les parties *ab*, *gf* de la courbe situées à l'extérieur de la courbe de saturation, on est amené à considérer une adiabatique théorique *abdcefg* dont la forme serait analogue à celle des isothermes théoriques de J. Thomson et de Van der Waals. Le long du cycle *bdcefcb* la quantité de chaleur dégagée est nulle; les deux aires *bdcb* et *cefc* seraient donc égales, comme dans le cas des isothermes.

Pour les adiabatiques situées plus bas, de même que pour celles

---

([1]) En admettant qu'au voisinage du point critique, l'isotherme se confonde avec une courbe du troisième degré et la courbe de saturation avec une courbe du second degré; dans le cas général où dv_1 serait d'un ordre égal à n fois celui de $d\varpi$, il faut, pour que les trois côtés du triangle ADC soient de même ordre, que la variation de p pour l'isotherme soit d'un ordre égal à $(2n-1)$ fois celui de la variation de v.

qui coupent la courbe de saturation au delà de I_1, on ne peut guère, même en se laissant guider par la continuité, faire que des hypothèses assez hasardées, sur lesquelles je n'insisterai pas.

Le lieu des points c doit passer par I_2; le lieu des points où les isothermes réelles et idéales se coupent passe en C : ils ne sauraient donc coïncider. Ceci peut paraître en contradiction avec le fait que ces deux lieux doivent être les projections de l'intersection de la nappe réelle et de la nappe idéale de la surface représentative de l'état du corps. Toutefois, la contradiction n'est qu'apparente : en effet, en c le volume, la pression et l'entropie d'un certain état réel et d'un état idéal ont la même valeur; le point c appartiendra donc à la fois aux deux nappes si la surface est construite en prenant pour coordonnées, outre la pression et le volume, l'entropie. Mais il n'en sera plus de même si l'on prend comme troisième coordonnée la température; la courbe commune aux deux nappes varie avec le choix des coordonnées parce que les points qu'elle contient, considérés comme faisant partie d'une nappe ou de l'autre, ne correspondent pas à des états identiques *à tous les points de vue*.

On étudie quelquefois les propriétés des vapeurs saturées en représentant les courbes dans le plan des vt; avec ce nouveau système de coordonnées, il y a encore réfraction des adiabatiques (¹).

Supposons, en effet, que nous transportions la *fig.* 2 dans le plan des vt avec une échelle de transformation telle que la distance de deux isothermes infiniment voisines, auprès du point C, reste la même. Rien ne sera changé à l'intérieur de la courbe de saturation; à l'extérieur de cette courbe nous devrons remplacer le point D par sa projection sur AC puisque l'abscisse reste la même et que l'isotherme devient entièrement rectiligne; la réfraction subsistera.

Ce résultat pourrait aussi s'établir directement : considérons un trapèze infiniment petit ayant pour diagonale un élément de la courbe de saturation et pour côtés opposés, respectivement deux

(¹) Dans la *Théorie de la chaleur* de Maxwell, où ce système de coordonnées est employé, la réfraction de l'adiabatique n'est pas indiquée (p. 135, 5ᵉ édit. angl.).

éléments d'isotherme et d'adiabatique. D'après la formule de Clapeyron, la variation d'entropie le long d'une isotherme, pour une variation de volume unité, est, à l'intérieur de la courbe de saturation, $\frac{d\varpi}{dT}$, à l'extérieur $\frac{\partial p}{\partial T}$ (la dérivée étant prise à volume constant). Ces deux quantités sont différentes; les deux éléments d'isotherme, devant correspondre à des variations égales d'entropie, auront des longueurs différentes.

Au point critique $\frac{d\varpi}{dT}$ et $\frac{\partial p}{\partial T}$ deviennent égaux, mais le trapèze considéré est infiniment aplati; la discussion se ferait sans difficulté.

3° *A partir du point critique, une diminution de pression, adiabatique et infiniment petite, sépare des masses de liquide et de vapeur dont le rapport diffère de l'unité d'un infiniment petit de l'ordre de la diminution de pression.*

En effet, l'adiabatique critique fait un angle fini avec la courbe de saturation, puisque, le long de cette dernière courbe, les dégagements de chaleur sont de l'ordre de la longueur des segments correspondants. L'adiabatique et la ligne le long de laquelle $p = q$ découpent donc sur une isotherme, infiniment voisine, un segment qui est de l'ordre de la variation de pression, d'où résulte le théorème énoncé.

Étudions maintenant, dans son ensemble, la détente adiabatique :

Entre la température critique et le second point d'inversion, le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ prend toutes les valeurs comprises entre -1 et 0; à chaque valeur de ce rapport correspondra une valeur du quotient $\frac{p}{q}$ telle que $p\gamma_1 + q\gamma_2$ s'annule; par suite :

A toute température supérieure au second point d'inversion correspond un rapport entre les masses du liquide et de la vapeur tel que, dans la détente adiabatique, ce rapport se conserve et qu'il n'y ait ni condensation, ni volatilisation. Tous les points correspondants se trouvent sur une courbe CAI_2, à droite de laquelle une détente adiabatique est toujours accompagnée d'une condensation. Du second point d'inversion I_1 part une courbe I_1B

jouissant des mêmes propriétés que la précédente; pour tous les points situés à gauche de CAI_2I_1B, une détente adiabatique est accompagnée d'une volatilisation.

En tout point des courbes CAI_2, I_1B, l'adiabatique est tangente à une courbe le long de laquelle le rapport $\frac{p}{q}$ est constant; or on sait mener la tangente à ces courbes (¹) : si, à une température donnée, on peut déterminer le rapport $\frac{p}{q}$ qui se conserve dans la détente, on pourra tracer la tangente à l'adiabatique en un point et, par suite, à toutes les adiabatiques à la même température.

SUR LA DÉTENTE DES VAPEURS;

PAR M. P. DUHEM.

Nous avons cherché, dans un récent travail (²), à traiter avec autant de précision que possible, les propriétés des fluides au voisinage du point critique. M. Raveau (³) est arrivé de son côté à certaines conclusions en contradiction avec celles auxquelles nous étions parvenu. Il est intéressant de voir quelle est l'origine de ce désaccord et de quelle manière il est possible de le trancher.

Nous avons fait reposer les considérations contenues dans le troisième Chapitre de notre ouvrage sur l'*hypothèse* suivante (⁴):

(¹) Les droites joignant, sur deux isothermes, les points qui correspondent à une même valeur du rapport $\frac{p}{q}$ sont concourantes; il en est de même, à la limite, des tangentes aux courbes $\frac{p}{q}$ = const. menées en tous les points d'une même isotherme. Le point de concours est celui des tangentes à la courbe de saturation (qui correspond à $p = 0$ et $q = 0$). J'ai appliqué cette propriété à l'étude de la condensation dans les tubes de Natterer (*Société française de Physique*, 20 mai 1892). Ma démonstration a été citée par M. Amagat dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, du 7 juin 1892.

(²) P. DUHEM, *Sur la continuité entre l'état gazeux et sur la théorie générale des vapeurs* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. I, Mémoire n° 5; 1891).

(³) RAVEAU, *Sur les adiabatiques*, etc. (*Voir* ci-dessus, p. 461).

(⁴) *Sur la continuité*, etc., p. 90.

Les trois chaleurs spécifiques *sous pression constante* du liquide, du gaz et de la vapeur tendent vers des limites finies et positives lorsque le point figuratif tend vers le point critique.

La théorie développée par M. Raveau repose essentiellement, au contraire, sur l'*hypothèse* suivante :

Les trois chaleurs spécifiques *sous volume constant* du liquide, du gaz et de la vapeur tendent vers des limites finies et positives lorsque le point figuratif tend vers le point critique.

Il est aisé de voir, en premier lieu, que *ces deux hypothèses sont incompatibles*.

Soient, par exemple, C_1 et c_1 les chaleurs spécifiques sous pression constante et sous volume constant de la vapeur. Une relation bien connue nous donne (en gardant les notations de notre travail)

$$C_1 = c_1 - \frac{T}{E} \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial v_1}{\partial p}}. \tag{1}$$

Les quantités $\frac{\partial v_1}{\partial T}$, $\frac{\partial v_1}{\partial p}$ sont, au point critique, des quantités infinies du même ordre (¹), en sorte que le rapport

$$\beta_1 = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial T}}{\frac{\partial v_1}{\partial p}} \tag{2}$$

est fini; l'égalité (1) marque alors que les deux quantités C_1 et c_1 ne peuvent tendre toutes deux vers des limites finies lorsque le point figuratif (p, T) tend vers le point critique.

A défaut d'expérience, y a-t-il un moyen permettant de conclure au rejet de l'une des hypothèses précédentes? En voici un que nous suggère M. Raveau :

Considérons un mélange de liquide et de vapeur saturée enfermé dans une enceinte *imperméable à la chaleur*. Pour que l'équilibre de ce système soit stable, il faut que toute augmentation de pression soit accompagnée d'une diminution de volume et inversement; comme la pression est toujours égale à la tension de

(¹) *Sur la continuité*, etc., p. 46.

vapeur saturée et que la tension de vapeur saturée croît avec la température, il faut qu'une diminution adiabatique de volume entraîne un accroissement de température; en d'autres termes, si l'on fait usage des notations employées dans notre travail ([1]), on peut énoncer la proposition suivante :

La quantité K *doit toujours être négative.*

C'est en effet ce qui a lieu aux températures éloignées du point critique ([2]).

Or, au voisinage du point critique, si l'on suit notre hypothèse, on trouve que *la quantité* K *est positive* ([3]). D'après ce que nous venons de dire, ce résultat est inadmissible et entraîne le rejet de notre hypothèse. Nous sommes alors amenés à suivre l'hypothèse de M. Raveau.

Cette hypothèse nous donne les expressions suivantes de la chaleur spécifique de la vapeur et du liquide sous tension de vapeur saturée

$$(3)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = c_1 - \dfrac{T}{E}\beta_1\dfrac{dv_1}{dT}, \\ \gamma_2 = c_2 - \dfrac{T}{E}\beta_2\dfrac{dv_2}{dT}, \end{cases}$$

β_2 étant défini par une égalité analogue à l'égalité (2)

c_1 et c_2 sont finis au point critique, d'après l'hypothèse de M. Raveau; $\dfrac{dv_1}{dT}$ et $\dfrac{dv_2}{dT}$ sont infinis du même ordre; le premier rapport est positif et le second négatif. Donc, au point critique, γ_1 est infini et négatif (conséquence que fournissait également notre hypothèse); γ_2 est infini et positif (conséquence contraire à celle que fournissait notre hypothèse).

Les égalités (3), jointes à l'expression de K ([4]), permettent d'écrire

$$\begin{aligned} K = {} & \left[L\frac{dv_1}{dT} + \frac{T}{E}(v_1 - v_2)\beta_1\frac{dv_1}{dT} - c_1(v_1 - v_2)\right]m_1 \\ & + \left[L\frac{dv_2}{dT} + \frac{T}{E}(v_1 - v_2)\beta_2\frac{dv_2}{dT} - c_2(v_1 - v_2)\right]m_2, \end{aligned}$$

([1]) *Sur la continuité, etc.*, p. 93, 94. Égalités (40) et (41).
([2]) *Ibid.*, p. 97.
([3]) *Ibid.*, p. 99.
([4]) *Ibid.*, p. 93, égalité (40).

ou bien, en vertu de l'équation de Clapeyron-Clausius

$$L = \frac{T}{E}(v_1 - v_2)\frac{d\varpi}{dT}$$

et des égalités (2), qui donnent

$$\frac{dv_1}{dT} = \frac{\partial v_1}{\partial T} + \frac{\partial v_1}{\partial \varpi}\frac{d\varpi}{dT} = \frac{\partial v_1}{\partial \varpi}\frac{d\varpi}{dT}\left(1 + \frac{\beta_1}{\frac{d\varpi}{dT}}\right),$$

$$\frac{dv_2}{dT} = \frac{\partial v_2}{\partial T} + \frac{\partial v_2}{\partial \varpi}\frac{d\varpi}{dT} = \frac{\partial v_2}{\partial \varpi}\frac{d\varpi}{dT}\left(1 + \frac{\beta_2}{\frac{d\varpi}{dT}}\right),$$

$$K = \left[\left(1 + \frac{\beta_1}{\frac{d\varpi}{dT}}\right)^2 \frac{\partial v_1}{\partial \varpi} m_1 + \left(1 + \frac{\beta_2}{\frac{d\varpi}{dT}}\right)^2 \frac{\partial v_2}{\partial \varpi} m_2\right] L \frac{d\varpi}{dT}$$
$$- (m_1 c_1 + m_2 c_2)(v_1 - v_2).$$

Si l'on observe que $\frac{\partial v_1}{\partial \varpi}$, $\frac{\partial v_2}{\partial \varpi}$ sont des quantités essentiellement négatives, que L et $\frac{d\varpi}{dT}$ sont essentiellement positives ; que, d'après l'hypothèse de M. Raveau, les quantités c_1, c_2 sont toujours positives, on voit que la quantité K est *toujours négative,* ainsi que nous l'avions prévu *a priori.*

La quantité K étant négative, la détente d'une vapeur au voisinage du point critique suit les lois que nous avons indiquées à la page 98 de notre travail.

Les égalités (3) permettent d'écrire, au point critique,

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\,\frac{\frac{dv_1}{dT}}{\frac{dv_2}{dT}}.$$

Le rapport qui figure au second membre est fini et négatif. Est-il égal à — 1, comme le pense M. Raveau? L'expérience seule peut nous le dire.

En terminant notre travail *Sur la continuité entre l'état liquide et l'état gazeux,* nous appelions l'attention sur l'avantage qu'il y a, dans le développement d'une théorie physique, à marquer nettement les hypothèses sur lesquelles repose cette théorie; on voit

alors sans peine de quelle manière elle doit être modifiée lorsqu'elle se trouve en quelque point fautive ou insuffisante; la présente Note en peut servir d'exemple.

NOTE RELATIVE A LA TEMPÉRATURE CRITIQUE;

PAR M. B. GALITZINE.

Dans le numéro de juin du *Journal de Physique* de cette année, M. Pellat, en traitant de la détermination du point critique, fait observer que la température t_c, à laquelle la surface de séparation du liquide et de sa vapeur disparaît, doit être inférieure à la température critique T_c, définie comme température, où a lieu l'égalité complète entre les densités du liquide et de sa vapeur saturée, ce qui résulterait des expériences récentes de MM. Cailletet et Colardeau ([1]). En discutant les expériences de ces auteurs, j'ai eu déjà l'occasion d'observer ([2]), que la méthode optique ordinaire pour déterminer T_c est incapable de nous fournir la valeur vraie de la température critique. On sait, en effet, qu'on peut faire varier la quantité de liquide introduite dans le tube scellé dans des limites assez larges, et la disparition du ménisque se produit toujours à peu près à la même température t_c. Or, cette température t_c ne peut pas être la température critique, car on aurait, dans ce cas, plusieurs densités critiques, ce qui est impossible ([3]). Il est tout de même fort probable que la différence τ entre T_c et t_c est en général petite; des expériences avec de petits tubes scellés, exécutées avec soin, en employant des quantités initiales de liquide différentes, pourraient contribuer à nous fournir quelques renseignements là-dessus.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 1280; 1889. *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 389; 1889.

([2]) *Journ. de la Soc. phys.-chim. russe*, t. XXII, p. 265; 1890. *Beibl.*, t. XV, p. 639; 1891. *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 593; 1891. *Travaux de la section de Phys. de la Soc. des naturalistes de Moscou*, t. IV, n° 2, p. 5; 1891.

([3]) La pression serait bien la même dans ces différents cas.

M. Stoletow ([1]) dans son Mémoire récent sur l'état critique, tout en soumettant les opinions de Jamin, Cailletet, Wroblewski, les miennes en partie, à une critique très sévère et le plus souvent bien fondée, a essayé, en se guidant par des raisonnements empruntés à l'Optique, de calculer approximativement la différence τ. Il parvient ainsi à la valeur 0°,52 C. Il serait, en effet, fort désirable de mesurer directement l'indice de réfraction du liquide et de sa vapeur saturée, dans le voisinage immédiat du point critique, pour voir jusqu'où l'inégalité des densités persiste encore au delà de la température t_c.

J'indiquerai encore la méthode suivante, qui, tout en étant très simple et assez facilement réalisable (elle n'exige qu'un petit tube scellé), permettrait de comparer directement les deux températures t_c et T_c, c'est-à-dire fournirait aussi immédiatement la vraie température critique.

Un petit tube scellé très étroit, presque capillaire, est partagé intérieurement en deux parties par une goutte de mercure. La partie inférieure du tube est complètement remplie par le liquide à étudier, la partie supérieure incomplètement, de sorte qu'il y ait toujours, jusqu'aux plus hautes températures, un certain excès de vapeur saturée. Il n'est pas difficile de régler convenablement les quantités de liquide dans les deux parties du tube; il faut, en outre, avoir bien soin que le liquide soit complètement purgé d'air. Si l'on vient à chauffer le tube graduellement, le volume inférieur du liquide se dilatera, en restant toujours soumis à la pression de la vapeur saturée à la température correspondante, et l'on verra la goutte de mercure s'élever dans le tube. A une certaine température t_c, qu'on notera, le ménisque disparaîtra, mais l'état liquide persistant toujours dans la partie inférieure du tube, la goutte de mercure continuera à poursuivre sa marche ascendante, jusqu'à ce que les densités de la matière dans les deux parties du tube se soient complètement égalisées. S'il était possible de régler exactement la quantité initiale de liquide, de ma-

---

([1]) Stoletow, *Sur l'état critique* (*Travaux de la section de Phys. de la Soc. des naturalistes de Moscou*, t. V, n° 1, p. 1; Moscou, 1892). *Physikalische Revue* de Graetz.

nière qu'à la vraie température critique on ait aussi la vraie densité critique, on devrait voir le phénomène suivant, fort singulier du reste, se produire. A mesure que la température s'élèverait, on verrait la goutte de mercure monter (et d'autant plus vite, qu'on s'approcherait davantage de la température critique) pour s'arrêter tout court, brusquement, cette température une fois atteinte. Si le liquide est en excès, le mercure s'arrêtera dans sa marche avant que la température T_c soit atteinte; la même chose arrivera si le liquide n'est pas en quantité suffisante. Dans tous les cas, l'état stationnaire de la goutte révèle l'égalité des densités dans les deux parties du tube. Pour obtenir la température critique, on n'aurait qu'à répéter les mêmes expériences avec des quantités initiales de liquide différentes; la plus haute des températures observées (où a lieu l'égalité des densités) peut être considérée comme la vraie température critique. Puisque la densité du liquide et de sa vapeur saturée varient très rapidement avec la température dans le voisinage immédiat du point critique, la méthode indiquée pourrait bien comporter une assez grande exactitude.

On obtiendrait la température critique pour ainsi dire par tâtonnements; c'est une particularité, inhérente à toutes les méthodes nouvelles pour déterminer la température critique, à savoir la méthode de MM. Cailletet et Colardeau (1), celle de M. Amagat (2), ainsi que la méthode de la balance de Nadeschdine (3), avec laquelle la méthode indiquée ici a une certaine analogie.

Je citerai encore pour terminer une particularité curieuse, quoique exclusivement théorique, de l'état critique de la matière.

Soit v le volume total du petit tube scellé, v' le volume du liquide, et v'' celui de sa vapeur saturée ($v = v' + v''$); soient ρ et δ leurs densités respectives. On trouve facilement pour v' et v'' les

(1) *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 333; 1891.

(2) *Ibid.* [3], t. I, p. 288; 1892.

Voir aussi à ce sujet :

Avenarius, *Bulletin de l'Ac. des Sc. de Saint-Petersbourg*, t. XXII, p. 378; 1876. *Mélanges phys. et chim.*, t. IX, p. 647; 1876.

Cailletet et Mathias, *Journ. de Phys.* [2], t. V, p. 549; 1886. *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 414; 1887, etc.

(3) Nadeschdine, *Études physiques*. Kiew, 1887; *Beibl.*, t. IX, p. 721; 1885.

deux expressions suivantes

$$v' = v\frac{\rho - \Delta}{\rho - \delta},$$

$$v'' = v\frac{\Delta - \delta}{\rho - \delta}$$

Δ représente ici la densité moyenne de la matière dans le tube, c'est-à-dire la masse totale divisée par le volume v. Si l'on néglige la dilatation du verre, Δ pour un tube donné est une constante.

Étudions maintenant comment varie le rapport des volumes v'' et v' avec la température et avec la densité moyenne Δ

$$(1) \qquad \frac{v''}{v'} = \frac{\Delta - \delta}{\rho - \Delta}.$$

Comme la température t_c est inférieure à la température critique, il est évident qu'on pourra, en faisant varier la quantité initiale du liquide, c'est-à-dire Δ, obtenir la disparition du ménisque à toutes les hauteurs du tube, comme le fait remarquer très justement M. Stoletow (¹). Mais on peut se demander à quelle hauteur du tube la vraie surface de séparation, invisible du reste au delà de t_c, disparaîtra à la température critique.

Il est facile de reconnaître que si Δ est supérieur, même infiniment peu supérieur, à la vraie densité critique Δ_k, le tube se remplira complètement de liquide avant que la température critique soit atteinte (²), et la surface de séparation ira se perdre en haut. Elle se perdra au contraire en bas, si Δ est inférieur à Δ_k, le tube étant rempli à cet instant de vapeur saturée à la température correspondante.

Qu'arrive-t-il si Δ est exactement égal à Δ_k?

J'avais exprimé l'opinion (³) que, dans ce cas, la surface de séparation pourrait se trouver indifféremment ou tout à fait en haut du tube ou bien en bas. Ceci n'est pas exact. La formule (1) prenant, dans ce cas, la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on obtiendra la posi-

(¹) *Loc. cit.*, p. 12.

(²) La différence de ces températures peut bien être une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur.

(³) *Journ. de la Soc. phys.-chim. russe*, t. XXII, p. 267; 1890.

tion vraie de la surface de séparation, en prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur par rapport à t

$$\left(\frac{v''}{v'}\right)_{T_c, \Delta_k} = \left(\frac{-\frac{d\delta}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}}\right)_{t=T_c}.$$

Or, tout porte à croire, qu'à la température critique, les deux dérivées sont égales entre elles, tout en étant en même temps infiniment grandes. Il est vrai qu'aucune expérience [ni parmi les anciennes, ni parmi celles toutes récentes de M. Amagat ([1])] ne l'a démontré directement, mais c'est bien tout de même l'hypothèse la plus plausible qu'on puisse faire. L'égalité de ces dérivées résulterait aussi de la théorie de Clausius ([2]).

Il s'ensuit, qu'à la température critique, la surface théorique de séparation du liquide et de sa vapeur occupe le milieu du tube. La dilatation du verre ne modifie que tout à fait insensiblement ce résultat.

Ce changement brusque de la position de la surface de séparation, qui a lieu dans le voisinage immédiat de la température critique, est un exemple curieux de solution de continuité dans un phénomène physique. C'est bien une particularité de l'état critique de la matière, qui correspond à un point critique de la surface

$$z = \frac{v''}{v'} = f(\Delta, t).$$

([1]) *Loc. cit.*
([2]) *Wied. Ann.*, t. XIV, p. 279 et 692; 1881.

WIEDEMANN'S ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE.

Tomes XLII, XLIII et XLIV; 1891.

Optique.

W.-C. RÖNTGEN et L. ZEHNDER. — Influence de la pression sur les indices de réfraction de l'eau, du sulfure de carbone, de la benzine, de l'éther éthylique et de quelques alcools, t. XLIV, p. 24-51.

Les expériences ont été réalisées par la méthode de Jamin, à l'aide de pressions ne dépassant pas une quarantaine de centimètres de mercure.

La variation d'indice se trouve toujours comprise entre celles qui correspondraient à la formule de Beer

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.},$$

et à la formule de Lorentz

$$\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{d} = \text{const.}$$

H. KAYSER. — Sur l'origine des spectres de lignes et des spectres de bandes, t. XLII, p. 310-318.

L'auteur rassemble et expose avec beaucoup de force les raisons que l'on a d'attribuer la différence entre les deux sortes de spectres d'un même corps, non à l'influence de l'épaisseur et de la densité de la couche émissive ou absorbante, comme le veut Wüllner, mais à la plus ou moins grande complexité de la molécule du corps suivant les variations de la température ou de la pression.

H. KAYSER et C. RUNGE. — Sur les spectres des éléments du second groupe de Mendeleeff, t. XLIII, p. 385-409.

Parmi les corps du premier groupe de Mendeleeff, les auteurs ont antérieurement étudié les alcalis(1) et prouvé que leurs spectres

(1) Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 530.

de lignes sont tout à fait analogues entre eux. Pour ces corps, les raies vont toujours par couples, et les longueurs d'onde λ sont représentées très exactement par des formules

$$10^8 \lambda^{-1} = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}, \qquad (1)$$

où il faut donner à n les valeurs entières successives supérieures à 3.

Relativement aux corps du second groupe de Mendeleeff, certaines périodicités particulières ont déjà été reconnues par MM. Liveing et Dewar ([1]), Hartley ([2]), Ames ([3]) et Rydberg ([4]). MM. Kayser et Runge trouvent que la plupart des triplets caractéristiques des spectres de ce groupe se partagent pour chaque corps en deux séries, caractérisées par les valeurs suivantes de A, B, C: on suppose les longueurs d'onde exprimées en unités d'Ångström.

	Première série.			Deuxième série.		
	A.	B.	C.	A.	B.	C.
Mg.....	39796,10	130398	1432090	39836,74	125471	518781
Ca.....	33919,51	123547	961696	34041,17	120398	346097
Sr.....	31030,64	122328	837473	»	»	»
Zn.....	42945,32	131641	1236125	42954,59	126919	532850
Cd.....	40755,21	128635	1289619	40797,12	126146	555137
Hg.....	40159,60	127484	1252695	40217,98	126361	613268

Ces valeurs de A, B, C se rapportent à la ligne la moins réfrangible de chaque triplet. On obtient les deux autres lignes en ajoutant à A des quantités constantes v_1 et $v_1 + v_2$, sans modifier B et C.

(1) LIVEING et DEWAR, *Phil. Trans.*, t. CLXXIV; 1883.
(2) HARTLEY, *Chem. News*, t. XLIII, p. 287; *Journ. Ch. Soc*, 1882-83.
(3) AMES, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXX, p. 33; 1890.
(4) RYDBERG, *Zeitschrift für Phys. Chem.*, t. V, p. 227; 1890.

	ν_1.	ν_2.	$\frac{\nu_1}{\nu_2}$.
Mg	40,7	20,2	2,010
	41,2	20,0	2,070
Ca	101,6	51,7	1,970
	105,8	52,7	2,030
Sr	394,0	185,9	2,120
Zn	386,4	189,8	2,036
	389,1	189,7	2,051
Cd	1159,4	542,0	2,139
	1171,7	541,8	2,163
Hg	4633,3	1767,9	2,621
	4633,0	1767,4	2,621

Les valeurs de ν_1 et ν_2 croissent un peu plus vite que le carré du poids atomique.

Il convient de remarquer :

1° Que le glucinium, qui rentre dans le second groupe de Mendeleeff et dont le spectre est très pauvre, n'a pas été étudié par les auteurs;

2° Que le baryum, rentrant aussi dans le même groupe, ne présente pas de triplets;

3° Que, outre les triplets des deux séries représentées par les formules ci-dessus, on trouve, dans les spectres des corps du deuxième groupe de Mendeleeff quelques autres triplets correspondant aux mêmes différences, mais non à des valeurs entières de n; on y trouve encore des lignes doubles correspondant aux différences ν_1 ou $2\nu_1$.

O. KNOBLAUCH. — Étude des spectres d'absorption des dissolutions très étendues, t. XLIV, p. 738-783.

L'intensité J de la lumière transmise à travers une couche d'une dissolution de concentration c et d'épaisseur d est exprimée par la formule

$$J = J_0 e^{-acd}, \tag{1}$$

dans laquelle J_0 est l'intensité de la lumière incidente, a une fonction de la longueur d'onde seulement. Cette formule exprime ce que l'on appelle la loi d'absorption de Beer (1). Si l'on change à la

(1) BEER, *Pogg. Ann.*, t. LXXXVI, p. 78; 1852.

fois la concentration c et l'épaisseur d, mais de telle sorte que le produit cd demeure constant, le spectre d'absorption ne doit éprouver aucune variation ni relativement à la position des raies, ni à leur largeur.

La concentration d'une liqueur est susceptible de varier pratiquement dans des limites excessivement étendues, sans que l'on ait à redouter, dans l'étude des spectres d'absorption, les difficultés qui, dans l'étude des conductibilités, par exemple, proviennent des impuretés apportées par le dissolvant. On étudie d'avance le spectre d'absorption de celui-ci, et ce spectre se superpose au spectre de la substance dissoute sans en modifier les bandes propres.

Laissant volontairement de côté les substances qui donnent lieu à la formation d'hydrates ou à une hydrolyse qui modifie la constitution chimique de la dissolution avec la concentration (chlorure et bromure de cuivre, chlorure de cobalt), M. Knoblauch a étudié une série nombreuse de sels :

A. Acide picrique, chromate et bichromate de potasse, ferrocyanure de potassium, sulfate de cuivre;

B. Chlorure, sulfate, nitrate, acétate, oxalate de chrome; alun de chrome, oxalate double de chrome et de potasse;

C. Nitrate, acétate, chlorure d'urane;

D. Éosine, éosine-potassium, — sodium, — argent, — aluminium, — cuivre.

En résumé, M. Knoblauch trouve que la loi de Beer est applicable dans les limites de concentration les plus larges, quand le nombre des molécules salines varie comme varie le nombre de molécules d'air en passant de la pression de 25 atmosphères à $\frac{1}{3800000}$ d'atmosphère. Les exceptions apparentes à cette règle correspondent à des altérations physiques ou chimiques des dissolutions.

Les différences que présentent les spectres d'absorption des divers sels d'un même métal ou des divers sels d'un même acide persistent même dans les dissolutions les plus étendues.

On sait que, d'après M. Arrhenius ([1]), les sels, dans leurs dis-

---

([1]) Arrhenius, *Zeitschrift für Phys. Chem.*, t. I, p. 631; 1887. *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 178.

solutions les plus étendues, doivent être considérés comme entièrement dissociés en leurs ions constitutifs. Cette vue générale est incompatible avec les conclusions du travail de M. Knoblauch : il faudrait en effet admettre, contrairement à ce que vient d'établir l'expérience, que les spectres d'absorption changent de nature avec la dilution et que le spectre d'un sel en dissolution très étendue présente toujours la superposition de deux spectres qui seraient chacun caractéristiques de l'un de ses ions. En particulier, si l'un des ions n'offre pas de spectre d'absorption, le spectre du sel serait identique au spectre du deuxième ion ; tous les sels colorés d'un même métal et d'un ion incolore donneraient à la limite un spectre absolument identique. Les expériences de M. Knoblauch, notamment son étude de l'éosine et de ses combinaisons métalliques, sont nettement opposées à la théorie de M. Arrhenius. Celle-ci doit donc être rejetée.

J.-J. ACWORTH. — Relation entre l'absorption et la sensibilité de plaques photographiques, t. XLII, p. 370-406.

D'une manière générale, M. Acworth trouve que les maxima d'absorption et de sensibilité, déterminés sur une même plaque photographique, ne coïncident pas entre eux ; les maxima d'absorption sont déplacés vers la partie la plus réfrangible du spectre.

Les cas particuliers suivants sont à noter :

1. Dans quelques cas, le déplacement est très faible (vert d'aldéhyde, phloxine, rouge de Bengale) ; dans d'autres, il est considérable (fluorescéine, fuchsine).

2. Quand il y a deux maxima de sensibilité et d'absorption, l'ordre de leurs intensités respectives peut se renverser du premier au second (cyanine).

3. Quand il y a deux ou plusieurs maxima d'absorption, il peut arriver que, pour un ou plusieurs d'entre eux, il n'y ait pas de maximum de sensibilité correspondant.

4. Le déplacement est très différent pour les divers maxima d'absorption et de sensibilité, et il en est de même pour le maximum d'action sensibilisatrice d'une même substance, la cyanine, par exemple, ajoutée à divers sels haloïdes d'argent.

E. VOGEL. — Sur la position des bandes d'absorption et la sensibilité à la lumière des couleurs organiques, t. XLIII, p. 449-472.

M. Vogel a étudié sous ce point de vue les couleurs de l'éosine. Voici les résultats généraux de ce travail très étendu.

1. La loi énoncée par Krüss, comme résultant de ses recherches sur les produits de substitution de la phtaléine, à savoir la proportionnalité du déplacement des bandes d'absorption au nombre des atomes substitués, n'est pas la règle, mais plutôt l'exception.

2. Pour les dérivés de l'éosine, le déplacement des bandes d'absorption ne dépend pas seulement du nombre des atomes substitués, mais aussi de leur place dans la molécule; le déplacement est différent suivant que l'atome substitué appartient au groupe phtalique ou au groupe résorcine, et même suivant la place qu'il occupe dans le groupe phtalique.

3. La décoloration des couleurs d'éosine exposées à l'air provient d'une réduction sous l'influence de la lumière.

4. Le pouvoir sensibilisateur des couleurs d'éosine dépend à la fois de la sensibilité (fragilité) de la couleur exposée à la lumière, et de la nature de la transformation qu'éprouve l'énergie de la radiation absorbée par cette couleur. Le pouvoir sensibilisateur est d'autant plus faible qu'une partie plus notable de cette énergie ne contribue pas à produire une action chimique.

E. LOMMEL. — Calcul des couleurs de mélange, t. XLIII, p. 473-498.

Ce Mémoire a déjà été analysé dans ce Journal (1). Toutefois, à cause de l'importance de la tentative de l'auteur, il ne sera peut-être pas inutile de donner ici quelques détails sur l'application de la méthode de M. Lommel au calcul des teintes des lames minces.

Nous rappellerons que les couleurs spectrales sont rangées sur une circonférence à des distances proportionnelles à la différence

(1) *Voir* p. 32 de ce Volume.

de leurs nombres de vibrations, d'après la formule

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi,$$

dans laquelle φ est l'arc compté à partir d'une certaine origine; a et b sont deux constantes $a = 0,001308$, $b = 0,001016$.

Admettons que l'étude théorique d'un phénomène d'interférence fournisse une expression $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ de l'intensité en fonction du nombre de vibrations. Nous sommes conduits à chercher le centre des forces parallèles

$$\frac{1}{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) d\varphi,$$

agissant à la circonférence. La force résultante M, ou l'intensité lumineuse du mélange, s'obtient en intégrant l'expression précédente pour la circonférence entière

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) d\varphi.$$

Les coordonnées x, y de son point d'application sont données par

$$Mx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \cos\varphi \, d\varphi,$$

$$My = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \sin\varphi \, d\varphi;$$

et l'angle ψ du rayon vecteur, qui détermine la couleur du mélange, par

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x} = \frac{\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \sin\varphi \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \cos\varphi \, d\varphi}.$$

Enfin la distance z du centre de gravité à l'axe, qui détermine la saturation, est

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit à déterminer la couleur d'une lame mince cristalline. Si l'on fait abstraction de la dispersion, et dans le cas de deux nicols

croisés, l'intensité correspondant à une lumière simple est

$$\sin^2 \frac{\pi d}{\lambda},$$

et l'on aura, par suite,

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \pi d \left(a + \frac{b}{2\pi} \varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \pi d (2a + b) \frac{\sin \pi b d}{\pi b d}\right],$$

$$Mx = \frac{1}{2\pi} \cos \pi d(2a + b) \sin \pi b d \frac{bd}{1 - b^2 d^2},$$

$$My = -\frac{1}{2\pi} \sin \pi d(2a + b) \sin \pi b d \frac{1}{1 - b^2 d^2},$$

$$\tang \psi = \frac{-\tang \pi d(2a + b)}{bd}.$$

On trouvera de même, pour le cas des nicols parallèles, en distinguant par des accents les lettres relatives à ce second cas,

$$M' = 1 - M,$$

$$M'x' = -Mx, \qquad M'y' = -My,$$

$$\tang \psi' = -\tang \psi.$$

M. Lommel calcule ainsi les teintes de divers ordres données par les lames cristallines minces et compare les résultats à ceux qui ont été trouvés expérimentalement par Brücke. Nous nous bornerons à reproduire le Tableau relatif aux couleurs du premier ordre [1]. On remarquera que le plus ou moins d'éclat (valeur de M ou de M') intervient dans la désignation expérimentale du ton, surtout au voisinage du blanc et du noir, ce qui explique la divergence apparente de l'expérience et du calcul pour les premières lignes du Tableau. On doit d'ailleurs s'attendre à n'obtenir que des résultats approximatifs; en dehors de la remarque si juste de M. Macé de Lépinay [2] sur le choix des couleurs complémentaires qui fixent la valeur de la constante b, notons encore que la méthode de M. Lommel ne permet pas de composer séparément le violet ou le rouge extrême (superposés sur le cercle) avec une autre couleur quelconque.

---

(1) Le Tableau se poursuit dans le Mémoire original jusqu'au milieu du quatrième ordre. On trouvera, en outre, dans le Mémoire original deux épures indiquant sur le cercle chromatique lui-même la courbe des intensités et la courbe de saturation.

(2) *Voir* p. 32 de ce Volume.

COULEURS DES LAMES MINCES (1).

	Centre noir						Centre blanc				
	Couleur									Couleur	
d.	observée.	calculée.	φ.	λ.	r.	M.	M'.	r'.	λ'.	observée.	calculée.
0	Noir	bleu verdâtre	$2\pi - 84,55$	480	17,4	0	100	0	634	orangé	blanc
40	Gris de fer	»	$2\pi - 85,16$	480	17,1	5,2	94,8	0,9	635	»	»
97	Gris lavande	»	$2\pi - 87,11$	481	15,7	28,0	72,0	6,1	637	»	blanc jaunâtre
158	Gris bleuâtre	»	$\pi + 87,50$	484	12,6	61,0	39,0	19,7	643	»	grisâtre
218	Gris clair	bleu vert	$\pi + 73,52$	494	7,9	86,6	13,4	50,6	659	rouge orangé	jaune brun
234	Blanc verdâtre	»	$\pi + 14,59$	500	6,3	90,5	9,5	60,6	671	rouge	brun
259	Blanc presque pur	vert	$\pi + 35,34$	522	4,3	93,7	6,3	63,8	710	carmin	rouge sombre
267	Blanc jaunâtre	vert teinté de jaune	$\pi + 19,18$	535	3,9	94	6	61,3	734	pourpre	rouge carmin
275	Jaune paille blafard	jaune verdâtre	π	551	4	93,8	6,2	60,1	765	violet pourpre	brun rouge presque noir
281	Jaune paille	vert jaunâtre	$\pi - 12,51$	562	4,2	93,5	6,5	60,6	437	bleu violet	violet sombre
306	Jaune clair	jaune	$\pi - 49,36$	597	7,3	89,8	10,2	64,8	458	outremer	indigo
332	Jaune brillant	»	$\pi - 65,56$	613	12,5	82,8	17,2	60,2	468	indigo	bleu
430	Jaune orange	orange	85,5	646	44,1	43,1	56,9	33,4	486	bleu verdâtre	bleu un peu verdâtre
505	Orangé rouge	carmin	48,9	693	62,5	23,1	76,9	18,7	512	vert bleuâtre	vert un peu bleuâtre
536	Rouge	pourpre	17,9	737	58,6	21,5	78,5	16,1	536	vert	vert blafard
551	Rouge sombre	violet pourpre	0	765	57,8	22,1	77,9	16,3	551	vert jaunâtre	vert un peu jaunâtre

(1) Pour les tons pourpres la longueur d'onde indiquée est celle du rouge qui entre dans leur constitution.

N. von KLOBUKOW. — Expérience de Cours sur les mélanges des pigments dissous, t. XLIII, p. 438-440.

Deux dissolutions, l'une de vert d'aldéhyde dans l'alcool amylique, l'autre d'un sel de cobalt dans l'eau, ne sont susceptibles ni de se mélanger, ni de réagir l'une sur l'autre. Par l'agitation les liquides se divisent en gouttelettes et donnent un milieu trouble qui laisse passer une lumière colorée; en variant la proportion des deux liquides on obtiendra toute la série des couleurs résultant du mélange d'un pigment rouge et d'un pigment vert, notamment un blanc sale. Au bout de quelque temps les liquides se séparent et reproduisent sans modification le rouge et le vert primitifs.

Deux dissolutions, l'une de phénanthraquinone dans l'alcool amylique, l'autre de bleu céleste dans l'eau, fournissent de même la gamme des tons verts résultant du mélange d'un pigment jaune et d'un pigment bleu.

Enfin la même dissolution du phénanthraquinone associée à un mélange de dissolutions aqueuses de sels de cobalt et de cuivre donnera les combinaisons pigmentaires jaune et violet, parmi lesquelles se trouve un blanc sale.

Ces mélanges de couleurs pigmentaires peuvent être faits comparativement avec les mélanges de couleurs spectrales; sauf, pour les mélanges vert et rouge, les résultats sont, on le sait, tout à fait différents.

H. EBERT. — Influence de la distribution de l'intensité dans une ligne spectrale sur les phénomènes d'interférence, t. XLIII, p. 790-807.

D'après MM. A. Michelson et W. Morley [1], la ligne rouge de l'hydrogène H_α serait une ligne double. Pour preuve de cette assertion, les auteurs indiquent qu'en prenant cette raie comme source de lumière, ils ont vu les franges d'interférence disparaître pour des différences de marche de 15000 et de 45000 longueurs d'onde.

M. Ebert voit, au contraire, très distinctement les franges pour chacune de ces différences de marche, mais il cesse de les voir

[1] Michelson et Morley, *American Journ. of Science*, 3e série, t. XXXIV, p. 430; 1887. *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 443.

pour une différence de marche intermédiaire de 24500 longueurs d'onde, et cela quelle que soit la pression du gaz dans le tube de Geissler employé comme source lumineuse. Il conclut : 1° Que la raie H_α n'est pas une ligne double; 2° que, conformément aux résultats d'une étude théorique qu'il a publiée antérieurement ([1]), la disparition des franges doit être attribuée à la répartition particulière des intensités lumineuses sur cette raie, qui est formée d'un trait lumineux central bordé des deux côtés par une pâle auréole. On sait que, suivant les circonstances, la distribution des intensités lumineuses sur une même raie est susceptible de certaines variations, auxquelles correspond nécessairement un changement de la différence de marche qui fait disparaître les franges. Bien qu'il n'ait pu reproduire les conditions de l'expérience de MM. Michelson et Morley, c'est à cette cause que M. Ebert attribue le désaccord de ses résultats et de ceux des expérimentateurs américains.

E. LOMMEL. — Sur la direction de vibration de la lumière polarisée, t. XLIV, p. 311-317.

Le platinocyanure rouge de magnésium, qui cristallise en prismes quadratiques, soumis à l'action de la lumière violette, montre une fluorescence dichroïque. Si, à l'aide de lumière violette polarisée, on illumine normalement le cristal par une de ses faces latérales, cette face rayonne une lumière fluorescente rouge écarlate quand le plan de polarisation de la lumière incidente est parallèle à l'axe du cristal, une lumière fluorescente jaune orange quand il est perpendiculaire à cet axe. La lumière émise par fluorescence est polarisée comme la lumière excitatrice.

Si l'on illumine normalement une des faces terminales du cristal, de telle sorte que la direction de la lumière incidente se trouve parallèle à l'axe, la lumière émise par fluorescence est rouge écarlate; elle n'est pas polarisée et ne change ni par la rotation du nicol ni par celle du cristal autour de son axe.

Voici maintenant les expériences qui, d'après M. Lommel, sont de nature à décider la question de la direction des vibrations lu-

---

([1]) Ebert, *Wied. Ann.*, t. XXXIV, p. 39; 1888.

mineuses : on suppose le faisceau incident horizontal, ainsi que l'axe du cristal.

Expérience A. — Le plan de polarisation de la lumière incidente est horizontal. On incline le cristal autour d'un axe vertical de façon à faire croître l'angle d'incidence à partir de o : la lumière émise demeure rouge écarlate ; son spectre n'éprouve aucune modification.

Expérience B. — Le plan de polarisation de la lumière incidente est vertical et l'on incline le cristal comme dans l'expérience A ; la lumière émise par fluorescence vire de plus en plus au jaune orange.

Dans l'expérience A, la normale au plan de polarisation demeure normale à l'axe du cristal, la couleur de fluorescence ne change pas ; dans l'expérience B, la normale au plan de polarisation fait un angle α variable avec l'axe du cristal, et la couleur de fluorescence change. Cette couleur ne dépend donc que de cet angle α, et il est tout naturel d'admettre que la cause qui excite la fluorescence est liée exclusivement à la direction efficace qui est ici normale au plan de polarisation et non à une direction quelconque contenue dans le plan de polarisation lui-même. La cause de la fluorescence réside dans la vibration lumineuse incidente : on est donc porté à conclure que la vibration lumineuse est perpendiculaire au plan de polarisation.

G. KÜMMELL. — Dispersion rotatoire des tartrates, t. XLIII, p. 509-515.

La méthode d'observation est celle de G. Wiedemann (¹), dans laquelle on fait usage d'un double prisme aigu de quartz droit et gauche et d'un spectroscope. L'angle dont on devra tourner l'analyseur, pour ramener une certaine frange dans la position qu'elle occupait avant l'interposition de la substance active, sera précisément égal et contraire à la rotation produite par cette substance.

Les expériences ont été réalisées pour les principales raies du spectre avec des solutions contenant une molécule des divers tar-

(¹) G. WIEDEMANN, *Electricität*, t. III, p. 914.

trates neutres et sous une même épaisseur. La valeur absolue de la rotation diffère d'un sel à l'autre, mais la dispersion rotatoire est invariable.

Les tartrates acides, peu solubles, ont dû être observés pour une concentration moitié moindre et ont donné une moindre dispersion rotatoire; ces dissolutions se comportent comme de simples mélanges de dissolutions de sel neutre et d'acide libre, ce qui porterait à admettre que le sel acide n'existe pas en dissolution.

P. GLAN. — Spectrosaccharimètre, t. XLIII, p. 441-448.

Une source de lumière blanche, un collimateur, un prisme polariseur de Glan, un diaphragme circulaire S dont une moitié est recouverte par une plaque de quartz normale à l'axe et peu épaisse qui fait tourner le plan de polarisation d'un petit nombre de degrés variable avec la courbure, un analyseur A mobile sur un cercle gradué, enfin le prisme et la lunette L du spectroscope portant à son foyer une fente, telles sont les pièces qui constituent le spectrosaccharimètre de M. Glan. Si l'on donne à l'oculaire L un tirage convenable, on verra une image du diaphragme S dont les deux moitiés, d'éclat inégal, auront une même teinte monochromatique. Par une rotation convenable de l'analyseur A, à partir de la position qui éteint l'une des moitiés du champ, les deux moitiés prennent des éclats égaux et, comme dans tous les appareils à pénombre, il suffira d'une très légère rotation de A soit vers la droite, soit vers la gauche, pour altérer visiblement cette égalité.

On étudie d'abord l'appareil à vide, une fois pour toutes, en employant par exemple la lumière solaire, et l'on détermine les positions de A qui donnent l'égalité d'éclat dans les diverses régions du spectre. On peut ensuite interposer le tube saccharimétrique T, et les nouvelles positions de A correspondant à l'égalité d'éclat donnent la rotation produite par la dissolution employée. Il est indispensable que les lames qui ferment T aux deux extrémités soient bien parallèles entre elles.

P. VON BJERKÉN. — Recherches sur la double réfraction produite par la traction ou par la compression linéaire dans le caoutchouc et les gelées de gélatine. t. XLIII, p. 808-816.

La double réfraction provoquée par la traction dans le caout-

chouc ou la gélatine est négative ($n_0 > n_e$); elle doit être considérée comme étroitement liée à la grandeur de la déformation, mais. d'une manière générale, elle ne paraît pas lui être rigoureusement proportionnelle. Le quotient $\frac{n_0 - n_e}{l}$, où l désigne l'augmentation de longueur, croît avec l pour le caoutchouc, demeure sensiblement constant ou décroît pour les diverses gelées. Pour une valeur donnée de l ce quotient est d'autant plus petit que le coefficient d'élasticité est plus grand.

Les corps étudiés par M. von Bjerkén offrent, avec une grande intensité, les phénomènes de l'élasticité résiduelle. Ils montrent aussi une double réfraction résiduelle assez importante et qui suit des lois tout à fait analogues à celles de la déformation résiduelle.

S. CZAPSKI. — Sur la double réfraction de plaques de verre rapidement refroidies, t. XLII, p. 319-331.

M. S. Exner (¹) a prouvé qu'un cylindre à bases planes dont l'indice de réfraction croît ou décroît d'une manière continue de l'axe à la périphérie se comporte, par rapport à un faisceau de lumière parallèle à l'axe du cylindre, comme le ferait une lentille divergente ou convergente. Ce fait qui paraît contraire aux lois de l'Optique géométrique s'explique très aisément, si au lieu de rayons parallèles, on considère l'onde plane normale à ces rayons : l'onde, c'est-à-dire le lieu des points synchrones, se déforme à mesure que l'épaisseur traversée est plus grande; si l'indice croît du centre à la périphérie, l'onde plane devient de plus en plus concave vers la lumière incidente; s'il croît, elle devient de plus en plus convexe, c'est-à-dire que le faisceau de lumière parallèle se transforme en un faisceau divergent ou convergent.

Si le cylindre, placé entre deux nicols, est traversé par un faisceau de lumière parallèle à l'axe, on observera des anneaux concentriques pareils à ceux que donnerait en lumière convergente une lame cristalline uniaxe perpendiculaire à l'axe.

Les deux effets que l'on vient d'indiquer s'observent avec une assez grande régularité sur des cylindres de verre rapidement refroidis, tels qu'on les obtient en coulant du verre fondu dans un

(¹) S. EXNER, *Pfluger's Archiv f. d. Ges. Physiol.*, t. XXXVIII, p. 274; 1886.

moule métallique froid. On obtient des phénomènes analogues, plus réguliers quoique moins intenses, en observant par leurs tranches bien dressées des plaques de verre préparées de la manière suivante : il suffit de fondre dans un moule convenable un morceau de verre bien homogène et de l'abandonner ensuite à un refroidissement rapide. Un faisceau parallèle de lumière naturelle ou polarisée donne naissance à des ondes cylindriques ; entre deux nicols, on observe des franges parallèles aux faces larges de la lame.

De ces observations et notamment de la position occupée par les franges *noires* quand on emploie de la lumière blanche, on tire les conclusions suivantes :

1. Une plaque, rapidement refroidie, est tendue normalement aux faces de la plaque dans sa région moyenne, comprimée dans sa région superficielle ; entre les deux régions se trouve une zone neutre où le verre se comporte, dans toutes les directions, comme un corps isotrope.

2. La lumière éprouve un retard plus considérable dans la région moyenne ; ce retard, pour la lumière polarisée perpendiculairement à la plaque, est environ deux fois plus grand que pour la lumière polarisée parallèlement à la plaque. La variation d'indice correspondante, pour une plaque de 30^{mm} d'épaisseur, peut atteindre une unité du quatrième ordre décimal.

P. DRUDE. — Sur la réflexion et la réfraction d'ondes lumineuses par une série de lames parallèles portant des couches superficielles, t. XLIII, p. 126-157.

M. Drude étudie le problème général de la réflexion et de la réfraction par une série de lames parallèles jouissant chacune d'un pouvoir absorbant déterminé qui, comme cas particulier, peut être nul ; pour exprimer l'effet d'une couche superficielle, il suffit de compter cette couche pour une lame absorbante distincte, d'épaisseur négligeable.

Le résultat le plus intéressant des calculs de M. Drude est de fournir une valeur minimum de l'épaisseur ε qu'il faut supposer à une couche superficielle affectant la surface d'un corps parfaitement transparent, pour communiquer à la lumière réfléchie une

certaine ellipticité. Pour les corps étudiés par Jamin, M. Drude trouve des valeurs de ε en général négligeables par rapport à la longueur d'onde λ de la lumière employée

Substance.	$\frac{\varepsilon}{\lambda}$.
Diamant....	0,0068
Flint.........................	0,0103
Quartz...	0,0085
Crown.........................	0,0061

La présence de couches superficielles aussi minces peut être considérée comme très vraisemblable.

P. DRUDE. — Mesure des constantes optiques du cobalt, t. XLII, p. 186-190.

Voici les résultats des mesures de M. Drude. Ils sont exprimés au moyen des notations déjà employées par l'auteur dans son Mémoire de 1890, précédemment analysé dans ce recueil (¹)

$$n = 2,12, \quad n' = 2,22, \quad n\varkappa' \frac{\lambda'}{\lambda} = 3,86.$$
$$n\varkappa = 4,03, \quad n'\varkappa' = 4,19.$$
$$\varkappa = 1,90, \quad \varkappa' = 1,89,$$
$$J = 67,5, \quad J' = 68,5,$$
$$\varphi = 78^\circ 5', \quad \varphi' = 78^\circ 29',$$
$$\psi = 31^\circ 40', \quad \psi' = 31^\circ 35',$$

Le cobalt étudié contenait 1,5 de nickel, 0,9 de fer et 0,6 de cuivre pour 100.

P. DRUDE. — Sur la réfraction de la lumière à travers des prismes métalliques, t. XLII, p. 666-673.

M. Drude traite d'abord la question dans le cas général où l'angle du prisme et l'angle d'incidence sont quelconques; il développe ensuite les formules pour le cas pratique où l'angle du prisme est très petit, et montre que quand l'indice n du prisme est plus grand que celui du milieu extérieur, la lumière est plus déviée vers l'arête du prisme qu'elle ne le serait si la loi de Descartes était applicable.

(¹) *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. X, p. 537.

Passant ensuite à la théorie des expériences de MM. du Bois et Rubens (1), il montre que l'écart avec la loi de Descartes est bien dans le sens où l'ont indiqué ces expérimentateurs. Le Tableau suivant donne les valeurs de la déviation α du rayon lumineux en secondes pour les diverses incidences i : 1° observées par MM. du Bois et Rubens; 2° calculées par M. Drude;

Fer, $n = 3,01$.

i.		0°.	30°.	40°.	50°.	55°.	60°.	65°.
α	obs.....	51,7	66,7	74,3	98,5	107,3	125,7	153,9
	calc....	51,7	63,8	75,3	94,6	108,9	129,0	156,7

Cobalt, $n = 3,16$.

α	obs.....	47,0	61,2	73,2	95,1	113,0	124,0	152,4
	calc....	51,0	62,5	73,6	92,2	106,1	125,3	152,4

Nickel, $n = 1,91$.

α	obs.....	27,3	31,3	36,8	51,0	61,2	84,4	114,4
	calc....	25,2	33,3	41,3	54,6	64,7	75,5	97,7

Il y a lieu de remarquer que les valeurs de n admises par M. Drude pour effectuer ces calculs ne coïncident pas à beaucoup près avec les valeurs qu'il a déduites de ses propres expériences sur la réflexion métallique (2) et qui sont : pour le fer, $n = 2,36$; pour le nickel, $n = 1,79$ et pour le cobalt, $n = 2,12$.

E. Bouty.

ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE.

6e Série. — Tome XXII. — 1891.

Capitaine GOSSELIN. — Note sur une méthode expérimentale pour l'étude des courants induits, p. 52.

Le courant d'une pile est envoyé dans une bobine inductrice, par exemple la bobine inductrice d'une machine de Ruhmkorff, dont les extrémités sont reliées à un condensateur. Le circuit induit traverse un rhéostat et un galvanomètre est placé en dérivation sur une résistance variable de ce rhéostat.

(1) Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 535.

(2) *Ibid.*, p. 539 et ci-dessus, p. 494.

Supposons que le circuit inducteur soit fermé, ainsi que le circuit induit, mais que le circuit du galvanomètre soit ouvert. On rompt le circuit inducteur. Un courant induit direct se propage à travers le rhéostat. On ferme ensuite le circuit du galvanomètre pendant la propagation du courant induit qui, à partir de cet instant et jusqu'à sa fin, se propage également dans la dérivation du galvanomètre. L'aiguille du galvanomètre recevra donc une impulsion dont on pourra mesurer l'amplitude, et de laquelle on déduira la quantité d'électricité qui a passé dans le galvanomètre. On en tire ensuite, sans difficulté, la quantité totale d'électricité induite, depuis l'instant de la fermeture du circuit du galvanomètre jusqu'au moment où l'intensité du courant induit devient nulle.

Pour mesurer les temps, l'auteur emploie le chronographe de chute du colonel Sebert basé sur la chute d'un poids portant des plumes qui appuient sur deux grandes lames verticales recouvertes de noir de fumée. On fait tomber ce poids qui est guidé par deux glissières et qui, peu après l'origine de sa chute, détermine automatiquement, en fermant un circuit électrique, la production d'un phénomène quelconque comme le départ d'un coup de canon. Les circuits des enregistreurs sont ensuite rompus successivement, au moment où se produit le phénomène que doit enregistrer chacun d'eux; et, au même instant, leur plume trace sur la lame noircie un petit crochet. De la hauteur où se trouvent marqués les différents signaux des enregistreurs, on peut déduire facilement les intervalles de temps qui ont séparé la production des phénomènes successifs.

L'auteur s'est servi d'un galvanomètre à aiguille astatique suspendue par un fil de cocon et il a préalablement taré cet appareil, afin d'exprimer en unités pratiques les quantités d'électricité proportionnelles, comme on sait, aux sinus des demi-impulsions de l'aiguille. Il a suffi, pour cela, de faire passer dans le galvanomètre des courants d'intensité et de durée connues et de noter les impulsions correspondantes de l'aiguille.

L'étude d'un courant induit inverse se fait de la même manière. Il suffit de fermer simultanément le circuit inducteur et le circuit du galvanomètre au lieu de fermer ce dernier après avoir rompu le circuit inducteur.

Les courbes données par le capitaine Gosselin mettent en évi-

dence les différences qui existent dans le mode de propagation des courants induits direct et inverse.

L'intensité maxima du courant induit direct paraît atteindre $0^{amp},220$ environ, tandis que celle du courant induit inverse ne dépasse pas $0^{amp},145$. Le maximum a lieu $\frac{0,75}{1000}$ de seconde après l'origine, pour le courant induit direct, et $\frac{4,50}{1000}$ de seconde, pour le courant induit inverse, soit six fois plus tard. La durée du courant induit direct est plus grande que celle du courant induit inverse.

L'auteur a fait d'autres mesures en interposant dans le circuit du courant induit une mince lame d'air limitée par deux petites boules de platine. On augmentait ainsi considérablement la résistance de ce circuit. Les résultats ont été les suivants :

	Épaisseur de la lame d'air.	Durée du courant induit en millièmes de seconde.	Intensité moyenne du courant induit.
	mm		amp
Courant induit direct ou de rupture.	0,15	4,3	0,063
	0,25	2,5	0,058

Enfin, le capitaine Gosselin a étudié les extra-courants de rupture et de fermeture d'un électro-aimant B qui était intercalé dans l'une des branches parallèles d'un pont de Wheastone, les trois autres branches du parallélogramme comprenant trois résistances : une résistance R contiguë à B et de l'autre côté du point d'arrivée du courant de la pile, et deux autres résistances r_1 et r_2. Ces résistances sont telles que

$$\frac{B}{R} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Un galvanomètre est placé sur une diagonale du parallélogramme; l'autre diagonale, qui renferme la pile, comprend en outre une résistance très grande relativement aux résistances R, B, r_1 et r_2. Le circuit de la pile et celui du galvanomètre peuvent être ouverts ou fermés.

La durée des courants induits directs croît en sens contraire de la résistance des circuits dans lesquels ils se propagent. Le travail apparent décroît à mesure que la résistance augmente.

L'intensité du courant induit est plus petite que lorsqu'il n'y a

pas de self-induction, et les maxima d'intensité se sont toujours produits au bout d'un temps appréciable après la rupture du courant de la pile.

La résistance R a été remplacée par un électro-aimant de résistance égale. Deux courants induits se propagent alors dans le circuit BRr_1r_2.

Si l'on considère, par exemple, l'extra-courant de rupture, on trouve que ce courant composé ou résultant est nettement ondulatoire, et que son intensité subit des alternatives de croissance et de décroissance, et des changements de signe. Les ondulations ont, au début et pendant un temps très court ($\frac{1}{1000}$ à $\frac{2}{1000}$ de seconde), une amplitude très grande. Les maxima et minima d'intensité semblent atteindre des valeurs beaucoup plus considérables que celle du courant de la pile dans l'état permanent; puis, cette amplitude diminue rapidement et le courant se prolonge pendant un temps relativement très long avec des intensités très faibles, tantôt positives, tantôt négatives.

Si l'on revient ensuite à la première composition du circuit, et qu'on supprime le second électro-aimant en replaçant en R la résistance équivalente, on trouve que la durée du nouvel extra-courant est beaucoup plus petite que celle du précédent.

CH. ANTOINE. — Tensions des vapeurs, p. 281.

L'auteur expose comment, en partant de la formule empirique de M. J. Bertrand

$$H = G\left(\frac{T-\lambda}{T}\right)^{\alpha},$$

qui relie la tension H des vapeurs saturées à la température absolue T et dans laquelle G, α, λ sont des coefficients numériques qui dépendent de la nature des vapeurs, il est arrivé à sa formule

$$\log H = A - \frac{B}{t+c}.$$

Il donne la valeur des constantes A, B et c pour les vingt-quatre corps suivants :

I. Acide carbonique.
II. Chlorure de phosphore.
III. Chlorure de silicium.
IV. Éther iodhydrique.
V. Éther méthylique.
VI. Éther méthylchlorhydrique.
VII. Protoxyde d'azote.
VIII. Ammoniaque.
IX. Acide sulfhydrique.
X. Acide sulfureux.
XI. Chlorure de bore.
XII. Chlorure de cyanogène.
XIII. Éther chlorhydrique.
XIV. Éther sulfurique.
XV. Acétone.
XVI. Alcool méthylique.
XVII. Alcool vinique.
XVIII. Chloroforme.
XIX. Chlorure de carbone.
XX. Éther bromhydrique.
XXI. Sulfure de carbone.
XXII. Benzine.
XXIII. Mercure.
XXIV. Soufre.

N. NEYRENEUF. — Mémoire sur l'écoulement du son par des tuyaux cylindriques, p. 368.

L'auteur a donné antérieurement [1] l'énoncé d'une loi relative à l'écoulement des sons par des tuyaux cylindriques dont le diamètre est peu considérable.

Cette loi est identique à celle établie par Poiseuille pour l'écoulement des fluides par les tuyaux capillaires. Si l'on appelle I l'intensité du son à l'orifice de sortie, l, d la longueur et le diamètre du tuyau, K une constante fonction de l'intensité de la source sonore et de la nature de la substance formant le tuyau, on peut écrire

$$I = K \frac{d^4}{l}.$$

Les mesures de l et de d ne présentent aucune difficulté particulière.

Pour mesurer I, l'auteur emploie une *flamme sensible* décrite dans un Mémoire antérieur [2] et produite par simple ralentissement du jet gazeux qui alimente un bec Bunsen dont les ouvertures latérales sont maintenues closes.

M. Neyreneuf a d'ailleurs étudié, dans un autre travail [3], les propriétés de cette flamme au point de vue acoustique et les procédés les plus propres à lui assurer une sensibilité constante.

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCV.
(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XIX.
(3) *Mémoires de l'Académie de Caen*, 1882.

Le premier Chapitre du Mémoire actuel de M. Neyreneuf est consacré à l'étude du fonctionnement de cette flamme sensible.

Dans le second Chapitre, l'auteur s'est appliqué à bien définir les sons dont il a fait usage et à indiquer les précautions à prendre pour laisser à leur écoulement un caractère bien défini.

Le troisième Chapitre est consacré aux déterminations expérimentales. M. Neyreneuf établit d'abord, au moyen de deux tuyaux que l'on pouvait ouvrir séparément ou en même temps, que l'intensité sonore, à partir de l'ouverture libre du tuyau, varie en raison inverse du carré de la distance.

Il a vérifié la *loi des longueurs* avec des tuyaux de cuivre variant depuis 714^{mm} jusqu'à 1720^{mm}, avec des tuyaux de plomb dits de 27^{mm} de diamètre, de longueurs 4220^{mm} et 2220^{mm} et enfin avec des tuyaux de plomb du diamètre précédent mais de longueurs 3680^{mm} et 2100^{mm}.

Il a vérifié la *loi des diamètres* avec des tubes de diamètres variant de 6^{mm} à 26^{mm}. Les tubes de cuivre ont donné de bons résultats, mais avec des tubes de verre les résultats n'ont jamais été satisfaisants. Cela serait dû, paraît-il, à ce que ces tubes ne sont jamais exactement cylindriques.

M. Neyreneuf a enfin étudié l'influence de la nature du tuyau sur la valeur de K. Le laiton et le plomb n'ont donné aucune différence dans l'intensité du flux sonore. Le flux transmis par les tuyaux de caoutchouc est, au contraire, moins intense que le flux transmis par les tuyaux en plomb.

H. RIGOLLOT. — Sur un actinomètre électrochimique, p. 567.

Cet appareil se compose de deux lames de cuivre oxydées, plongeant dans de l'eau contenant $\frac{1}{1000}$ de chlorure, bromure ou iodure de sodium. L'une des lames est exposée aux radiations lumineuses, l'autre protégée de l'action de la lumière soit en l'entourant de parchemin ou de papier, soit en la plaçant immédiatement derrière la première lame à $0^{m},001$ de distance environ.

L'effet produit par la lumière est instantané et disparaît quand on supprime l'éclairement.

La sensibilité d'un élément décroît assez rapidement au début, puis devient sensiblement constante.

La force électromotrice d'un actinomètre donné varie avec la couleur de la lumière qui agit sur lui.

M. Rigollot a étudié la force électromotrice dans les différentes régions d'un spectre et donne les courbes obtenues en portant en abscisses les longueurs d'onde et en ordonnées les divisions lues sur l'échelle d'un galvanomètre. Ces courbes montrent que l'actinomètre à lames de cuivre a son maximum de sensibilité dans la région jaune du spectre, c'est-à-dire dans la région la plus lumineuse pour l'œil. Il diffère en cela des actinomètres à composés d'argent qui sont surtout sensibles pour les rayons les plus réfrangibles.

Si, après avoir parcouru le spectre du rouge au violet, on expose à nouveau le système de lames dans toutes les parties du spectre, mais en allant du violet au rouge, les courbes conservent la même forme et l'accroissement de sensibilité pour les rayons rouges signalé par M. E. Becquerel (1), pour les lames iodurées, quand ces lames ont été préalablement exposées aux rayons plus réfrangibles, ne semble pas avoir lieu.

M. Rigollot s'est servi de son actinomètre pour étudier la lumière diffusée par la partie nord du ciel aux différentes heures du jour. Il donne la courbe obtenue le 17 septembre 1889 sur la terrasse du laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lyon, par un ciel très pur. Elle montre un maximum d'éclairement vers midi et demi; la courbe est sensiblement symétrique par rapport à ce maximum pour les différentes heures du jour.

Enfin l'auteur a recherché si, comme l'indique M. Egoroff pour les plaques iodurées, l'intensité du courant est inversement proportionnelle au carré de la distance de la source lumineuse à l'appareil. Cette loi se vérifie sensiblement en employant la lumière de Drummond comme source lumineuse, c'est-à-dire en lumière faible, mais avec la lumière solaire l'intensité croît plus vite que l'intensité du courant.

Comme les indications de cet instrument sont, en faible lumière, proportionnelles à l'éclairement, on peut l'employer avantageusement dans certains cas, tels que l'étude de la luminosité du ciel en lumière diffusée.

---

(1) E. Becquerel, *La Lumière*, t. II, p. 138.

Tome XXIV. — 1891.

GOUY. — Sur la propagation anomale des ondes, p. 145.

L'objet principal du travail de M. Gouy est l'étude d'une propriété nouvelle des ondes lumineuses qui peut se formuler ainsi :

Considérons un faisceau de rayons homogènes, soient S et S' deux surfaces d'ondes, l leur distance comptée sur une normale commune, et $f(t)$ le mouvement vibratoire sur la surface S ; on admet généralement que le mouvement vibratoire sur S' est, à l'amplitude près, $f\left(t - \frac{l}{a}\right)$, en désignant par a une constante qui est la vitesse de propagation des ondes considérées.

M. Gouy s'est proposé de montrer, par la théorie et par des expériences d'interférences, que cette loi est en défaut lorsque les ondes, entre S et S', passent par un foyer ou par une ligne focale, et que, dans le premier cas, il faut retrancher $\frac{\lambda}{2}$ à la longueur l et, dans le second cas, $\frac{\lambda}{4}$. Tout se passe donc comme si les ondes, au voisinage du foyer ou de la ligne focale, se propageaient avec une vitesse plus grande, de manière à gagner ainsi une avance de $\frac{\lambda}{2}$ ou de $\frac{\lambda}{4}$ sur un mobile qui se déplacerait sur la normale commune avec la vitesse a.

Ces phénomènes sont surtout intéressants en ce qu'ils obligent à examiner de plus près la question de la propagation des ondes dans un milieu sans dispersion, ou dans des conditions où la dispersion n'entre pas en jeu, et il est naturel d'envisager d'abord les ondes sonores, dont la théorie est mieux établie. Les notions usuelles sur la propagation des ondes sont empruntées à la théorie des ondes planes ou de grand rayon et l'on paraît admettre, d'après un théorème bien connu sur la vitesse du son et d'après certains raisonnements d'un caractère élémentaire, que les lois de la propagation des ondes planes sont partout applicables. En réalité, ce mode de propagation, qu'on peut appeler *normal*, a jusqu'ici suffi à peu près aux besoins de la Physique ; on ne doit pourtant le regarder que comme une première approximation fort utile, mais

qui peut, dans certains cas et notamment pour les nouveaux phénomènes dont il s'agit, ne pas être suffisante. Les ondes planes ou de grand rayon constituent, en effet, un cas *limite,* et, comme tel, d'une simplicité *exceptionnelle,* et les notions qui en dérivent forment un cadre trop étroit pour l'ensemble des mouvements vibratoires.

M. Gouy s'est proposé de présenter une étude détaillée de la propagation des ondes sphériques, qui forment le cas le plus simple et le plus important après celui des ondes planes. L'expression de ces mouvements pour les ondes aériennes a été donnée par Euler et souvent reproduite depuis ; on en a fait plusieurs fois usage dans divers problèmes relatifs à la théorie du son. Par une circonstance singulière, il ne semble pas que ces formules si anciennement connues aient été, en elles-mêmes, l'objet d'une attention suffisante au point de vue physique, et les lois des ondes sphériques n'ont pas été étudiées d'assez près pour entrer dans les notions usuelles de la Physique ondulatoire, où elles paraissent appelées à jouer un rôle utile.

L'auteur examine ces lois en détail et il démontre notamment que la propagation accélérée des ondes périodiques, qu'on peut appeler *anomale,* est une propriété générale des ondes lorsque leur rayon n'est pas très grand vis-à-vis de la longueur d'onde. De là résultent les phénomènes d'*avance aux foyers* signalés plus haut, et une solution de certaines difficultés que présentait le principe de Huygens.

MASCART. — Sur les anneaux colorés, p. 373.

La méthode imaginée par Sir G. Airy (1) pour calculer les interférences dans les lames minces, en tenant compte des réflexions multiples de la lumière entre les deux surfaces, s'applique sans difficulté au cas où l'on suppose que chacune des réflexions ou réfractions est accompagnée d'une perte de phase sur la surface correspondante.

D'autre part, Sir G. Stokes (2) a démontré, par le principe de

(1) *Trans. of the Cambr. Phil. Soc.*, t. IV, p. 419; 1830.
(2) *Cambr. and. Dubl. Math. Journ.*, t. IV, p. 1; 1849.

réversibilité, que, pour une lumière polarisée dans un des azimuts principaux, la perte de phase par réfraction est indépendante du sens de la propagation et que la somme des pertes de phase par réflexion, des deux côtés de la surface de séparation de deux milieux, est égale au double de la perte de phase par réfraction sous la même incidence, au moins quand les couches sur lesquelles s'opère le phénomène sont assez épaisses pour que la réflexion et la réfraction définitives soient établies.

A l'aide de ce théorème, on trouve aisément que, dans les anneaux colorés de réflexion et pour une lumière polarisée dans l'un des azimuts principaux, la vibration finale se réduit à deux vibrations dont la différence de phase comprend :

1° la perte de phase δ_0 qui correspond à deux passages de la lumière dans la lame mince;

2° la somme des pertes de phase par réflexion intérieure sur les deux surfaces S et S_1 qui limitent cette lame.

Le phénomène est surtout intéressant dans la réflexion vitrée, pour la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, au voisinage de l'incidence principale où se manifestent les effets de réflexion elliptique.

Si la lame mince est une couche d'air comprise entre deux milieux différents et que l'on représente par β et β_1 les pertes de phase relatives à la réflexion intérieure sur la première et sur la seconde surface, la différence de phase finale des vibrations qui interfèrent est

$$\delta_0 + \beta + \beta_1.$$

Quand on augmente l'inclinaison d'une manière continue, les angles β et β_1 varient très rapidement d'une quantité très petite ν à $\pm\pi-\nu$ au passage des incidences principales correspondantes I et I_1. Si la tache centrale est noire avant qu'on ait atteint l'incidence I, elle devient blanche aussitôt après et cette nouvelle tache blanche provient de la contraction rapide du premier anneau dans le cas où la réflexion est positive; c'est, au contraire, la tache noire primitive qui se dilate pour former ensuite le premier anneau si la réflexion est négative. Cette circonstance fournit une méthode qualificative pour déterminer rapidement et sans aucune mesure le signe de la réflexion.

La déformation continue des anneaux au passage de l'incidence principale est la première observation, due à Sir G. Airy, qui ait permis de constater sur le diamant l'existence de la réflexion elliptique généralisée par les travaux de Jamin. Toutefois, une discussion plus attentive des formules permet de prévoir que le système tout entier des anneaux ne participe pas à ces effets de contraction ou de dilatation.

En effet, quand on considère l'anneau d'ordre m sous l'incidence i,

$$\delta_0 + \beta + \beta_1 = 2m\pi,$$

la variation d'épaisseur, pour le même anneau, qui correspond à une variation di de l'incidence, est déterminée par la condition

$$(1) \qquad d\delta_0 + d\beta + d\beta_1 = 0.$$

Si les milieux extrêmes sont très différents et si l'observation est faite au voisinage de l'incidence principale I, la variation $d\beta_1$ est insignifiante. On a, d'autre part,

$$\delta_0 = 2\pi \frac{2e\cos i}{\lambda}, \qquad \frac{d\delta_0}{di} = \frac{4\pi}{\lambda}\left(\cos i \frac{de}{di} - e \sin i\right).$$

La condition (1) devient alors

$$(2) \qquad \cos i \frac{de}{di} = e \sin i - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{d\beta}{di}.$$

Si la réflexion est positive, $\frac{d\beta}{di} = b$ est positif. D'abord très faible, tant qu'on est loin de l'incidence principale, b croît ensuite rapidement au voisinage de cette région, passe par un maximum B et redevient nul.

Si le second membre de l'équation (2) est positif, l'épaisseur e relative à l'anneau d'ordre m croît avec l'incidence, c'est-à-dire que les anneaux se dilatent, ce qui correspond à la marche générale des phénomènes observés par Newton; l'inverse a lieu lorsque le second membre est négatif.

Quand la dérivée de la perte de phase prend une valeur donnée b, le diamètre de l'anneau passe par un maximum ou un minimum pour l'épaisseur

$$(3) \qquad e \sin i = \frac{\lambda}{4\pi} b.$$

A mesure que l'inclinaison augmente, les anneaux voisins du centre se dilatent d'abord, passent par un diamètre maximum, puis se contractent, prennent un diamètre minimum et se dilatent ensuite continûment jusqu'à l'incidence rasante, à moins qu'on ne rencontre la seconde incidence principale I_1. Les deux incidences i et i' relatives à ces arrêts du diamètre et les épaisseurs correspondantes e et e' sont liées par la relation

$$e \sin i = e' \sin i'.$$

L'un de ces anneaux ne change pas de diamètre au passage de l'incidence principale. L'épaisseur E de la couche est alors

$$E \sin I = \frac{\lambda}{4\pi} B.$$

En supposant $I < I_1$, on a sensiblement

$$E \cos I = \frac{\lambda}{4\pi} 2m\pi.$$

$$B = 2m\pi \operatorname{tang} I. \tag{4}$$

L'anneau dont l'ordre est défini par cette équation (4) reste stationnaire au voisinage de l'incidence I; les anneaux d'ordre plus élevé n'éprouvent aucune contraction. Il suffit donc d'observer l'ordre de l'anneau stationnaire pour en déduire la valeur maximum de la dérivée de la perte de phase.

Enfin, si les milieux extrêmes sont identiques, les angles β et β_1 deviennent égaux. La tache centrale reste noire, par contraction du premier anneau, noir si la réflexion est positive, et l'ordre m' de l'anneau stationnaire est

$$B = m'\pi \operatorname{tang} I. \tag{5}$$

D'après les formules de Cauchy, on aurait, en appelant n l'indice du milieu supérieur, r l'angle de réfraction et ε le coefficient d'ellipticité,

$$\operatorname{tang} \beta = \varepsilon \sin i \operatorname{tang}(i + r).$$

La dérivée maximum de la perte de phase correspond à $i + r = 90°$, c'est-à-dire sensiblement à l'incidence principale

définie par la loi de Brewster tang I $= n'$, ce qui donne

$$B = \frac{1}{\varepsilon \sin^3 I} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

M. Mascart a constaté expérimentalement l'existence d'un anneau stationnaire sur une lame d'air comprise soit entre deux flints de même nature, soit entre un prisme de crown et une surface de diamant.

Il a reconnu également que l'ordre de l'anneau stationnaire varie avec la longueur d'onde.

J.-A. MULLER. — Sur une nouvelle application du gaz-volumètre de Lunge, p. 570.

M. Lunge[1] a imaginé un appareil qui permet d'éviter tout calcul de réduction dans les lectures de volumes gazeux, en soumettant le volume du gaz à mesurer et celui d'une masse connue d'air, dans les mêmes conditions d'humidité et de température, à une pression telle que le volume occupé par la masse d'air soit celui qu'elle occuperait à 0° et 760mm, si cet air était sec.

Mais, dans certains cas, par exemple dans la détermination d'une densité de vapeur par la méthode de V. Meyer, ou celle de l'acide carbonique des carbonates par la méthode de Scheibler, il est nécessaire de recueillir d'abord sur l'eau l'air ou l'azote déplacé, à cause du poids spécifique élevé du mercure.

Cependant, même en recueillant le gaz sur l'eau, son volume diffère souvent, d'une quantité notable, de celui de la vapeur ou du gaz formé, par suite des petites variations de pression et de température qui peuvent se produire depuis la fermeture de l'appareil à dégagement, jusqu'à la fin de l'opération.

Afin d'éviter cette cause d'erreur, M. Muller place à côté de l'appareil à dégagement un vase de même forme et de même capacité que lui, autant que possible. Ce vase est plein d'air et la différence entre la force élastique de ce fluide et la pression atmosphérique est indiquée par un manomètre à eau. A la fin de

---

(1) *Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft*, t. XXIII, p. 440.

l'expérience, on augmente ou l'on diminue la pression du gaz dans l'appareil à dégagement d'une quantité égale à cette différence.

M. Muller décrit une disposition qui permet de réaliser facilement cette manœuvre et le transvasement subséquent du gaz recueilli dans le gaz-volumètre de Lunge. René Paillot.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Wiedemann's Annalen.

T. XLVII; n° 10, 1892.

D. Shea. — *Réfraction et dispersion de la lumière par des prismes métalliques*, p. 177.

H.-E.-J.-G. du Bois et H. Rubens. — *Loi de réfraction de la lumière qui pénètre dans un milieu absorbant*, p. 203.

B.-W. Snow. — *Spectre d'émission infra-rouge des alcalis*, p. 208.

P. Glan. — *Changement absolu de phase de la lumière par la réflexion*, p. 252.

F. Koláček. — *Théorie de la double réfraction obtenue par voie inductive*, p. 258.

D.-A. Goldhammer. — *Études sur la théorie électrique de la lumière*, p. 265.

R. Lohnstein. — *Sur le passage des courants faibles à travers les électrolytes*, p. 299.

W. Wien. — *Sur le mouvement des lignes de force dans un champ électromagnétique*, p. 327.

D.-A. Goldhammer. — *Théorie électrique des phénomènes magnéto-optiques*, p. 345.

H. Ebert. — *Interrupteur automatique pour accumulateurs*, p. 349.

G. Berthold. — *Histoire du phénomène de Leidenfrost; Notice historico-bibliographique*, p. 350.

SUR L'ACHROMATISME DES INTERFÉRENCES;

Par M. MASCART.

Dans un grand nombre de phénomènes d'Optique, la superposition des franges obtenues à la lumière blanche produit en certains points une concordance particulière des systèmes relatifs aux couleurs voisines et un véritable *achromatisme*, entièrement comparable à celui que l'on obtient par la combinaison des prismes et des lentilles.

J'en ai cité déjà plusieurs exemples (1). Lord Rayleigh (2), qui avait également discuté ce problème, a fait quelques objections, dans son dernier Mémoire, à la manière dont j'interprète la visibilité des franges d'Herschel; ses objections sont en partie justifiées par une insuffisance d'explications et je crois utile d'y revenir.

Supposons que dans un système de franges où intervient un organe de dispersion (lame réfringente, prisme ou réseau), l'ordre des interférences soit compté à partir d'une valeur initiale p. Pour l'interférence d'ordre $p+m$, la déviation angulaire θ, rapportée à une origine arbitraire, peut se représenter par une expression de la forme

$$\theta = \mathrm{F}(n, p) + f\left(\frac{m\lambda}{a}\right). \tag{1}$$

La variable n est l'indice de réfraction du milieu réfringent ou le rapport de la longueur d'onde à l'écartement des traits du réseau; le produit $m\lambda$ est la différence de marche supplémentaire des systèmes d'ondes qui interfèrent, et le paramètre a est une longueur qui dépend de la nature du phénomène.

Si l'on observe, par exemple, les franges de Fresnel avec un prisme ou qu'on les dévie par une lame de verre sur le trajet de l'un des faisceaux, l'ordre initial p est nul pour toutes les couleurs

---

(1) E. Mascart, *Journal de Physique* [2], t. VIII, p. 445; 1889. — *Traité d'Optique*, passim.

(2) Lord Rayleigh, *Encyclopédie britannique* (*Wave theory of Light*); 1888. — *Phil. Mag.* [5], t. XXVIII, p. 77 et 189; 1889.

sur la frange centrale et a représente la distance des deux sources virtuelles.

Quand on vise avec un prisme les anneaux de Newton localisés dans une couche très mince d'épaisseur variable, l'ordre p est encore nul pour la tache centrale, si les surfaces se touchent, et varie avec la longueur d'onde si elles ne sont pas en contact; le paramètre a sera la différence des rayons de courbure des deux surfaces à leur minimum de distance.

Les franges d'Herschel ne sont autre chose que l'observation au travers d'un prisme des interférences produites par une lame d'air à faces parallèles sur des systèmes d'ondes planes; dans ce cas, l'ordre initial p est nul sous l'incidence rasante et a représente l'épaisseur de la lame.

On obtiendra un phénomène analogue en faisant usage d'un appareil de dispersion pour observer les interférences d'ondes planes produites par une lame à faces parallèles isotrope ou biréfringente; l'ordre initial p varie alors avec la longueur d'onde pour l'incidence normale et le paramètre a sera l'épaisseur de la lame.

Dans l'observation habituelle des lames cristallines à deux axes optiques, l'ordre p est aussi nul sur la direction des axes et le paramètre a est l'épaisseur de la lame, la dispersion étant fournie directement par la double réfraction.

Pour l'arc-en-ciel et toutes les expériences qui donnent des ondes présentant un point d'inflexion, p est l'ordre des interférences sur la direction des rayons efficaces, lequel est indépendant de la couleur. Le paramètre a est le rayon des gouttes liquides ou des tiges cylindriques; d'une manière plus générale encore, le carré a^2 est l'inverse de la dérivée du rayon de courbure de l'onde émergente au point d'inflexion, cette dérivée étant prise par rapport à une longueur comptée sur la tangente.

L'équation (1) paraît ainsi convenir à tous les phénomènes, le premier terme étant remplacé par $F(p, n, n', \ldots)$ quand on fait intervenir plusieurs genres de dispersion. On en déduit

$$(2) \qquad d\theta = F'_n\,dn + F'_p\,dp + \frac{1}{a}(m\,d\lambda + \lambda\,dm)f'\left(\frac{m\lambda}{a}\right).$$

Les franges se superposent pour toutes les couleurs dont la

longueur d'onde est voisine d'une certaine valeur, choisie arbitrairement, lorsque la dérivée partielle de la déviation par rapport à la longueur d'onde est nulle, l'ordre m étant supposé constant. On peut dire que les franges sont *achromatisées* sur la couleur de concordance, les franges de même ordre relatives aux couleurs éloignées, de longueurs d'onde plus grandes ou plus petites, étant rejetées d'un même côté. Le phénomène est le même que si le spectre correspondant aux interférences d'ordre $(m+p)$ était appliqué sur une courbe que l'on verrait suivant la tangente au point de concordance.

La condition d'achromatisme est donc, en multipliant tous les termes de l'équation (2) par $\frac{\lambda}{d\lambda}$ et faisant $dm = 0$,

$$(3) \qquad F'_n \frac{\lambda\, dn}{d\lambda} + F'_p \frac{\lambda\, dp}{d\lambda} + \frac{m\lambda}{a} f'\left(\frac{m\lambda}{a}\right) = 0.$$

Si l'on élimine la quantité $\frac{m\lambda}{a}$ entre les équations (1) et (3), en représentant par des majuscules toutes les valeurs relatives à la frange de concordance, la déviation correspondante est une expression de la forme

$$\Theta = F(N, P) + \varphi(N, P, \Lambda).$$

Cette équation qui peut donner une ou plusieurs valeurs réelles de Θ, signifie que la direction d'achromatisme est *indépendante de l'ordre* M *de concordance et du paramètre* a; elle varie avec la longueur d'onde de concordance.

La largeur apparente des franges est le changement de déviation $\delta\theta$ qui correspond à la variation $\delta m = 1$, quand on suppose la couleur homogène. Plus généralement, la valeur de $\delta\theta$ relative à la variation de δm dans l'ordre des interférences est, en faisant $d\Lambda = 0$ dans l'équation (2),

$$(4) \qquad \delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial m}\delta m = \frac{\lambda}{a}\delta m f'\left(\frac{m\lambda}{a}\right) = \frac{1}{m}\frac{m\lambda}{a} f'\left(\frac{m\lambda}{a}\right)\delta m.$$

Dans la région d'achromatisme et pour les radiations voisines de la couleur de concordance, l'équation (3) est applicable; la largeur $\delta\Theta$ des franges achromatisées est donc

$$(5) \qquad \frac{\delta\Theta}{\delta m} = -\frac{1}{M}\left(F'_n \frac{\lambda\, dn}{d\lambda} + F'_\lambda \frac{\lambda\, dp}{d\lambda}\right).$$

Le second membre devant être exprimé en fonction de A, il en résulte que *la largeur des franges achromatisées est indépendante de la longueur d'onde,* la propriété étant restreinte bien entendu aux couleurs voisines; mais cette largeur varie suivant une loi particulière à chaque phénomène, quand on change le point du spectre sur lequel a lieu la concordance.

En outre, la largeur des franges est en raison inverse de l'ordre M d'achromatisme.

Comme le produit $M\frac{\delta\Theta}{\delta m}$ a une valeur définie, on peut encore en conclure que les franges restent visibles dans un certain angle, *en nombre d'autant plus grand qu'elles sont plus serrées* ou que l'ordre d'achromatisme est plus élevé.

Pour éclairer ces considérations par un exemple, nous traiterons le cas des franges d'Herschel, avec les mêmes notations et en disposant les équations dans le même ordre que les précédentes.

Soient i et r les angles d'incidence et de réfraction du rayon qui passe de la couche d'air dans le prisme, ρ et θ les angles d'incidence et de réfraction à la sortie, A l'angle du prisme et a l'épaisseur d'air; on a

$$(1)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos i &= \frac{m\lambda}{a}, \\ \sin i &= n \sin r, \\ r + \rho &= A, \\ \sin\theta &= n \sin\rho. \end{aligned} \right.$$

L'ordre initial p étant nul, ces équations donnent la déviation θ en fonction de n et de $\frac{m\lambda}{a}$. On en déduit

$$(2)' \qquad d\theta = \frac{\sin A}{\cos r \cos\theta}\, dn + \frac{\cos^2 i \cos\rho}{\sin i \cos r \cos\theta}\left(\frac{dm}{m} + \frac{d\lambda}{\lambda}\right).$$

La condition d'achromatisme est

$$(3)' \qquad \frac{\cos^2 i \cos\rho}{\sin i} = -\sin A \frac{\lambda\, dn}{d\lambda}.$$

Avec les trois dernières des équations (1)', elle détermine l'angle Θ correspondant. La position des franges achromatiques est donc indépendante de l'épaisseur a de la couche d'air; on vérifie aisément que la déviation Θ croît avec l'indice de réfraction de la couleur de concordance.

La largeur des franges est donnée par l'une des expressions

$$(4)' \qquad \frac{\delta\theta}{\delta m} = \frac{\cos^2 i \cos\rho}{m \sin i \cos r \cos\theta} = m\frac{\lambda^2}{4a^2}\frac{\cos\rho}{\sin i \cos r \cos\theta}.$$

La largeur des franges successives est sensiblement proportionnelle à l'ordre m d'interférence et au carré de la longueur d'onde. Toutefois cette relation n'est qu'approchée, parce que les variations du dernier facteur avec la déviation et avec la longueur d'onde peuvent changer beaucoup les résultats.

Dans la région d'achromatisme, on doit tenir compte de (3)', ce qui donne

$$(5)' \qquad \frac{\delta\theta}{\delta m} = -\frac{1}{M}\frac{\sin A}{\cos R \cos\theta}\frac{\lambda\, dn}{d\lambda}.$$

Conformément à la règle générale, la largeur des franges achromatiques est en raison inverse de l'ordre M d'interférence; elle varie avec la couleur de comparaison.

Si l'on représente l'indice de réfraction du prisme par la formule de dispersion à deux termes

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

il en résulte

$$\frac{\lambda\, dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^2},$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta m} = \frac{2B}{M\Lambda^2}\frac{\sin A}{\cos R \cos\theta}.$$

A part les variations du dernier facteur, qui sont très faibles, la largeur de la frange achromatique est en raison inverse du carré de la longueur d'onde de concordance; mais, comme l'ordre M croît en sens inverse de Λ, on conçoit que le second membre de l'équation puisse varier très lentement dans une région assez étendue du spectre.

Pour modifier la loi de dispersion, on peut placer, à la suite du prisme et parallèlement à la face de sortie, un réseau dont l'écartement des traits est e, en observant le spectre d'ordre k, dévié dans le même sens.

Remplaçant les angles ρ et θ par r' et i', nous désignerons par θ l'angle d'émergence compté à partir de la normale au réseau. Aux équations précédentes (1)', ainsi transformées, on doit ajouter

$$k\lambda = e(\sin i' - \sin\theta).$$

On a alors

$$k\,d\lambda = e(\cos i''\,di'' - \cos\theta\,d\theta),$$

$$(2)'' \qquad k\frac{d\lambda}{e} + \cos\theta\,d\theta = \frac{\sin A}{\cos r}dn + \frac{\cos^2 i \cos r'}{\sin i \cos r}\left(\frac{dm}{m} + \frac{d\lambda}{\lambda}\right).$$

La condition d'achromatisme devient

$$(3)'' \qquad \frac{\cos^2 i \cos r'}{\sin i \cos r} = -k\frac{\lambda}{e} - \frac{\sin A}{\cos r}\frac{\lambda\,dn}{d\lambda} = -k\frac{\lambda}{e} + \frac{2B}{\lambda^2}\frac{\sin A}{\cos r}.$$

La largeur des franges est, en général,

$$(4)'' \qquad \frac{\delta\theta}{\delta m} = -\frac{\cos^2 i \cos r'}{m \sin i \cos r \cos\theta},$$

et, au voisinage de l'achromatisme,

$$(5)'' \qquad \frac{\delta\theta}{\delta m} = \frac{1}{M\cos\theta}\left(\frac{2B}{\Lambda^2}\frac{\sin A}{\cos R} - k\frac{\Lambda}{e}\right).$$

Les franges achromatisées sont encore en raison inverse de l'ordre M de concordance, mais la loi de variation avec la longueur d'onde est entièrement modifiée. La dispersion du réseau domine celle du prisme, ou inversement, suivant l'importance relative des deux termes de la parenthèse; l'ordre d'achromatisme est alors diminué et les conditions de concordance peuvent s'étendre à une région du spectre beaucoup plus grande.

Si l'on observait les spectres paragéniques du côté opposé, on devrait changer le signe de l'angle θ, ce qui revient à changer le signe de k dans $(3)''$. On aurait alors

$$-\frac{\delta\theta}{\delta m} = \frac{1}{M\cos\theta}\left(\frac{2B}{\Lambda^2}\frac{\sin A}{\cos R} + k\frac{\lambda}{e}\right).$$

Dans ce cas, l'achromatisme est d'un ordre M plus élevé et ne convient plus qu'à une région moins étendue du spectre.

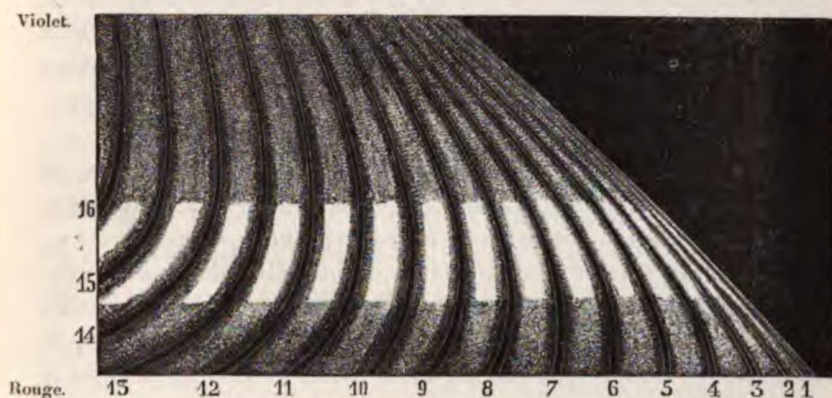
Il est assez difficile de contrôler ces résultats par des mesures directes, car les surfaces ne sont généralement pas assez planes pour que la plus grande netteté des franges ait lieu exactement dans le plan focal de la lunette d'observation. L'expérience suivante permet de voir la marche du phénomène.

Les franges ont été produites par la couche d'air comprise entre les surfaces hypoténuses de deux prismes rectangles isoscèles. En plaçant une lentille sur le trajet de la lumière avant les prismes,

on peut projeter sur un écran les franges de réflexion ou de transmission ; l'observation de ces dernières est préférable, parce qu'elles se détachent sur un fond obscur et que les minima paraissent absolument noirs.

On a reçu ces franges rectilignes sur une fente perpendiculaire à leur direction et observé cette fente au travers d'un prisme ; le spectre présente une série de bandes courbes que la figure ci-jointe représente assez fidèlement.

Fig. 1.



Pour chaque couleur, la succession des franges est la même que si l'expérience eût été faite avec une lumière homogène et la continuité des bandes montre quel est, en chaque point, l'ordre des interférences.

La limite de réflexion totale est marquée par une ligne presque droite ; c'est une coïncidence accidentelle due à ce que la dispersion du prisme était sensiblement proportionnelle à la dispersion de réflexion totale.

La première frange est extrêmement fine ; elle forme un filet de lumière difficile à distinguer dans le vert et le bleu.

La largeur des franges successives croît à peu près comme l'ordre d'interférence, mais il est manifeste que, pour une bande déterminée, la largeur aux différents points n'est pas proportionnelle au carré de la longueur d'onde.

L'achromatisme a lieu lorsque la dérivée de la déviation en fonction de la longueur d'onde, ou de l'indice, passe par zéro,

c'est-à-dire quand la tangente à l'une des courbes est verticale, et les franges des couleurs voisines sont alors de même largeur. Cette condition est remplie vers le 4e minimum dans le rouge, le 8e dans le jaune, le 12e dans le vert, le 15e dans le bleu, etc. La déviation θ d'achromatisme croît avec l'indice de la couleur de concordance, en même temps que les franges correspondantes diminuent, deviennent plus étroites.

Si l'on établit l'achromatisme sur la 11e frange, par exemple, c'est-à-dire sensiblement sur la région de plus grande intensité dans le cas de la figure, on voit qu'il y a un excès de rouge et de bleu à droite du minimum de lumière, un excès de jaune et de vert à gauche; l'irisation des franges vues directement est donc dissymétrique. Toutes les conditions indiquées par le calcul apparaissent ainsi dans la seule forme des bandes noires.

Enfin si l'on écarte les prismes producteurs des interférences, de manière à augmenter l'épaisseur d'air, les bandes marchent vers la limite de réflexion totale, mais en conservant la même forme en chaque point, comme s'il s'introduisait entre elles des bandes nouvelles; elles deviennent de plus en plus serrées, mais la direction d'achromatisme ne change pas. Dans l'observation directe, le nombre des franges visibles augmente donc avec l'épaisseur de la couche d'air.

L'interposition d'un réseau de dispersion convenable permettrait de redresser la limite de réflexion totale et d'amener l'achromatisme sur le bord.

SUR LA THÉORIE DES DIMENSIONS;

PAR M. HENRI ABRAHAM.

1. Nous voulons montrer dans ce Travail qu'il conviendrait de s'astreindre à *ne jamais faire intervenir les propriétés spécifiques des corps dans la détermination des dimensions*. Par exemple, de ce que le gramme a pu être défini comme masse du centimètre cube d'eau, il ne serait pas permis de déduire que masses et volumes ont mêmes dimensions, puisque l'on ferait ainsi appel aux propriétés spécifiques de l'eau. De même, de ce que

deux masses électriques, respectivement égales à Q et Q′ unités C.G.S. électrostatiques, placées *dans l'air* à la distance r, se repoussent avec une force de $\frac{QQ'}{r^2}$ dynes, il ne serait pas permis de déduire que $\frac{QQ'}{r^2}$ a les dimensions d'une force puisque l'on ferait ainsi appel aux propriétés spécifiques de l'air.

La restriction proposée aurait, ainsi que nous le verrons, cette conséquence que les grandeurs dérivées ne pourraient avoir qu'un seul système de dimensions.

2. Voici d'abord ce qui paraît être la théorie actuellement acceptée (¹).

Les expériences de mesures conduisent en général à des lois de proportionnalité. Ainsi, l'*expérience* nous montre que la surface S d'un rectangle de côtés a, b, varie comme l'expression ab; que l'intensité I du courant entretenu par la force électromotrice E dans un circuit de résistance R, varie comme l'expression $\frac{E}{R}$ .... Pour représenter algébriquement ces lois nous écrivons

$$S = kab, \qquad I = k'\frac{E}{R}, \qquad \ldots,$$

en introduisant des coefficients k et k' dont la valeur numérique dépend des unités adoptées pour chaque espèce de grandeurs.

Ces unités sont toujours arbitraires; entre elles, aucune dépendance n'est nécessaire. Cependant le droit de choisir permet d'imposer des conditions qui deviennent obligatoires, mais restent arbitraires. Or il est utile d'avoir des formules très simples; on *convient* donc de coordonner les unités de manière à n'avoir que des coefficients k, k', ... très simples, égaux à 1 s'il est possible.

Pour nos deux exemples nous devrons évidemment prendre 1° comme unité de surface celle d'un rectangle dont les côtés sont égaux à l'unité de longueur; 2° comme intensité unité celle que l'unité de force électromotrice maintient dans un circuit de résistance unité.

(¹) Je fais, pour cet exposé, des emprunts parfois textuels à différents travaux de MM. J. Bertrand, G. Lippmann, J. Boulanger, Everett, etc., on trouvera un index bibliographique à la suite de cet article.

Dès lors les variations de l'unité de surface seront proportionnelles à la deuxième puissance des variations de l'unité de longueur; l'unité d'intensité variera en raison directe de l'unité de force électromotrice et en raison inverse de l'unité de résistance.

Ces résultats sont représentés par une notation conventionnelle :

$$[S] = [L]^2, \qquad [I] = [E]^{+1}[R]^{-1}$$

que l'on énonce : l'unité de surface a deux dimensions par rapport à l'unité de longueur; ou bien : l'intensité a pour dimensions + 1 et — 1 par rapport à la force électromotrice et à la résistance. On dit encore couramment : une surface est le carré d'une longueur, une intensité est le quotient d'une force électromotrice par une résistance.

Ce que nous venons de faire pour deux formules, on le répète de proche en proche jusqu'à ramener toutes les *unités dérivées* aux unités dites *fondamentales* de longueur, de masse et de temps. On obtient ainsi un système *d'unités absolues* et les *équations de dimensions* correspondantes.

3. Nous ferons ici quelques remarques. Il y a un nombre considérable de formules et un nombre restreint de grandeurs. Toutes les formules ne sont donc pas mises à contribution quand on détermine les unités absolues, et rien ne prouve que l'on n'obtiendra pas de nouveaux systèmes d'unités et de dimensions si l'on vient à changer les formules utilisées.

Si, par exemple, on veut simplifier la formule du cercle au lieu de celle du rectangle, l'unité de surface devra être multipliée par π; ses dimensions, toutefois, seront encore les mêmes.

Mais, avec la théorie que nous adoptons pour l'instant, les dimensions peuvent aussi changer. C'est ce qui se produit, en électricité, quand on passe du système électrostatique au système électromagnétique.

Tous deux admettent les formules bien connues

$$Q = It, \qquad W = EQ, \qquad Q = CE, \qquad E = IR, \qquad W = 4\pi\mathcal{M}I,$$

ils ne diffèrent que par la sixième condition qu'il faut imposer aux six unités pour qu'elles soient déterminées. On adopte, dans le premier système, la formule sans coefficient : $F = \frac{QQ'}{r^2}$ pour

représenter les *actions électrostatiques dans l'air;* dans le deuxième système, au contraire, ce sont les *actions électromagnétiques dans l'air* que l'on représente par une formule analogue.

Il se trouve que ce ne sont pas seulement les unités, mais encore leurs dimensions qui diffèrent d'un système à l'autre. Cela n'empêche pas les deux systèmes d'être parfaitement légitimes et absolus, au sens où l'on entend ce mot, comme le serait d'ailleurs tout autre système établi en respectant nos conventions, et l'on en a constitué plusieurs.

L'unité de résistance a successivement, dans ces deux systèmes, les dimensions d'une vitesse et de l'inverse d'une vitesse. En employant un langage abrégé on dit : une résistance *est* une vitesse; puis : une résistance *est* l'inverse d'une vitesse. Ces affirmations sont assurément incompatibles, mais ce n'est qu'une contradiction de mots car il n'est permis de considérer comme objectivement vraie ni l'une ni l'autre de ces deux propositions qui, séparées des conventions arbitraires qui les ont fait naître, cessent d'avoir aucun sens.

Plus généralement, si une grandeur physique se trouve avoir mêmes dimensions qu'une certaine grandeur mécanique, il faut se garder d'en déduire l'identité de leur nature propre. Aussi, à moins d'un hasard heureux, les dimensions que nous avons obtenues ne peuvent-elles donner d'indication correcte pour la recherche d'une interprétation mécanique des phénomènes.

En un mot, dans la théorie telle que nous venons de l'exposer, les dimensions ne sont nullement caractéristiques des grandeurs, et sont seulement relatives à leurs unités. Elles symbolisent des conditions qui ont pu être imposées à ces unités comme on l'a voulu, sans aucune restriction, et il ne faut pas leur demander autre chose.

4. Introduisons maintenant la restriction de ne jamais faire intervenir les propriétés spécifiques des corps (¹).

(¹) On a, parfois, admis une condition équivalente en se refusant à donner arbitrairement la valeur 1 à des coefficients qui pourraient dépendre de la nature du milieu.

Rien n'est changé aux dimensions des grandeurs géométriques (¹) et mécaniques.

Il n'en est pas de même quand on passe aux grandeurs électriques. Les cinq formules de tout à l'heure

$$Q = It, \quad W = EQ, \quad Q = CE, \quad E = IR, \quad W = 4\pi \mathfrak{M} I,$$

paraissant répondre aux conditions imposées et, notamment, ne pas dépendre de la nature du milieu (²), peuvent nous servir pour déterminer les dimensions. Mais, puisque nous récusons les lois de Coulomb qui dépendent de ce milieu, nous n'avons plus que cinq conditions pour six inconnues; nous devrons donc laisser indéterminées les dimensions de l'une des unités, [Q] par exemple, et nous obtiendrons les dimensions des unités électriques en fonction de [L], [M], [T] et [Q].

La quantité d'électricité doit ainsi être traitée comme une quatrième unité fondamentale, provisoirement, du moins, car il est permis d'espérer qu'un jour on en saura déterminer les dimensions en [L], [M], [T].

5. En ne faisant plus intervenir de propriété spécifique, les conventions ne suffisent pas encore, il est vrai, à déterminer complètement les unités dérivées, qui changent toujours avec les formules utilisées. Mais il est loisible de constater que ces changements de formules n'ont maintenant d'effet que sur les unités et *ne modifient en rien leurs dimensions.*

Ainsi, les unités peuvent varier, les dimensions resteront les mêmes.

C'est donc que les dimensions ne dépendent plus des unités, mais seulement des grandeurs; et, les systèmes absolus d'unités dérivées nous ont servi, pour ainsi dire, d'inconnue auxiliaire

---

(¹) On peut compléter la restriction et rejeter toute modification *de forme* pour les grandeurs géométriques : les dimensions n'en seront pas altérées; car, quelle que soit leur forme, une surface ou un volume sont toujours proportionnels aux puissances 2 ou 3 de leurs éléments linéaires.

(²) La démonstration expérimentale n'est pas très sûre. En particulier, le travail d'un pôle magnétique qui tourne autour d'un courant ($W = 4\pi \mathfrak{M} I$) est-il bien indépendant de la nature des milieux traversés? Signalons en passant la présence du facteur 4π qu'on laisse subsister ici en vue de simplifier d'autres formules jugées plus importantes.

dans la recherche des dimensions caractéristiques des grandeurs.

Or cette voie détournée n'est pas nécessaire. Au lieu de nous occuper des *formules,* qui ne font que symboliser les lois expérimentales, adressons-nous aux faits eux-mêmes, et nous pourrons définir les dimensions caractéristiques des grandeurs dérivées en étudiant leur *réduction aux grandeurs fondamentales,* indépendamment de toute question d'unité. C'est ce que nous allons faire succinctement.

6. Il nous faut dire d'abord en quoi consiste la réduction des grandeurs. Nous adopterons cette définition :

On dit qu'une grandeur D est réductible aux grandeurs A, B, ..., C lorsque, ne disposant que de grandeurs, d'ailleurs quelconques, d'espèce A, B, ... et C on peut distinguer une certaine grandeur $\mathcal{D}$ parmi toutes les grandeurs possibles d'espèce D, sans faire intervenir les propriétés spécifiques des corps en expérience.

La définition montre de suite que les surfaces et les volumes (¹) sont réductibles aux longueurs. Par contre, si l'on peut concevoir la masse d'un certain volume d'eau, cela n'entraîne pas la réduction des masses aux volumes car cette conception fait intervenir une propriété spécifique de l'eau, sa densité.

Les grandeurs, irréductibles entre elles, auxquelles toutes les autres sont réductibles sont dites *grandeurs fondamentales.*

Que sont alors les dimensions d'une *grandeur dérivée?*

Soient : A, B, ..., C les grandeurs fondamentales, D une grandeur dérivée. Étant données des grandeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{C}$ respectivement d'espèces A, B, ..., C, nous savons déterminer une grandeur $\mathcal{D}$ d'espèce D. Cette grandeur $\mathcal{D}$ varie proportionnellement à certaines puissances (²) a, b, ..., c des données $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{C}$; ces nombres a, b, ..., c sont les *dimensions* de D.

Les conventions arbitraires sur le choix des unités absolues avaient précisément pour objet de faire adopter comme unité de D l'une des grandeurs $\mathcal{D}$ que l'on peut déterminer quand les données

(¹) C'est à dessein que nous ne parlons pas des angles.

(²) Nous ne chercherons pas à montrer comment, en raison des conditions d'homogénéité tacitement imposées aux définitions, il ne peut effectivement s'introduire que de simples puissances des données.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{C}$ sont les unités fondamentales. C'est pourquoi les deux définitions doivent nécessairement nous fournir les mêmes dimensions.

7. Quel que soit le procédé de réduction employé, disons-nous, les dimensions obtenues seront invariables. Nous pouvons, en effet, établir deux propositions :

1° Si une grandeur D réductible à plusieurs grandeurs fondamentales A, B, ..., C pouvait avoir deux équations de dimensions distinctes, les grandeurs fondamentales seraient réductibles entre elles, ce qui serait absurde.

2° Si une grandeur D réductible à la seule grandeur fondamentale A pouvait avoir deux dimensions différentes, il existerait toujours une grandeur $\mathcal{A}$ d'espèce A qui se distinguerait par elle-même de toutes les grandeurs de même espèce. Mais cela doit être considéré comme impossible, car une grandeur ne se distingue des grandeurs de même espèce qu'à titre de propriété spécifique d'un corps; c'est, si l'on veut, parce que nous ne sommes susceptibles d'effectuer *par nous-mêmes* que des comparaisons.

Imaginons d'abord que D soit réductible à la seule grandeur fondamentale A, et que deux procédés de réduction aient conduit aux équations distinctes

$$[D] = [A]^{a_1}, \qquad [D] = [A]^{a_2}.$$

Cela signifie qu'en nous donnant une grandeur quelconqne $\mathcal{A}_0$ d'espèce A, chacun des procédés nous détermine une grandeur d'espèce D; ce sont, par exemple, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ avec

$$\mathcal{D}_1 = p\,\mathcal{D}_2.$$

Si d'ailleurs nous changeons $\mathcal{A}_0$ en $\alpha\mathcal{A}_0$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se changeront en

$$\alpha^{a_1}\mathcal{D}_1 \quad \text{et} \quad \alpha^{a_2}\mathcal{D}_2.$$

Or nous pouvons toujours, et d'une seule manière, établir entre ces deux grandeurs D tel rapport qui nous conviendra. Si nous les voulons égales, nous prendrons

$$\alpha = p^{\frac{1}{a_2 - a_1}}.$$

Si, par conséquent, nous partons de la donnée

$$\mathcal{A} = p^{\frac{1}{a_2 - a_1}} \mathcal{A}_0,$$

les deux procédés nous fourniront la même grandeur D.

Il y a donc une certaine grandeur (fondamentale) $\mathcal{A}$ qui se distingue de toutes les grandeurs de même espèce par une propriété particulière, à savoir de conduire à la même grandeur D par les deux procédés de réduction, ce que nous jugeons impossible.

L'une des propositions que nous avions en vue se trouve ainsi établie; l'autre se démontrerait d'une manière toute semblable.

On voit, d'après cela, qu'une grandeur dérivée ne saurait avoir qu'une seule équation de dimensions; mais on voit aussi sous quelle condition. Il nous faut admettre qu'aucune grandeur (fondamentale) ne peut posséder de propriété particulière qui n'appartiendrait pas à toutes les grandeurs de même espèce, ce qui, d'ailleurs, paraît être exact pour les grandeurs : longueurs, masses, temps, charges électriques que nous avons choisies comme fondamentales ([1]).

En résumé, l'impossibilité de plusieurs systèmes de dimensions se trouve donc démontrée ou, du moins, ramenée à une autre impossibilité dont on saisit mieux, ce me semble, le sens concret.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

DIMENSIONS. — UNITÉS.

FOURIER. — *Théorie de la chaleur*, p. 154.

GAUSS. — *Werke*, t. V, p. 630.

W. WEBER. — *Ueber die Principien verschiedener absoluter Maassysteme der Electrodyn.* (*Electrodyn. Maasb.*, p. 259).

J.-C. MAXWELL. — *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. I, p. 1; 1873. Traduction française, Gauthier-Villars; 1885.

([1]) Les *nombres abstraits* sont aussi des grandeurs [subjectives (?)] mais chaque nombre a des propriétés qui n'appartiennent point aux autres. Les *angles* sont dans le même cas, puisque l'angle QUATRE DROITS (UN TOUR COMPLET) se distingue *par lui-même* de tous les angles possibles.

EVERETT. — *Applications du système d'unités C.G.S.*; 1875.

— *Unités et constantes physiques*, traduction française, Gauthier-Villars; 1883.

J. BERTRAND. — *Sur l'homogénéité des formules de Physique.* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 916; 1878).

AYRTON et PERRY. — *A new determ. of the ratio*, etc. (*Phil. Mag.* [5], t. VII, p. 277; 1879-1).

G. LIPPMANN. — *Sur le choix de l'unité de force dans les mesures électriques absolues* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 183; 1881).

A.-F. SUNDELL. — *Remarks on absolute systems of physical units* (*Phil. Mag.* [5], t. XIV, p. 81; 1882-2).

— *Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. XII. Helsingfors; 1881.

MAURICE LÉVY. — *Conférence sur les unités électriques.* (*Annales de Chimie et de Physique*, [5], t. XXVI, p. 85; 4 mars 1882).

R. CLAUSIUS. — *Des différents systèmes de mesure des grandeurs électriques et magnétiques* (Conférence, etc.; 6 mars 1882) (*Annales de Chimie et de Physique*, [5], t. XXVIII, p. 81). — *Verhandl. d. natur. Vereins. der preuss. Ak.* Bd. XXXIV; 1882. — *Wied. Ann.*, t. XVI, p. 529; 1882.

J.-D. EVERETT. — *On the dimensions of a magnetic pôle in electrostatic system of units.* (*Phil. Mag.* [5], t. XIII, p. 376; 1882-1.)

J.-J. THOMSON. — Même tome, p. 427.

J. LARMOR. — Même tome, p. 429.

J.-D. EVERETT. — Même tome, p. 431.

C.-K. WEAD. — Même tome, p. 530.

R. CLAUSIUS. — Tome XIV, p. 124.

J.-J. THOMSON. — Même tome, p. 225.

O.-J. LODGE. — Même tome, p. 357.

E.-B. SARGANT. — Même tome, p. 395.

H. HELMHOLTZ. — Même tome, p. 430. — *Wied. Ann.*, t. XVII, p. 42; 1882.

R. CLAUSIUS. — *Ueber den Zusammenhang zwischen den Einheiten des Magnetismus und der Electricität.* (*Wied. Ann.*, t. XVII, p. 713; 1882.)

P. VOLKMANN. — *Zum absoluten Maassystem.* (*Wied. Ann.*, t. XVI, p. 481; 1882; t. XXI, p. 518; 1884; t. XIX, p. 245; t. XXI, p. 516).

BOHN. — *Ueber absoluten Maasse* (septembre 1882). (*Wied. Ann.*, t. XVIII, p. 346; 1883).

BUDDE. — *Die Reduction der mechanischen Grundeinheiten auf eine einige Dimensione.* (*Wied. Ann.*, t. XX, p. 161; 1883).

SIR W. THOMSON. — *Conférences.* II. *Unités électriques* (mai 1883). Traduction française. Gauthier-Villars et fils; 1883.

MERCADIER et VASCHY. — *Remarques sur l'expression des grandeurs

électriques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVI, p. 118, 334; 1883).

Maurice Lévy. — Même tome, p. 248, 430.

Mercadier, Vaschy. — *Lumière électrique*, t. VIII, p. 45-46-70-118-182: 1883 et *Journal de Physique*, t. II, p. 245; 1883.

A. Vaschy. — *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. I. Paris, Baudry et Cie, 1890.

W.-N. Schaw. — *On dimensional equations and change of units* (*Proceedings of the Cambr. phil. Soc.*, t. V, p. 137; 1884).

Geza Szarvady. — *Sur les systèmes d'unités absolues* (*Lumière électrique*, t. XIV, p. 321; 1884 et t. XXIII, p. 401; 1887).

Sluguinoff. — *Sur la théorie des dimensions* (*Journ. Soc. phys. ch. russe*, t. XVI. p. 49 et 238; 1884).

Hertz. — *Sur les dimensions du pôle magnétique dans les différents systèmes de mesures* (*Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 114; 1885).

J. Boulanger. — *Des systèmes d'unités dits* absolus (*Lumière électrique*, t. XVI, p. 3; 1885).

J. Bertrand. — *Sur les unités électriques* (*Acta mathematica*, t. VIII, p. 387; 1886).

Raverot. — *Essai sur les dimensions des grandeurs physiques* (*Lumière électrique*, t. XXIII, p. 101; 1887 et t. XXXVI, p. 601; 1890).

G. Lippmann. — *Sur une unité de temps absolue, étalons électriques de temps et chronoscopes des variations* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 1070; 1887).

— *Journal de Physique*, p. 261; 1887.

— *Des formules de dimensions en électricité et de leur signification physique* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CV, p. 638; 1887).

Oberbeck. — *Wied. Ann.*, t. XXXI, p. 335; 1887.

O. Chwolson. — *Ueber die Dimensionen der electromagnetischen Einheit des electrischen Potentials* (*Exner's Rep.*, t. XXIV, p. 295; 1888).

— *Lumière électrique*, t. XXIX, p. 327.

Lodge. — *On the Multiplication and Division of concrete quantities* (*Nature*, July, 19; 1888).

W. Winter. — *Ueber die Dimensionen der abgeleiteten grössen absoluter Maassysteme* (*Exner's Repertorium der Physik*, t. XXI, p. 775; 1885 et t. XXIV, p. 471; 1888).

A.-W. Rucker. — *On the suppressed dimensions of physical quantities* (*Phil. Mag.*, [5], t. XXVII, p. 104; 1889-1).

T.-H. Blakesley. — *On some facts connected with the systems of scientific units of measurement* (*Phil. Mag.*, [5], t. XXVII, p. 178; 1889-1).

G.-F. Fitzgerald. — *On the dimensions of electromagnetic units* (*Phil. Mag.*, [5], t. XXVII, p. 323; 1889-1).

J. Bertrand. — *Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité*,

Chap. XIII. — *Les Unités électriques.* Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890.

J. Pionchon. — *Introduction à l'étude des systèmes de mesures usités en Physique.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

P. Duhem. — *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. III, p. 458 (appendice au Livre XV). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892.

W. Williams. — *On the relation of the dimensions of physical quantities to direction in space* (*Phys. Soc. Lond.*, 24 juin 1892).

— *Phil. Mag.*, [5], t. XXXIV, p. 234; 1892.

M. Brillouin. — *Notes sur les* conférences de Sir W. Thomson. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893.

WIEDEMANN'S ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE.

T. XLII, XLIII, XLIV; 1891.

Physique moléculaire.

J.-O. THOMPSON. — Sur la loi de la dilatation élastique, t. XLIV, p. 555-576.

Les expériences de M. Thompson ont été réalisées dans la tour de l'Institut de Physique de l'Université de Strasbourg, à l'aide de fils fins de 22^m à 23^m de long, dont on observait l'allongement à l'aide de cathétomètres. Les précautions les plus minutieuses étaient prises pour se mettre à l'abri des variations brusques de température, des secousses, de l'effet du résidu élastique et de l'effet thermique de l'extension; mais l'auteur ne semble avoir pris aucune précaution spéciale pour s'assurer que les fils étudiés étaient parfaitement rectilignes, même pour les plus petites charges qu'ils avaient à supporter.

M. Thompson trouve que l'allongement X d'un fil tendu n'est pas exactement représenté par la formule $X = aP$, mais qu'il faut avoir recours à une expression empirique de la forme

$$X = aP + bP^2 + cP^3.$$

Il s'ensuit que le coefficient d'élasticité vrai, rapporté à une charge nulle peut être supérieur de $\frac{1}{10}$ environ au coefficient d'élasticité moyen. Les valeurs de ce coefficient d'élasticité vraie E sont

données par le Tableau suivant, dans lequel d représente la densité des fils, q leur section en millimètres carrés :

	d.	q.	E.
Acier.............	7,74	0,03263	20050
Laiton............	8,42	0,0627	10370
Argent..........	10,00	0,0687	8490
Cuivre...........	8,99	0,0641	12890

P. DRUDE et W. VOIGT. — Mesure des constantes élastiques de quelques minéraux, t. XLII, p. 537-548; t. XLIV, p. 168-170.

Dans un Mémoire antérieur, M. Voigt (¹) a émis l'opinion que la plupart des corps en apparence isotropes sont formés par la réunion d'un grand nombre d'individus cristallins dont les dimensions, très grandes par rapport à la sphère d'action des forces moléculaires, sont cependant négligeables par rapport aux dimensions du plus petit fragment du corps utilisable pour les expériences. Ces petits cristaux, dirigés indifféremment dans tous les sens, peuvent être réunis entre eux par une substance étrangère en proportion plus ou moins considérable.

Si un corps est réellement isotrope, M. Voigt admet que le rapport $\frac{a}{b}$ de ses constantes élastiques ne peut être différent de 3; s'il est pseudo-isotrope, ce rapport peut avoir une valeur supérieure ou inférieure à 3. M. Voigt a indiqué comment on doit calculer ce rapport, ainsi que les valeurs de a et de b quand on connaît toutes les constantes élastiques des cristaux constituants.

Voici les résultats des expériences de MM. Drude et Voigt :

	$a\,10^{-4}$.	$b\,10^{-4}$.	$\frac{a}{b}$.
Spath fluor dense........................	11,9	3,37	3,53
Pierre lithographique de Solnhofen.........	7,07	2,37	2,99
Baryte lourde de Clausthal. gris verdâtre..	7,4	2,76	2,68
Baryte lourde de Clausthal. rouge clair...	7,72	3,13	2,46
Pierre à fusil de Rügen...................	7,7	0,660	11,7
Opale de Mexico.........................	3,91	0,251	15,6
Obsidienne de Lipari....................	7,153	1,47	4,86
Obsidienne d'Islande....................	8,017	1,828	4,39

(¹) Voigt, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, p. 573; 1889. *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. IX, p. 201.

Il est particulièrement remarquable que les valeurs de $\frac{a}{b}$, trouvées expérimentalement pour la pierre à fusil et l'obsidienne, comprennent entre elles et ont presque rigoureusement pour moyenne la valeur 13,7 calculée pour la silice pseudo-amorphe dans le Mémoire signalé plus haut.

F. AUERBACH. — Mesures absolues de dureté, t. XLIII, p. 61-100.

On s'est longtemps borné à dresser une échelle de dureté, et à chercher à quelle place un corps se range sur cette échelle d'après les corps qu'il raie ou qui le raient (Haüy). On a cherché plus tard [Frankenheim ([1])] à déterminer la pression qu'il faut exercer sur une pointe déterminée pour produire une raie visible sur la substance étudiée, mais on n'a pas tardé à s'apercevoir que cette pression dépend de la vitesse du déplacement.

M. Hertz ([2]) a proposé le premier une définition de la dureté indépendante de la nature d'une substance d'essai particulière : *la dureté d'un corps est sa limite d'élasticité correspondant à la pression statique exercée sur une surface plane de ce corps par une sphère de même nature et de rayon déterminé.* Mais M. Hertz n'ayant pas été très heureux dans les premières expériences qu'il a entreprises à cet égard a abandonné ce genre d'études que M. Auerbach reprend aujourd'hui d'après les mêmes principes.

M. Auerbach précise ainsi qu'il suit la définition de la dureté donnée par M. Hertz. *La dureté d'un corps est la valeur limite de la pression, rapportée à l'unité de surface, au centre de la surface de contact du plan et de la sphère considérés par M. Hertz.*

Désignant par p la pression totale, par d le diamètre du cercle de contact, il prouve d'abord que, pour une même substance et un même rayon de courbure ρ de la sphère, quand on fait varier la

([1]) FRANKENHEIM, *De Cohasione, etc.* Breslau, 1829.
([2]) HERTZ, *Verh. Berl. Physik. Gesell.*, p. 67; 1882.

charge, le cercle de contact croît d'après la formule

$$q = \frac{p}{d^3} = \text{const.}, \tag{1}$$

et que, pour des rayons de courbures différents,

$$\rho q = \text{const.} \tag{2}$$

Les expériences de l'auteur confirment pleinement les formules (1) et (2).

En ce qui concerne la valeur limite de la pression P, au centre qui détermine la première déformation permanente (ou, quand il s'agit de substances cassantes, la rupture), elle devrait théoriquement être constante, ce qui, en désignant par P et D les limites de p et de d, conduit aux formules

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{P}{D^2} = \text{const.}, \\ \dfrac{P}{\rho^2} = \text{const.}, \\ \dfrac{D}{\rho} = \text{const.}, \end{cases}$$

que l'expérience conduit à remplacer par les formules empiriques

$$(3\ bis) \quad \begin{cases} \dfrac{P}{D^{\frac{3}{2}}} = \text{const.}, \\ \dfrac{P}{\rho} = \text{const.}, \\ \dfrac{D^{\frac{3}{2}}}{\rho} = \text{const.} \end{cases}$$

Ce désaccord de l'expérience et du calcul est fâcheux puisqu'il semble atteindre la définition même que M. Auerbach donne de la dureté. Toutefois on caractérisera empiriquement la dureté par l'une des constantes des formules (3 *bis*) dont la signification théorique exacte reste à déterminer. On peut même observer que le rapport des valeurs de $\frac{P}{D^2}$ pour diverses substances se montre expérimentalement indépendant de ρ, et, par suite, suffit à caractériser les duretés en valeur relative.

M. Auerbach a expérimenté sur trois sortes de verre inégalement

dures et sur le quartz. Un levier agissant de bas en haut presse l'une contre l'autre une plaque épaisse de la substance à étudier placée en dessus et une lentille plan convexe de même matière placée en dessous. Un microscope permet de viser le cercle de contact et d'en déterminer le diamètre, ce qui a permis de vérifier les formules (1), (2) et (3 *bis*).

Pour les corps étudiés par M. Auerbach, les valeurs *relatives* de $\frac{P}{D^2}$ sont les suivantes :

Verre n° 1	100
Verre n° 2	105
Verre n° 3	113
Quartz (dans la direction de l'axe)	135

W.-C. RONTGEN. — Sur la compressibilité du sulfure de carbone, de la benzine, de l'éther et de quelques alcools, t. XLIV, p. 1-23.

Les résultats suivants, obtenus par M. Röntgen (¹), ont été employés par MM. Röntgen et Zehnder dans leurs recherches, analysées ci-dessus (²), relatives à l'influence de la pression sur les indices de réfraction. μ désigne le coefficient de compressibilité absolue

Liquides.	$\mu\, 10^6$.	t.	$\mu\, 10^6$.	t.	$\frac{\Delta\mu}{\Delta t}\, 10^6$.
Eau	46,2	17,95			
Sulfure de carbone purifié	89,5	18,05	80,4	3,30	0,615
Benzine exempte de thiophène	91,7	17,90	83	5,95	0,73
Éther (distillé sur le sodium)	»	»	163,8	8,10	»
Alcool méthylique	119,9	18,10	107,5	2,75	0,80
Alcool à 99,8 pour 100	110,2	17,50	99,7	1,85	0,67
Alcool propylique normal	97,0	17,70	89,5	5,60	0,62
Alcool isopropylique	103,4	17,85	95,0	5,65	0,69
Alcool butylique normal	90,5	17,40	83,3	3,05	0,50
Alcool isobutylique	98,3	17,95	90,5	4,15	0,565
Alcool amylique de fermentation	90,5	17,75	83,5	3,65	0,495

(¹) *Voir*, pour la méthode employée, *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. VI, p. 244.

(²) *Voir* p. 479 de ce volume.

O.-E. MEYER. — Méthode pour la mesure du frottement intérieur des liquides, t. XLIII, p. 1-14.

K. MUTZEL. — Sur le frottement intérieur des liquides, t. XLIII, p. 15-42.

La méthode proposée par M. O. Meyer et appliquée par M. Mützel consiste à observer les oscillations d'un cylindre plat, rempli de liquide et oscillant autour de son axe. M. Mützel calcule ses expériences par les formules de M. Meyer et trouve, pour le coefficient de frottement intérieur de l'eau et de diverses solutions salines, des valeurs qui coïncident suffisamment bien avec celles d'autres observateurs, pour justifier l'emploi de la nouvelle méthode.

M. Mützel cherche à représenter le frottement intérieur η d'une dissolution saline par des formules linéaires à trois termes contenant respectivement le frottement η_w de l'eau sur elle-même, η_{ws} de l'eau sur le sel et η_s du sel sur lui-même et dont les coefficients sont fonction de la concentration et de la densité; η et η_w sont donnés par l'expérience : deux observations suffisent donc à déterminer η_{ws} et η_s. Les formules de M. Mützel sont susceptibles de représenter l'ensemble de ses expériences à moins de 0,5 pour 100 près. Il trouve, par exemple,

	η_{ws}.	η_s.
NaCl........	0,001282	0,23900
$NaAzO^3$......	0,001523	0,11908
KCl..........	0,0005483	0,01443
$KAzO^3$.......	0,0007249	0,010542

Conformément à ce qui a été annoncé par M. Brückner (¹), le frottement intérieur d'un mélange de deux dissolutions est toujours inférieur à la moyenne arithmétique des dissolutions mêlées.

H. BRUCKNER. — Sur le frottement intérieur des dissolutions salines, t. XLII, p. 287-309.

M. Bender appelle *dissolutions correspondantes* de deux sels sans action chimique, deux dissolutions telles que chaque coeffi-

(¹) *Voir* ci-dessous.

cient caractéristique d'une des propriétés physiques de leurs mélanges est moyenne arithmétique des coefficients correspondants caractéristiques des dissolutions séparées. M. Bender (1) a trouvé que les dissolutions correspondantes contiennent des nombres de molécules dont le rapport est simple, résultat confirmé par M. Rother (2), infirmé par M. Arrhenius (3).

M. Brückner se borne à étudier le frottement intérieur des dissolutions et il trouve que les dissolutions correspondantes de chlorures de sodium, de baryum et de potassium, à 15°C. et à 20°C., sont celles qui contiennent le même nombre n de molécules par litre; les dissolutions correspondantes de chlorure d'ammonium contiennent un nombre de molécules $\frac{3}{2}n$. Pour les mélanges de chlorures de potassium et de sodium d'une part, de chlorures de sodium et de baryum de l'autre, il n'y a de dissolutions correspondantes que pour des liqueurs contenant moins d'une molécule en gramme par litre. Au delà, on observe seulement une variation minimum de frottement intérieur.

Le frottement intérieur d'un mélange quelconque de dissolutions non correspondantes est inférieur à la moyenne arithmétique des frottements des dissolutions séparées.

P. DRUDE. — Sur la grandeur des sphères d'action des forces moléculaires et sur la constitution des lames de liquide glycérique Plateau, t. XLIII, p. 158-176.

A. W. REINOLD et A.-W. RUCKER. — Sur le rayon de la sphère d'action des forces moléculaires, t. XLIV, p. 778-783.

MM. Reinold et Rücker, dans des recherches datant de 1886, ont évalué l'épaisseur de lames de liquide glycérique par la mesure de leurs résistances électriques, ainsi que par des méthodes optiques; ils sont arrivés notamment à ce résultat remarquable, que l'épaisseur de ces lames est constante dans toute l'étendue de la

---

(1) BENDER, *Wied. Ann.*, t. XXII, p. 179 et t. XXXI, p. 872; 1884-87. *Journal de Physique*, 2e série, t. III, p. 220, t. IV, p. 520.

(2) ROTHER, *Wied. Ann.*, t. XXL, p. 576; 1884. *Journal de Physique*, 2e série, t. IV, p. 520.

(3) ARRHENIUS, *Wied. Ann.*, t. XXX, p. 52; 1887. *Journal de Physique*, 2e série, t. XI, p. 433.

tache noire centrale qu'elles présentent avant de se rompre, tandis que l'épaisseur varie très rapidement à partir des bords de cette tache jusqu'au milieu de l'anneau qui l'entoure immédiatement. L'épaisseur de la tache noire est de 12.10^{-6} millimètres (¹).

M. Drude confirme le fait d'une épaisseur invariable de la tache noire, mais il trouve pour cette épaisseur le nombre 17.10^{-6} millimètres. Il indique de plus que l'indice 1,42 du liquide dans la région de la tache est inférieur de une unité du second ordre décimal à l'indice 1,43 du liquide glycérique pris en masse. Ce liquide, en vertu de la pesanteur, s'écoule progressivement entre deux lamelles superficielles dont l'épaisseur individuelle serait de $8,5.10^{-6}$ millimètres, jusqu'à ce que ces lamelles se rejoignent pour former la tache noire. La pesanteur aurait peu d'effet sur ces lamelles superficielles plus visqueuses que le reste du liquide, d'où résulterait l'épaisseur uniforme de la tache malgré son étendue progressivement croissante.

Le nombre $8,5.10^{-6}$ millimètres représenterait donc, d'après M. Drude, le rayon d'activité des forces moléculaires. MM. Reinold et Rücker ne se rallient pas à cette manière de voir. Pour eux, le rayon d'activité vrai est très supérieur à l'épaisseur de la tache noire : il serait compris entre 23 et 48.10^{-6} millimètres.

O. LEHMANN. — Gouttes à moitié limitées, t. XLIII, p. 516-532.

Si, dans une cuve contenant un mélange d'eau et d'alcool, on dépose une goutte colorée d'huile minérale (étendue de pétrole) de même densité, cette goutte prend la forme sphérique et, si on l'écrase ou qu'on l'étire, revient d'elle-même à sa forme primitive : c'est l'expérience bien connue de Plateau.

Mais, si l'on remplace l'alcool ordinaire par l'alcool amylique, la goutte présente indifféremment toutes les formes et disparaît peu à peu en stries qui se diffusent dans le mélange. On peut remplir la cuve, à moitié du mélange d'eau et d'alcool, à moitié du mélange d'eau et d'alcool amylique et déposer la goutte d'huile à la surface de séparation. La goutte sera alors une *goutte à moitié*

(¹) Reinold et Rucker, *Phil. Trans.*, 2ᵉ Partie, p. 680; 1886.

limitée. M. Lehmann étudie expérimentalement les propriétés de ces gouttes avec divers mélanges et soit par des observations directes (macroscopiques) ou microscopiques. Une planche très curieuse accompagne le Mémoire.

D'une manière générale, M. Lehmann reconnaît que les gouttes à moitié limitées ne sont pas des formes d'équilibre : indépendamment de la diffusion du côté non limité de la goutte, il y a, dans la partie limitée, un mouvement continuel des bords vers le centre. Ce mouvement a pour origine la tension superficielle de la partie limitée qui n'est plus équilibrée à la surface de séparation, où la tension superficielle devient nulle. Suivant la grandeur du frottement intérieur, le mouvement produit par la tension superficielle se propage d'une manière plus ou moins profonde et, par conséquent, pour une même valeur de la tension, produit des vitesses très différentes.

Le mouvement à la surface de la partie limitée de la goutte a pour effet d'en détacher latéralement de petites gouttes et, si la vitesse est assez grande, il peut même se produire une émulsion.

Quand une goutte parfaite, tombant en vertu de son poids, rencontre une surface de séparation où elle se transforme en goutte à moitié limitée, elle subit des déformations curieuses : en particulier, il peut se produire une sphère creuse nettement limitée par sa surface interne, diffuse à sa surface externe, ou un anneau net à l'intérieur, diffus à l'extérieur, etc.

H. KAYSER. — Diffusion et absorption par le caoutchouc, t. XLIII, p. 544-553.

Le caoutchouc, placé dans une atmosphère gazeuse, absorbe une masse de gaz proportionnelle à la pression. En prenant pour unité de pression la pression atmosphérique normale, l'unité de volume de caoutchouc absorbe donc un volume V de gaz, mesuré sous pression normale,

$$V = Ap,$$

et M. Kayser trouve pour A les valeurs suivantes en fonction de la température t

$$CO^2 \ldots\ldots \quad A = 1,3407 - 0,018081\,t + 0,0000 9213\,t^2,$$
$$H \ldots\ldots\ldots \quad A = 0,01278 - 0,00018\,t + 0,00000113\,t^2.$$

Une membrane de caoutchouc d'épaisseur D, de surface q, séparant deux atmosphères d'un même gaz dont les pressions sont p et p_1, laisse écouler une masse de gaz M qu'on peut représenter par la formule

$$M = \frac{A(p_1 - p)q}{D}\delta;$$

δ est la vitesse avec laquelle le gaz se diffuse à l'intérieur du caoutchouc. De ses expériences, M. Kayser tire les valeurs suivantes de δ

$$CO^2\ldots\ldots \quad \delta = 10^{-6}(-\ 19,179 + \ 3,7285\,t)\frac{\text{cm}}{\text{min}},$$

$$H\ldots\ldots \quad \delta = 10^{-6}(-\ 537,6 \ + 158,6\,t)\frac{\text{cm}}{\text{min}}.$$

La vitesse relative à l'hydrogène comparée à celle qui convient à l'acide carbonique est beaucoup plus grande que ne l'avait admis Wroblewski [1] et ne peut être calculée par la loi des racines carrées des densités.

J. MULLER. — Sur la diffusion de l'ammoniaque à travers l'eau et l'alcool, t. XLIII, p. 554-567.

La méthode employée par M. Müller consiste à évaluer la masse de mercure qu'il faut laisser écouler, par minute, dans un flacon gazomètre M plein d'ammoniaque gazeuse pour maintenir immobile une colonne liquide de longueur et de section déterminées, dans une sorte de tube à dégagement adapté à l'une des tubulures de M.

M. Müller trouve que les vitesses de diffusion dans l'eau aux diverses températures (0°, 15°, 20°, 40°) sont proportionnelles aux coefficients de solubilité déterminés, pour les mêmes températures, par MM. Roscoe et Dittmar. Les vitesses de diffusion dans l'eau et dans l'alcool, à une même température de 20°, sont aussi proportionnelles aux coefficients de solubilité de l'ammoniaque dans ces deux liquides.

Les volumes d'ammoniaque mesurés sous la pression normale

---

(1) WROBLEWSKI, *Pogg. Ann.*, t. CLVIII, p. 539; 1876. *Wied. Ann.*, t. VIII, p. 9; 1879. *Journal de Physique*, 1re série, t. VIII, p. 418.

et diffusés, par minute, à travers une couche liquide de 1^{cmq} de surface et de 1^{cm} d'épaisseur, pour une différence de pression de 1^{cm} de mercure sur les deux faces de la couche, ont les valeurs suivantes :

		0°.	15°.	30°.	40°.
Eau	observé....	0,15	0,106	0,073	0,053
	calculé.....	0,156	admis	0,072	0,056

		20°.
Alcool	observé....	0,047
	calculé.....	0,045

Ch. BOHR et J. BOCK. — Mesure de l'absorption de quelques gaz par l'eau à des températures comprises entre 0° et 100°, t. XLIV, p. 318-343.

Les expériences ont été réalisées soit par la méthode absorptiométrique de Bunsen perfectionnée, soit par une méthode consistant à priver de gaz, à l'aide d'une machine pneumatique à mercure, une solution saturée, et à déterminer le volume du gaz ainsi extrait de la liqueur. Cette dernière méthode est la seule pratique pour des températures supérieures à 60°.

MM. Bohr et Bock ont expérimenté en particulier sur l'oxygène, l'azote et l'hydrogène, jusqu'à la température de 100°; ils donnent des Tables du coefficient de solubilité α, d'où nous extrayons les nombres suivants :

	α.		
Température.	Oxygène.	Azote.	Hydrogène.
0	0,04961	0,02388	0,0203
10	0,03903	0,01956	0,0190
20	0,03171	0,01639	0,0177
30	0,02676	0,01380	0,0163
50	0,02070	0,01061	0,0146
100	0,01679	0,01000	0,0166

On remarquera le fait imprévu d'un minimum de solubilité de l'hydrogène que les Tables complètes des auteurs fixent vers la température de 60° ($\alpha = 0,0143$).

Pour l'acide carbonique, MM. Bohr et Bock ne citent que deux expériences, l'une à 37°29, l'autre à 100°; elles ont donné respectivement $\alpha = 0,5629$ et $\alpha = 0,2438$.

E. PFEIFFER. — Sur l'attaque du verre par l'eau et sur une méthode électrique pour l'évaluer, t. XLIV, p. 239-264.

L'auteur a recours à la mesure des conductibilités électriques. Ses principales conclusions sont que l'eau pure n'enlève d'abord au verre que de l'alcali formant une couche superficielle, et, que la quantité d'alcali dissoute croît sensiblement en progression géométrique quand les températures croissent en progression arithmétique.

F. KOHLRAUSCH. — Sur la solubilité dans l'eau froide de quelques sortes de verre, t. XLIV, p. 577-622.

Les importantes recherches de M. F. Kohlrausch, exécutées par la méthode des conductibilités électriques, ont fourni des résultats généraux qui peuvent se résumer ainsi :

L'eau à la température ordinaire (18°) enlève à une surface de verre neuve une quantité de matière qui croît d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement avec le temps. On supposera toujours, dans ce qui suit, que la quantité d'eau employée est de 1^{cmc} par centimètre carré de surface du verre. Dans ces conditions, et avec du verre de Thuringe moyen, la quantité dissoute, évaluée en milligrammes par jour, est de $\frac{1}{6000}$ le premier jour, de $\frac{1}{15000}$ au bout de quelques mois. Au bout de cent jours la quantité dissoute totale est de $\frac{1}{100}$. De l'eau à 80° dissout en vingt heures le sextuple de cette quantité, dont les $\frac{2}{3}$ dans les sept premières heures. Tous ces nombres peuvent atteindre le décuple avec de mauvais verre à bouteilles, tandis qu'il y a des sortes de verre qui ne se dissolvent qu'à raison de $\frac{1}{100000}$ de milligramme par centimètre carré et par jour.

La solubilité des surfaces de verre diminue par un contact prolongé avec l'eau chaude ou avec des acides, mais les mauvaises sortes de verre ne sont que très imparfaitement améliorées par ces procédés. On n'a reconnu aucune différence entre une même sorte de verre soufflée ou rodée.

Le verre pulvérisé se dissout en proportion notable. En un ou deux jours et dans un poids d'eau vingt fois supérieur au sien, le verre à bouteilles moyen donne des dissolutions à $0^{gr},5$, le mau-

vais à 1^{gr}, le crown-glass à base de potasse à 3^{gr}, le verre de bore à 6^{gr} par litre; au contraire, le flint-glas contenant beaucoup de silicate de plomb se dissout à peine. Avec les verres solubles on obtient, dans la première minute, une dissolution à moitié aussi concentrée qu'au bout d'une heure, et, pour doubler la concentration de cette dernière liqueur, il faut deux jours. Au bout de six mois la proportion de verre pulvérisé dissous par une eau très souvent renouvelée peut varier de $\frac{1}{50}$ à $\frac{1}{8}$ avec les verres ordinaires, et atteindre $\frac{1}{2}$ avec le verre de bore. Au bout de deux ans la solubilité du verre n'est pas encore épuisée.

Si l'on évapore les dissolutions obtenues, le résidu n'est qu'en partie soluble soit dans l'eau, soit dans les acides.

L'élévation de température favorise beaucoup la dissolution et en général les verres se rangent dans le même ordre pour leur solubilité dans l'eau chaude ou dans l'eau froide, sans qu'il y ait proportionnalité entre les quantités dissoutes.

Le pouvoir hygroscopique donne un premier renseignement sur la solubilité comparée des diverses sortes de verre.

La réaction des dissolutions est toujours alcaline et la solubilité des verres croît avec leur teneur en alcali; la potasse est plus efficace que la soude. Trop ou trop peu de silice favorise aussi la dissolution. La silice entre, en effet, dans la composition de la matière dissoute et quelquefois en quantité considérable, par exemple avec le verre de Bohême à base de potasse.

Chaleur.

P. VON BJERKEN. — Analogies du caoutchouc et des gelées de gélatine sous le rapport de l'élasticité et de la chaleur, t. XLIII, p. 817-830.

On sait que la compressibilité cubique du caoutchouc est très faible. Étant donnée son énorme extensibilité, il résulte de la formule

$$V = (1 + l)(1 - \mu l)^2,$$

dans laquelle l est l'allongement de l'unité de volume, que le coefficient μ de contraction transversale, sensiblement égal à 0,5 pour de très faibles allongements, doit décroître à mesure que l nte. M. von Bjerken a vérifié qu'il en est réellement ainsi. mesures directes de la longueur et de la largeur de rubans

de caoutchouc étirés. Les gelées de gélatine jouissent de la même propriété, comme le montrent les Tableaux suivants où P désigne la charge en grammes, L la longueur, B la largeur du ruban en millimètres.

Caoutchouc.

P.	L.	B.	μ.	V.
0	44,0	24,5	»	1,000
60	48,5	23,4	0,439	1,005
110	55	22,0	0,408	1,008
210	74,5	19,0	0,324	1,017
260	89	17,8	0,267	1,069
310	105,5	16,3	0,239	1,060
360	121,5	15,2	0,216	1,061
410	138,0	14,5	0,191	1,099
510	165,0	13,2	0,168	1,089
560	176,0	13,0	0,156	1,128
1005	227,0	11,8	0,125	1,193

Gelée.

P.	L.	B.	μ.	V.
0	51	25,5	»	1,000
30	57	24,0	0,500	0,990
50	62	23,3	0,400	1,013
70	67	22,2	0,413	0,997
90	71	21,5	0,400	0,989
110	77	21	0,346	1,025
210	97,5	18,4	0,305	0,997
230	102	17,9	0,298	0,985
250	106	17,7	0,284	1,002

Le coefficient de dilatation thermique du caoutchouc et des gelées de gélatine, sous une tension suffisante, devient négatif; l'extension produit, dans les mêmes conditions, un échauffement, plus difficile à constater avec les gelées qu'avec le caoutchouc; cet échauffement est d'ailleurs inférieur dans les deux cas à la valeur calculée d'après les principes de la thermodynamique, ce qu'il convient d'attribuer aux effets d'élasticité résiduels très importants aussi bien dans le cas des gelées que dans celui du caoutchouc.

W. VOIGT. — Appareil simple pour la mesure de la dilatation des solides et notamment des cristaux, t. XLIII, p. 831-834.

M. Voigt opère avec une baguette cristalline de 6^{cm} à 8^{cm} de long, formée d'un seul ou de plusieurs morceaux. On dispose verticalement cette baguette sur un support en laiton, et de telle sorte que sa partie supérieure fasse pivoter un miroir autour d'un axe horizontal, en vertu de la différence des dilatations du cristal et du laiton. On observe, par la méthode de Poggendorff, le déplacement angulaire du miroir, et connaissant le bras de levier à l'extrémité duquel agit la tige, ainsi que la dilatation du laiton, on en déduit la dilatation linéaire du cristal dans la direction considérée.

W. MAREK. — Dilatation de l'eau, t. XLIV, p. 171-172.

Densité de l'eau aérée sous la pression de 760mm de mercure, rapportée à la densité maximum de l'eau privée d'air sous la même pression.

Degrés C.		Dixièmes de degré. 0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
— 0....	0,999	8742	8678	8613	8547	8478	8408	8336	8263	8188	8111
+ 0....		8742	8804	8864	8922	8979	9035	9088	9140	9191	9240
1....		9287	9332	9376	9419	9460	9499	9536	9572	9607	9640
2....		9671	9701	9729	9755	9780	9803	9825	9846	9864	9881
3....		9897	9911	9923	9934	9944	9952	9958	9963	9966	9968
4....		9968	9966	9964	9959	9953	9946	9937	9927	9915	9901
5....		9886	9870	9852	9833	9812	9790	9766	9740	9714	9685
6....		9656	9624	9592	9558	9522	9485	9446	9407	9365	9322
7....		9278	9232	9185	9137	9087	9035	8982	8928	8873	8815
8....		8758	8697	8636	8573	8509	8443	8376	8308	8238	8167
9....		8095	8021	7946	7869	7791	7712	7631	7549	7466	7381
10....		7295	7208	7119	7029	6937	6844	6750	6654	6558	6459
11....		6360	6259	6157	6053	5949	5842	5735	5626	5516	5405
12....		5292	5178	5063	4947	4829	4710	4590	4468	4345	4221
13....		4096	3969	3841	3712	3581	3450	3317	3182	3047	2910
14....		2772	2633	2493	2351	2208	2064	1919	1772	1624	1475
15....	0,999	1325	1174	1021	0867	0712	0556	0399	0240	0080	$\overline{9919}$
16....	0,998	9757	9594	9429	9264	9097	8929	8760	8589	8418	8245
17....		8071	7896	7720	7543	7365	7185	7004	6823	6640	6456
18....		6270	6084	5897	5708	5518	5328	5136	4943	4749	4553
19....		4357	4160	3961	3762	3561	3359	3157	2953	2748	2542
20....		2335	2126	1917	1707	1496	1283	1070	0855	0640	0423
21....	0,998	0205	$\overline{9987}$	$\overline{9767}$	$\overline{9546}$	$\overline{9325}$	$\overline{9102}$	$\overline{8878}$	$\overline{8653}$	$\overline{8427}$	$\overline{8200}$
22....	0,997	7972	7744	7514	7283	7051	6818	6584	6349	6114	5877
23....		5639	5400	5160	4920	4678	4435	4191	3947	3701	3455
24....		3207	2959	2709	2459	2208	1956	1702	1448	1193	0937
25....	0,997	0681	0423	0164	$\overline{9904}$	$\overline{9644}$	$\overline{9382}$	$\overline{9120}$	$\overline{8857}$	$\overline{8592}$	$\overline{8327}$
26....	0,996	8061	7794	7527	7258	6988	6718	6447	6175	5901	5628
27....		5353	5077	4801	4523	4245	3966	3686	3405	3124	2841
28....	0,996	2558	2274	1989	1703	1416	1129	0840	0551	0261	$\overline{9971}$
29....	0,995	9679	9387	9094	8800	8505	8209	7913	7616	7318	7019
30....		6720	6419	6118	5816	5514	5210	4906	4601	4296	3989
31....	0,995	3682	3374	3066	2756	2446	2135	1823	1511	1198	0884

La différence de la densité D'_t de l'eau aérée et de la densité D_t de l'eau privée d'air a les valeurs suivantes :

t.	$10^7(D'_t - D_t)$.	t.	$10^7(D'_t - D_t)$.
0°	−25	11°	−31
1	27	12	29
2	29	13	27
3	31	14	25
4	32	15	22
5	33	16	19
6	33	17	16
7	34	18	12
8	34	19	8
9	33	20	4
10	32		

Au delà de 20° la différence des deux densités est insensible.

C. DIETERICI. — Recherches calorimétriques. III. Tensions de vapeur de quelques dissolutions salines, t. XLII, p. 513-536.

Dans un Mémoire antérieur, M. Dieterici a déterminé, par une méthode calorimétrique ([1]), le volume spécifique de la vapeur d'eau à 0°. Aujourd'hui il mesure, par un procédé analogue, la différence entre la tension maximum f de la vapeur d'eau pure et la tension maximum f_s d'une dissolution saline à la même température de 0°. A cet effet, un réservoir R vide d'air, de capacité connue, est d'abord mis en communication avec le récipient A contenant la dissolution saline à 0° : la tension f_s s'établit dans R. On supprime la communication de R avec A, et l'on fait communiquer R avec le moufle d'un calorimètre de Bunsen contenant de l'eau pure : la tension dans R croît de f_s à f. On détermine la quantité de chaleur correspondante à cette évaporation et, connaissant la chaleur latente de la vapeur d'eau à 0° et le volume de R, on calcule $f - f_s$.

Voici les résultats obtenus :

1° Pour les chlorure, bromure et iodure de potassium, l'abaissement $f - f_s$ paraît rigoureusement proportionnel à la concentration, tandis qu'il croît moins vite pour l'azotate de soude, plus vite pour les chlorures de sodium et de lithium.

([1]) DIETERICI, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, p. 1; 1889. *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 246.

2° Les rapports $\frac{f}{f_s}$ à la température de 0°, déduits des expériences de M. Dieterici, coïncident en général avec les rapports $\frac{F}{F_s}$ à la température de 100° obtenus directement par M. Tammann (¹) (loi de Babo). Dans le Tableau suivant, n désigne le nombre de molécules salines en grammes par litre.

Concentration.		Tammann. F_s. (mm)	Tammann. $\frac{F}{F_s}$.	Dieterici. f_s.	Dieterici. $\frac{f}{f_s}$.
NaCl	n	734,8	1,033	4,460	1,036
	2 n	707,9	1,073	4,301	1,074
	3 n	680,0	1,118	4,125	1,120
	4 n	649,0	1,171	3,930	1,176
	5 n	617,0	1,232	3,722	1,241
	6 n	583,5	1,302	3,504	1,315
KCl	n	735,6	1,033	4,472	1,033
	2 n	711,2	1,069	4,326	1,068
	3 n	685,9	1,108	4,190	1,103
	3,83 n	663,7	1,145	4,083	1,131
$NaAzO^3$	n	737,5	1,0305	4,483	1,0305
	2 n	713,8	1,065	4,363	1,059
	4 n	669,7	1,135	4,146	1,114
	6 n	628,3	1,209	3,953	1,169
	8 n	592,2	1,283	3,749	1,232
KBr	n	735,8	1,033	4,476	1,032
	2 n	709,2	1,072	4,324	1,069
	3 n	683,5	1,112	4,186	1,104
	4 n	654,5	1,161	4,037	1,144
KI	2 n	707,8	1,074	4,316	1,071
	4 n	647,8	1,173	4,012	1,151
	6 n	588,2	1,292	3,704	1,247
	7,5 n	548,0	1,387	3,474	1,330
LiCl	2 n	702,9	1,081	4,280	1,080
	4 n	627,5	1,211	3,836	1,204
	7,9 n	433,5	1,676	2,728	1,694
	10 n	366,5	2,074	2,128	2,171

Les *coefficients d'activité i*, introduits par M. Arrhenius (²), à

(¹) TAMMANN, *Mém. de l'Acad. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 7ᵉ série, t. XXXV; 1887.

(²) M. ARRHENIUS, *Zeitsch. für Phys. Ch.*, t. I, p. 631; 1887; *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. VII, p. 178.

la suite de ses études sur la conductibilité des dissolutions salines et liés à la théorie de la dissociation, ont été calculés par M. Dieterici, d'après les expériences qui précèdent. Ils concordent mal avec les nombres calculés par M. Arrhenius, soit au moyen des conductibilités, soit au moyen des abaissements du point de congélation :

	i congélation (Arrhenius).	*i* conductibilité (Arrhenius).	*i* tension de vapeur (Dieterici).
NaCl...........	1,90	1,82	1,92
KCl............	1,82	1,86	1,78
KBr	1,90	1,92	1,74
KI.............	1,90	1,92	1,82
LiCl...........	1,99	1,75	1,92
$NaAzO^3$........	1,82	1,82	1,65

J. FERCHE. — Sur quelques propriétés physiques de la benzine, t. XLIV, p. 265-287.

1. M. Ferche s'est proposé, en premier lieu, de vérifier la formule

$$\frac{dP}{dt} - \frac{dp}{dt} = \frac{E(R-r)}{Ts}, \quad (1)$$

dans laquelle P et p désignent les forces élastiques maximum de la vapeur d'un même corps en présence de ce corps à l'état solide ou liquide, R et r les chaleurs latentes de vaporisation du solide et du liquide, T la température absolue de fusion, s le volume spécifique de la vapeur. Si l'on admet qu'au point de fusion $P=p$, la formule (1) devient

$$\frac{dP}{dt} - \frac{dp}{dt} = \frac{Eq}{Ts}, \quad (2)$$

dans laquelle q est la chaleur latente de fusion.

Pour vérifier cette formule, M. Ferche a eu recours à la benzine. Il détermine d'abord T, et par l'étude des forces élastiques maximum démontre que l'on a effectivement $P=p$ à la température normale de fusion, 5°,58. Ses observations lui donnent pour la valeur de $\frac{dP}{dt} - \frac{dp}{dt}$ à 5°,58 la valeur 0,524, qui coïncide presque avec la valeur 0,541, calculée d'après le second membre de la formule (2), en admettant la valeur de la chaleur latente de fusion donnée par Regnault.

2. Dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Ferche cherche à vérifier, toujours à l'aide de la benzine, la formule

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(\sigma - \tau)}{Eq}, \tag{3}$$

donnant la variation du point de fusion T sous l'influence de la pression, et dans laquelle σ et τ sont les volumes spécifiques du liquide et du solide.

Pour cette vérification il a dû déterminer en particulier la densité (1,0048) de la benzine solide; il a ensuite mesuré directement les valeurs de $\frac{dT}{dp}$ pour des variations de pression d'un petit nombre d'atmosphères et trouvé pour ce quotient la valeur moyenne 0,02965, tandis que le calcul au moyen de la formule (3) donne 0,029596.

A. WINKELMANN. — Sur la conductibilité calorifique des gaz, t. XLIV, p. 177-205 et 429-456.

Reprenant, par une méthode modifiée, les expériences qu'il avait réalisées en 1875, sur la conductibilité calorifique des gaz (1), M. Winkelmann trouve les valeurs suivantes de la conductibilité absolue k_0 à la température de 0° et du coefficient de température $\frac{1}{k_0}\frac{dk}{dt}$. Ces valeurs sont exprimées en unités C.G.S.

	k.	$\frac{1}{k_0}\frac{dk}{dt}$.
Air	0,0000555	0,00190
Hydrogène	0,0003829	0,00175
Acide carbonique	0,0000327	0,00401

Ces résultats sont d'accord avec les résultats des mesures antérieures de l'auteur et de M. Eichhorn (2). Ils présentent de grandes divergences, pour les valeurs de k, avec les nombres de M. Schleiermacher (3).

(1) WINKELMANN, *Pogg. Ann.*, t. CLVI, p. 518; 1875.

(2) EICHHORN, *Wied. Ann.*, t. XL, p. 719; 1890. *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 524.

(3) SCHLEIERMACHER, *Wied. Ann.*, t. XXXIV, p. 623; 1888. *Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, p. 440.

Électricité.

E. RIECKE. — Charges électriques produites par le frottement de glissement, t. XLII, p. 465-481.

Soit une plaque rectangulaire isolante de longueur l, de largeur b, que l'on présente à la boule de diamètre a d'un électroscope, à la distance d, de telle sorte que la plaque soit normale à la ligne qui joint son milieu au centre de la boule. Nous supposons la plaque uniformément électrisée et nous désignons par ε la densité électrique à sa surface. La quantité d'électricité de nom contraire induite dans la boule est

$$(1) \qquad e = a\varepsilon \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{d^2+\xi^2+\eta^2}}.$$

Cette formule, dans laquelle ξ et η représentent des coordonnées rectangulaires, se simplifie quand l et b sont petits par rapport à d et devient

$$(2) \qquad e = \varepsilon b l \frac{a}{d}\left(1 - \frac{l^2+b^2}{8d^2}\right).$$

Cette formule permettra de déterminer ε en valeur absolue, si l'on peut mesurer e, ce à quoi l'on parvient par une étude préliminaire des charges absolues qu'il faut donner à l'électroscope pour obtenir une divergence donnée de ses feuilles.

M. Riecke promène la plaque isolante rectangulaire sur un frotteur donné en la déplaçant d'une longueur s parallèlement à sa plus petite dimension, et il trouve que la densité ε varie d'après la formule

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty\left(1 - e^{-\frac{s}{\alpha}}\right).$$

Il étudie ensuite comment varient les densités limites ε_∞ suivant la nature de la plaque isolante et du frotteur sur lequel on la promène. Dans le Tableau suivant ces densités sont exprimées dans le système C.G.S. et se rapportent à des plaques de 5^{cq}.

	Frottement	
	sur la laine.	sur la soie.
Cire à cacheter	—5,70	—5,40
Gomme laque	—5,57	—5,12
Soufre	—5,48	—5,39
Gomme élastique I, III	—4,82	—4,43
Ambre jaune bien transparent	—4,60	—4,40
Ambre jaune laiteux	—4,18	—4,11
Gomme élastique II, IV	—3,90	—3,80
Verre I et II	»	+3,18
Verre III et IV	+2,65	+2,90

L'ordre dans lequel se présentent les divers isolants au point de vue de la densité électrique acquise sur la laine et sur la soie est très sensiblement le même; la différence absolue de ces densités est en moyenne 0,23. Il s'ensuit qu'on peut ranger tous les corps qui précèdent dans une même série de tensions comprenant la laine et la soie, la densité caractéristique de cette dernière substance relativement à la laine étant — 0,23.

F. NARR. — Sur la déperdition de l'électricité, t. XLIV, p. 133-137.

M. Narr étudie la déperdition de l'électricité sur une sphère creuse qu'on peut porter, à l'aide d'eau bouillante qu'elle reçoit dans son intérieur, à une température quelconque comprise entre 0° et 100°. Les expériences consistent à communiquer à cette sphère une charge déterminée et à mesurer, à l'aide d'un électromètre à sinus, la charge qu'elle possède encore au bout de deux secondes.

Le résultat, indépendant de la nature de l'électricité dont la sphère est chargée, se montre aussi presque indépendant de la température : on ne constate, en effet, à 100° qu'un accroissement de la déperdition inférieur à $\frac{1}{10}$, malgré les courants d'air créés autour de la sphère chaude par l'excès de sa température sur celle de l'atmosphère.

W. SHRADER. — Résistance à l'extension d'un courant qui se propage de la surface plane terminale d'un cylindre circulaire dans un milieu illimité, t. XLIV, p. 222-238.

Une correction, qu'il est souvent nécessaire d'effectuer dans les

expériences précises, est relative à la résistance introduite par un milieu indéfini dans lequel se termine un tube cylindrique de rayon a rempli par la même substance et constituant la résistance principale. Maxwell a montré que cette résistance peut être mise sous la forme

$$\Delta w = \frac{n}{k\pi a},$$

k représentant la conductibilité spécifique de la substance, n un nombre dont Maxwell [1] donne théoriquement deux limites, 0,785 et 0,849. Depuis, Lord Rayleigh [2] a réduit la limite supérieure de n à 0,8242 et il pense que n ne peut être éloigné de cette limite.

D'après M. Shrader, les expériences de MM. Mascart, de Nerville et Benoît [3] donnent $n = 0,794$. Il exécute lui-même deux séries d'expériences, l'une avec du mercure, l'autre avec une dissolution d'acide sulfurique, et il trouve en moyenne $n = 0,805$.

M. WIEN. — Le téléphone employé optiquement pour la mesure de l'intensité des courants, t. XLII, p. 593-621, et t. XLIV, p. 681-688.

1. La membrane d'un téléphone est reliée par l'intermédiaire d'une tige mince fixée en son centre à un morceau de ressort de montre très fin qui porte un miroir. Quand on fait passer un courant constant dans la bobine du téléphone, le miroir éprouve un déplacement angulaire qu'on mesure par la méthode de réflexion, et qui dans des limites assez larges est proportionnel à l'intensité du courant.

Si, comme de coutume, le téléphone est traversé par un courant sinusoïdal, le miroir entre en vibration et, au lieu d'une tache lumineuse fixe, on obtient une bande lumineuse dont la largeur est proportionnelle à l'amplitude du courant sinusoïdal.

On peut régler la longueur du ressort de manière que la période de ses vibrations propres coïncide avec celle de la membrane et enfin employer un courant sinusoïdal tel que sa période

(1) MAXWELL, *Treatise on Electricity and Magnetism*, t. I, § 308.
(2) LORD RAYLEIGH, *London Math. Soc. Proc.*, t. VII, p. 74; 1875-76.
(3) MASCART, DE NERVILLE et BENOIT, *Résumé d'expériences sur la détermination de l'ohm*, p. 66; 1884.

soit aussi la même; l'amplitude de l'excursion du miroir est alors amplifiée dans un rapport théoriquement infini, pratiquement supérieur à 100, et l'appareil devient propre à déceler et à mesurer des courants sinusoïdaux de très faible intensité. Il est à remarquer que le *téléphone optique* de M. Wien, réglé pour des courants sinusoïdaux de période déterminée peut être considéré comme à peu près insensible pour des courants d'une autre période. Il en résulte que, tandis que le téléphone acoustique ne peut jamais être réduit au silence dans les mesures effectuées au moyen d'un pont de Wheatstone et qu'il y a seulement un minimum de bruit, le miroir du téléphone optique peut être amené rigoureusement au repos.

M. Wien a effectué à l'aide de son appareil des mesures de la résistance de l'acide sulfurique étendu, au voisinage du maximum de conductibilité. Pour compenser l'effet de la polarisation des électrodes, qui introduit dans l'une des branches du pont une force électromotrice sinusoïdale de même période que celle du courant principal, mais avec un retard de phase voisin d'un quart de période, M. Wien introduit dans l'autre branche du pont une bobine avec un noyau formé de fils de fer doux que l'on enfonce plus ou moins : on introduit ainsi dans cette seconde branche une force électromotrice périodique de self-induction, également en retard d'un quart de longueur d'onde et d'amplitude variable à volonté, qu'on peut régler de façon à compenser exactement celle qui résulte de la polarisation.

Les mesures sont d'une grande régularité et fixent le maximum de conductibilité de l'acide sulfurique à la densité de 1,225.

2. Dans le second Mémoire, M. Wien donne la description de son téléphone, qui se distingue du téléphone ordinaire en ce qu'il est symétrique : au lieu d'un électro-aimant, M. Wien en emploie deux en fer à cheval qui présentent à la membrane leurs pôles de nom contraire.

M. WIEN. — Mesure des coefficients d'induction à l'aide du téléphone optique, t. XLIV, p. 689-712.

M. Wien emploie le téléphone optique ci-dessus décrit comme

appareil de zéro dans un pont de Wheatstone parcouru par des courants alternatifs. La disposition du pont et son réglage, soit pour la comparaison de coefficients d'induction entre eux ou de coefficients d'induction à des capacités, sont du reste, en principe, les mêmes que dans les méthodes classiques de Maxwell.

G.-H. ZAHN. — Mesure de la résistance du bismuth à l'aide de courants soit continus soit oscillatoires, t. XLII, p. 350-351.

Conformément à une observation antérieure de M. Lenard ([1]), M. Zahn trouve que la résistance de spirales de bismuth mesurée par des courants oscillatoires est un peu inférieure à la résistance mesurée par des courants continus.

TH. DES COUDRES. — Sur les propriétés thermo-électriques du mercure et de quelques amalgames très dilués, t. XLIII, p. 673-699.

Après avoir vérifié qualitativement les résultats des expériences de M. Haga ([2]) sur le phénomène de Thomson dans le mercure, l'auteur cherche s'il existe une force électromotrice thermo-électrique entre des colonnes de mercure diversement comprimées.

Le mercure est comprimé par son propre poids. Il est contenu dans un appareil formé de tubes en U verticaux dont les branches sont alternativement chauffées et refroidies : c'est, si l'on veut, la réunion d'une série d'appareils de Dulong et Petit pour la mesure de la dilatation du mercure dont chacun constitue un couple thermo-électrique de nouvelle espèce. Les branches extrêmes de l'appareil se recourbent horizontalement et, dans une région assez éloignée des tubes en U pour que la température des deux extrémités de la colonne mercurielle se confonde avec la température extérieure, sont soudés des fils de platine en relation avec un galvanomètre.

M. des Coudres constate l'existence d'une force électromotrice proportionnelle à la différence de température des branches paires

---

([1]) *Wied. Ann.*, t. XXXIX, p. 619; 1890.

([2]) HAGA, *Wied. Ann.*, t. XXVIII, p. 179; 1886. *Journal de Physique*, 2e série, t. VI, p. 106.

et impaires. Il définit un coefficient spécifique c, caractérisant ce nouveau phénomène, par la formule élémentaire

$$E = c(p_2 - p_1)(t_2 - t_1), \tag{1}$$

dans laquelle p_1 et p_2 sont les pressions uniformes auxquelles sont soumises deux masses de mercure aux températures t_1 et t_2, E la force électromotrice thermo-électrique correspondante.

Pour déduire le coefficient c d'expériences comme celles de l'auteur, où la pression des masses de mercure chaud et froid n'est pas uniforme, il suffit évidemment de remplacer $p_2 - p_1$ par sa valeur moyenne que l'on déduit de l'observation de la différence de niveau du mercure dans deux tubes ouverts en communication avec les deux extrémités de la colonne mercurielle.

En employant une série de trente-quatre tubes en U verticaux, de 126^{cm} de hauteur et entre les limites de température $20°$ et $100°$, M. des Coudres a trouvé en moyenne

$$c = 2,18.10^{-6} \frac{\text{microvolt}}{\text{mégadyne} \times \text{degré centigrade}}.$$

Une cause d'erreur assez grave intervient dans ces expériences. Quand on incline sur l'horizon le système des tubes, la force électromotrice E mesurée décroît beaucoup moins vite que ne l'indiquerait la formule (1); et quand les tubes sont horizontaux ($p_1 = p_2$), elle conserve encore une valeur très notable. M. des Coudres a reconnu que si l'on approche un aimant de l'un des coudes de l'appareil, supposé dans la situation horizontale, on produit une variation de E très appréciable : celle-ci ne peut être attribuée qu'à l'induction exercée par l'aimant sur les tourbillons dont les parties coudées placées entre un tube chaud et un tube froid sont le siège. D'après l'ordre de grandeur de cette force électromotrice d'induction, l'auteur prouve que l'action inductrice de la terre est très suffisante pour expliquer le phénomène perturbateur qu'il a constaté.

J. VANNI. — Sur la variation apparente de l'équivalent électrochimique du cuivre, t. XLIV, p. 214-221.

faisant usage d'une solution de sulfate de cuivre additionnée

de 1 pour 100 d'acide sulfurique, M. Gray [1] a constaté une variation apparente de l'équivalent électrochimique du cuivre qu'il attribue à une action dissolvante du liquide sur l'électrode.

M. Vanni évalue cette action dissolvante par la perte de poids qu'éprouvent les électrodes en un temps donné, quand le courant ne passe pas; les expériences, corrigées d'après ces observations, fournissent désormais, pour l'équivalent électrochimique du cuivre, un nombre constant.

Au reste, M. Vanni, ayant observé que dans une solution parfaitement neutre de sulfate de cuivre les électrodes augmentent légèrement de poids, a eu l'idée de mêler à cette solution neutre une très petite quantité de solution à 1 pour 100 d'acide sulfurique; il a obtenu ainsi une solution dans laquelle les électrodes conservent leur poids indéfiniment, quand le courant ne passe pas. Avec cette dissolution, il a fait des expériences pour comparer les quantités de cuivre et d'argent déposées par un même courant : le rapport a été trouvé égal à 0,2938. Ce nombre se confond, à $\frac{1}{600}$ près, avec le rapport $\frac{31,59}{107,66} = 0,2934$ des équivalents du cuivre et de l'argent.

A. OBERBECK. — Action exercée sur un courant par des couches minces précipitées, t. XLII, p. 193-208.

L'attention a été rappelée, depuis quelques années, sur les membranes précipitées à la surface de contact de deux électrolytes. On connaît le rôle qu'elles jouent dans le phénomène de l'osmose; il est intéressant de savoir celui qu'elles ont dans les phénomènes d'électrolyse. M. Ostwald [2] a démontré expérimentalement qu'une membrane de ferrocyanure de cuivre précipitée entre deux dissolutions de ferrocyanure de potassium et de sulfate de cuivre n'isole nullement, mais qu'au bout d'un temps très court elle affaiblit beaucoup le courant et devient le siège d'une force contre-électromotrice. Il explique le rôle de la membrane en disant qu'elle est imperméable, non pour certains sels, mais pour certains ions.

(1) GRAY, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXII, p. 389; 1886, et t. XXV, p. 179; 1888.
(2) OSTWALD, *Zeitsch. f. Phys. Chem.*, t. VI, p. 70; 1890.

M. Oberbeck élargit la question et, reliant les observations de M. Ostwald aux anciennes expériences de M. du Bois-Reymond (¹) et d'autres physiciens cités par G. Wiedemann (²), sur les forces électromotrices de polarisation qui peuvent se manifester à la surface de séparation de deux électrolytes, il étudie les phénomènes qui se produisent à cette surface de séparation dans le cas général où les deux électrolytes donnent par leur réaction réciproque un précipité membraneux ou non.

Dans un verre contenant l'une des deux dissolutions salines, plongent deux cylindres fermés à leur partie inférieure par du papier parchemin et contenant la seconde dissolution et des électrodes impolarisables. Les précipités se forment dans les pores du papier, sans troubler les liqueurs. Grâce à cette disposition symétrique, et par l'emploi d'une électrode impolarisable parasite, on peut étudier séparément l'action électrique des deux précipités (anodique et cathodique), et notamment la force électromotrice de polarisation qui peut se développer au siège de chacun d'eux.

On reconnaît ainsi qu'*il n'y a jamais de polarisation qu'au siège de celui des deux précipités qui est renforcé par l'action du courant.* L'auteur a étudié des couples de solutions salines très variés : ferrocyanure ou ferricyanure de potassium avec les sulfates, les chlorures de zinc ou de cuivre; nitrate de plomb avec les sulfates de zinc ou de cuivre; sulfate de zinc avec les chlorures de calcium, de strontium ou de baryum; nitrate d'argent avec les chlorures de zinc et de cuivre. Les forces électromotrices de polarisation varient suivant les cas de plus de 2 volts (nitrate de plomb avec les sulfates de zinc ou de cuivre) à moins de $0^{volt},1$ (sulfate de zinc et chlorure de calcium). Avec le nitrate d'argent et les chlorures de zinc et de cuivre, M. Oberbeck observe même le fait assez étrange d'une polarisation négative : c'est-à-dire que le précipité renforcé par le courant est le siège d'une force électromotrice secondaire de même sens que celle qui entretient le courant. La nature du précipité, membraneux ou non, ne paraît avoir aucune influence sur les phénomènes observés.

On ne peut songer à attribuer les phénomènes de polarisation

(¹) Du Bois-Reymond, *Monatsb. d. Berl. Acad.*; 1856-1859.
(²) G. Wiedemann, *Lehre von der Electricität*, t. II, p. 597.

qu'à la présence d'ions libres. Si l'on admet, ce qui paraît d'ailleurs évident, que les particules du précipité ont une conductibilité tout à fait négligeable par rapport à celle des liquides extérieurs, on se trouve en présence de deux conducteurs de large section (les deux liquides) réunis par des canaux capillaires contenant de l'eau presque pure, c'est-à-dire un liquide très résistant : il faudrait donc admettre que, dans ces conditions, les ions libres ne se rejoignent que partiellement à travers ces canaux?

F. BRAUN. — Recherches sur l'électrolyse, t. XLII, p. 450-464. Sur l'électrosténolyse, t. XLIV, p. 473-500. Sur les réactions électrocapillaires, t. XLIV, p. 501-509.

M. Braun a observé sur divers liquides (nitrate d'argent, acétate et nitrate de plomb, chlorure d'or, nitrate de cobalt, nitrate de palladium, sulfate de fer) le phénomène suivant : si la cuve contenant le liquide est divisée en deux par une cloison isolante présentant une fente, il y a précipitation de métal dans la fente quand on fait passer un courant à travers le liquide, pourvu que ce courant dépasse une certaine intensité critique qui est fonction de la concentration. C'est ce phénomène que M. Braun désigne sous le nom d'*électrosténolyse* (στενόν, étroit). Il l'interprète en admettant que la séparation des ions d'un électrolyte peut s'exécuter, indépendamment de la présence d'une électrode, pourvu que la vitesse de ces ions, dans la direction du courant, dépasse une certaine limite qui correspondrait à l'intensité critique observée ([1]).

M. Braun rappelle les recherches de M. E. Becquerel sur les réactions électrocapillaires, sans toutefois se prononcer bien nettement sur la relation que ces réactions peuvent offrir avec le phénomène de l'électrosténolyse.

W. NEGBAUR. — Recherches expérimentales sur les différences de potentiel aux surfaces de contact de dissolutions très étendues, t. XLIV, p. 737-758.

Ces recherches ont été entreprises pour vérifier les conclusions de la théorie de M. Planck ([2]).

([1]) On notera l'analogie des phénomènes décrits par M. Braun avec ceux qui font l'objet du Mémoire ci-dessus analysé de M. Oberbeck.

([2]) PLANCK, *Wied. Ann.*, t. XXXIX, p. 161, et t. XL, p. 561; 1890. *Journal de Physique*, 2e série, t. X, p. 565.

Elles montrent que des dissolutions salines équivalentes ayant même anion ou même cation obéissent à la série des tensions. La direction de la force électromotrice au contact de deux dissolutions équivalentes est celle du mouvement de celui des deux ions dissemblables qui possède la plus grande vitesse. La vérification a porté sur le groupe des chlorures, l'acide azotique, l'azotate de potasse et le chlorate de potasse.

A. OBERBECK et J. EDLER. — *Sur les forces électromotrices des piles*, t. XLII, p. 209-226.

Les auteurs mesurent les forces électromotrices de piles à un liquide dont l'un des métaux est le mercure, l'autre un amalgame liquide à 1 ou 2 pour 100. Ces forces électromotrices sont à peu près indépendantes de la nature du métal contenu dans la dissolution supposée assez concentrée, à moins que ce métal ne soit celui de l'amalgame, et, en ce cas, la force électromotrice est toujours plus faible.

Il est probable qu'une électrode métallique doit toujours être considérée comme plongée dans une dissolution excessivement étendue d'un sel du même métal. De là, la constance approchée de la force électromotrice quand le métal du sel dissous est quelconque, et aussi la diminution de la force électromotrice (piles de concentration) quand l'électrode plonge dans une dissolution concentrée d'un sel du même métal.

G. MARKOWSKY. — *Sur la force électromotrice des piles à gaz*, t. XLIV, p. 457-472.

D'après M. Markowsky, la force électromotrice d'une lame de platine saturée d'hydrogène par rapport à une lame de platine parfaitement purgée de gaz, dans l'acide sulfurique aussi exempt de gaz, est plus faible qu'on ne l'avait annoncé jusqu'ici : sa valeur serait $0^{volt},646$; au contraire, pour le platine saturé d'oxygène, M. Markowsky trouve une valeur plus forte, $0^{volt},372$.

Par l'addition, à l'acide sulfurique pur, de sulfate de platine, la force électromotrice d'un élément à oxygène diminue, celle d'un élément à hydrogène augmente, mais de telle sorte que la somme des deux forces électromotrices demeure constante.

Ces faits paraissent très favorables à la théorie de M. Warburg [1], d'après laquelle la pile à gaz doit tout au moins une partie importante de sa force électromotrice à la même cause qui agit dans toutes les piles à concentration.

W. NEGBAUR. — **Éléments normaux pour de faibles différences de potentiel,** t. XLIV, p. 767-770.

Les éléments préconisés par M. Negbaur sont des piles au calomel formées de deux vases communiquant par un robinet et contenant deux électrodes de mercure au contact de dissolutions de calomel de concentration différente.

A. HEYDWEILLER. — **Sur le passage de l'électricité à travers les gaz, 3e Partie** [2]. **Décharges de condensateurs dans l'air normal,** t. XLIII, p. 310-342.

On sait que, suivant la valeur de la résistance interposée dans le circuit d'un condensateur, la décharge est oscillante (petites résistances) ou continue (grandes résistances), ainsi qu'on le démontre théoriquement pour le cas idéal où le circuit est entièrement conducteur. Pratiquement, c'est-à-dire avec une interruption traversée par une étincelle, on observe dans un miroir tournant les deux sortes de décharge; mais, avec les grandes résistances et sous l'influence de causes mal déterminées, on observe aussi une troisième sorte de décharges, la décharge *intermittente,* formée d'une série de décharges partielles rapidement décroissantes et toutes dirigées dans le même sens. Toutes les expériences de M. Heydweiller se rapportent à la décharge continue.

Les résultats en sont exprimés par les lois approchées suivantes :

1° Les quantités d'électricité déchargées et par suite aussi les charges conservées par le condensateur après le passage de l'étincelle demeurent proportionnelles à la capacité c, quelle que soit la résistance.

2° Les quantités d'électricité déchargées décroissent jusqu'à devenir sensiblement nulles quand on augmente la résistance.

---

[1] WARBURG, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, p. 321; 1889. *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 102.

[2] Voir *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, p. 588, et t. X, p. 542.

3° Les charges q_1 conservées par le condensateur sont proportionnelles à la racine carrée de la résistance.

On peut se faire une idée de la durée du courant de décharge en admettant, à titre d'approximation, que l'intensité de ce courant décroît linéairement. Cela posé :

4° Le travail dépensé dans l'étincelle paraît proportionnel à la durée de la décharge et indépendant de la durée du courant. Pour évaluer ce travail on fait la différence de la chaleur correspondant à la perte d'énergie totale $\frac{q_0^2 - q_1^2}{2c}$ et de la chaleur dégagée dans la partie métallique du circuit, cette dernière évaluée au moyen d'une sorte de thermomètre de Riess.

La résistance proprement dite d'une courte étincelle ne paraît pas très grande ; l'auteur pense qu'elle est de l'ordre de grandeur de 10 ohms ou au plus de 100 ohms, en tout cas bien insuffisante pour expliquer la grandeur du travail dépensé dans l'étincelle. M. Heydweiller ne croît pas non plus à l'existence d'une force contre-électromotrice constante de l'étincelle. Il y aurait donc là, d'après lui, un fait spécial à éclaircir.

J. MOOSER. — Sur les couches métalliques obtenues par la désagrégation des cathodes, t. XLII, p. 639-663.

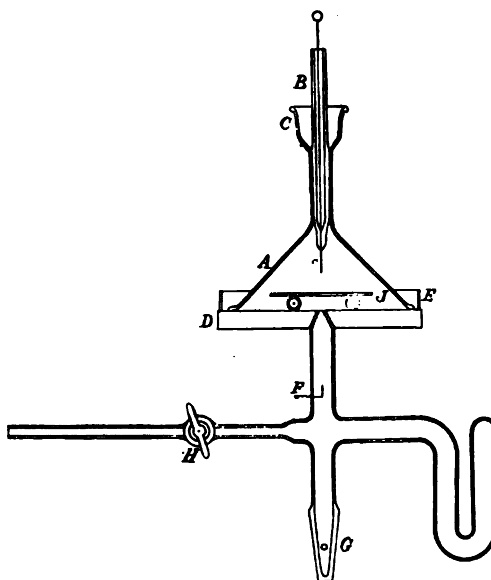
Le tube de Geissler employé par M. Mooser est figuré ci-contre : B est la cathode, F l'anode ; entre les deux est disposée, sur de petits tubes de verre, la plaque de verre J destinée à recevoir le dépôt. En H un robinet peut mettre le tube de Geissler en communication avec une machine pneumatique à mercure.

On peut admettre que les particules métalliques arrachées à la cathode B suivent la direction des lignes de force. Si donc l'extrémité de B est formée par une petite boule et que J ne soit pas trop éloignée, on pourra admettre que les trajectoires des particules métalliques sont rectilignes et également réparties dans l'espace autour du centre de la boule. On calculera aisément les épaisseurs relatives de la couche déposée à diverses distances du pôle de la plaque J par rapport au centre de la boule cathodique.

Pour évaluer les épaisseurs relatives du métal, M. Mooser compare la résistance électrique d'anneaux concentriques qu'il déter-

mine en appuyant la plaque J, par sa face métallisée, sur une planchette munie de rainures concentriques r, r', ..., contenant du mercure; ces rainures communiquent respectivement avec des tubes t, t', ... qui reçoivent les électrodes. Les résultats de ces mesures confirment approximativement les prévisions de l'auteur.

Fig. 1.



Si l'on admet que le platine déposé a pour densité 21, on peut, de la résistance absolue d'un anneau et de la pesée de la plaque J, déduire les épaisseurs absolues du métal et la résistance spécifique du platine déposé. La plus faible résistance spécifique, relative à du platine déposé dans l'hydrogène, s'est encore trouvée dix-huit fois supérieure à celle du platine pur. Quand le dépôt est fait dans l'air, la résistance spécifique peut atteindre quatre-vingt-deux fois celle du platine.

J. ELSTER et H. GEITEL. — Variation de la déperdition électrique produite par la lumière avec la nature de la surface illuminée, t. XLIII, p. 225-240.

Les auteurs ont étudié les métaux alcalins et divers amalgames dont l'activité électro-optique ne peut être attribuée qu'au métal

dissous, car le mercure pur se montre absolument inactif. Par ordre d'activité décroissante, ces corps se rangent dans l'ordre suivant :

Potassium pur.
Alliage de potassium et de sodium.
Sodium pur.
Amalgames de { rubidium. potassium. sodium. lithium. magnésium. thallium. zinc.

Il y a lieu de remarquer que, dans une pile hydro-électrique, chacun des termes de la série se trouverait électropositif par rapport aux suivants.

La lumière d'une bougie placée à 6m suffit, à la limite, pour manifester l'activité du potassium pur; les rayons efficaces (à travers le verre) s'étendent de l'ultra-violet jusqu'à la limite du rouge, mais le maximum d'effet se trouve dans le bleu. A mesure que les métaux se trouvent placés plus bas dans la liste, la longueur d'onde maximum de la lumière efficace diminue et l'intensité lumineuse totale nécessaire pour produire l'excitation augmente de plus en plus.

J. ELSTER et H. GEITEL. — Déperdition électrique produite par la lumière solaire illuminant des surfaces minérales, t. XLIV, p. 722-736.

Le phénomène de l'activité photo-électrique se manifeste pour diverses substances minérales phosphorescentes, notamment pour les diverses variétés de spath fluor. Les surfaces nouvellement mises à nu sont plus particulièrement actives et ce sont surtout les rayons bleus qui développent cette activité.

Dans le vide, le spath fluor perd son activité électro-optique en même temps que sa conductibilité électrique; l'une et l'autre reparaissent à l'air humide. Quand on chauffe fortement le spath, ...erd à la fois son activité électro-optique et son pouvoir ...phorescent.

C. FROMME. — Recherches magnétiques, t. XLII, p. 181-211 et 256 à 279, t. XLIV, p. 138-163.

Nous nous bornerons à signaler les objets spéciaux auxquels se rapportent les recherches très étendues de M. Fromme.

Dans le premier de ses deux Mémoires, il étudie l'action d'une force magnétisante plus petite sur le moment magnétique permanent produit par une force magnétisante plus grande, de même direction.

Dans le second, il cherche l'influence de la vitesse avec laquelle la force magnétisante diminue, sur la grandeur du moment permanent produit.

R. WACHSMUTH. — Rotation électromagnétique du plan de polarisation produite par quelques acides et quelques dissolutions salines, t. XLIV, p. 377-382.

Comparaisons des rotations produites dans un même champ magnétique par la dissolution saline et le sulfure de carbone dont le pouvoir rotatoire électromagnétique a été pris égal à 24300. Dans le Tableau suivant, σ désigne le poids spécifique des dissolutions étudiées, k leur pouvoir rotatoire, k_1 leur pouvoir rotatoire par rapport à celui de l'eau pris pour unité.

	σ.	k.	k_1.
$CO SO^4$	1,1378	8997,3	0,99931
$CO Cl^2$	1,1250	9895,9	1,09912
$CO(AzO^3)^2$	1,1321	8661,6	0,96203
$CO(C^2H^3O^2)^2$	1,0886	9157,9	1,01715
$NiSO^4$	1,1454	9660,8	1,07300
$NiCl^2$	1,1058	10472,3	1,16314
$Ni(AzO^3)^2$	1,1285	9403,5	1,04443
$Ni(C^2H^3O^2)^2$	1,0633	9445,0	1,04904
$MnSO^4$	1,1607	9265,0	1,02904
$NnCl^2$	1,1107	10053,0	1,11657
$Mn(AzO^3)^2$	1,1135	8926,8	0,99148
$Mn(C^2H^3O^2)^2$	1,0864	9218,9	1,02393
H^2SO^4	1,8282	7790,2	0,86524
HCl	1,1247	12191,6	1,35410
$HAzO^3$	1,1898	8361,9	0,92874
$C^2H^4O^2$	1,0602	7721,6	0,85762
CS^2	»	24300,0	2,69890
H^2O	1,0000	9003,5	1,00000
$Ni(CO)^4$	1,3100	38211,3	4,24410

On remarquera le pouvoir rotatoire énorme du sel $Ni(CO)^4$.

P. DRUDE et W. NERNST. — Influence de la température sur l'état d'agrégation et les propriétés du bismuth dans un champ magnétique, t. XLII, p. 568-580.

Les expériences des auteurs ont été poursuivies dans un champ magnétique d'environ 7000 unités C.G.S. entre les pôles d'un électro-aimant distants de $0^m,04$.

1° *Phénomène de Hall dans le bismuth.* — Le phénomène de Hall proprement dit décroît d'intensité quand la température s'élève. Prenons pour unité l'intensité du phénomène observé à 20°, on a trouvé, sur un certain échantillon :

t.	*e.*
°	
20	1,000
254	0,418
23	1,005

Le bismuth liquéfié dans un tube plat ne présente pas de phénomène de Hall égal à la soixantième partie de celui qui correspond au bismuth solide à la température ordinaire. De 250° à la température de fusion (310°) le décroissement est extrêmement rapide.

2° *Accroissement de résistance du bismuth dans le champ magnétique.* — La valeur proportionnelle de cet accroissement décroît aussi quand la température s'élève, mais non proportionnellement à l'intensité du phénomène de Hall. Dans le Tableau suivant, r et Δr représentent respectivement les valeurs de la résistance d'un échantillon de bismuth hors du champ magnétique et de l'accroissement proportionnel observé dans le champ de 7000 unités.

t.	Δr (pour 100).	*r.*
16°	21,9	0,250
100	8,0	0,227
223	0,96	0,250
290 (bismuth liquide)	0,41	0,117
35	15,1	0,207
18	18,6	0,208

3° *Phénomène de Hall dans l'antimoine.*

t.	e.
17°	1,00
210	0,78
250	0,72
30	0,76
23	0,91

Le décroissement est beaucoup moins marqué que dans le bismuth.

4° *Phénomène de Hall et accroissement de résistance du mercure.* — Le phénomène de Hall, certainement très petit, est masqué par un phénomène irréversible observé déjà avec le bismuth liquide, et sur la nature duquel les auteurs ne se prononcent pas. L'accroissement de résistance est petit, mais sensible, comme avec le bismuth liquide.

Dans un Appendice au Mémoire, M. Drude expose qu'il n'a pu déceler aucune variation des constantes optiques du bismuth dans le champ magnétique.

C.-L. WEBER. — Sur la mesure de l'inclinaison magnétique, t. XLIII, p. 659-672.

Soit un cadre circulaire de fils conducteurs mobile autour d'un axe horizontal formé, par exemple, par des couteaux et dont le centre de gravité est placé de telle sorte que sous l'influence de la pesanteur, et quand le cadre n'est animé par aucun courant, l'axe normal au cadre fasse avec l'horizon un angle γ un peu supérieur à l'inclinaison I.

Si l'on suppose d'abord le plan d'oscillation du cadre perpendiculaire au méridien magnétique et qu'on dirige dans ce cadre un courant tel que le feuillet équivalent présente son pôle nord en dessous, le moment de rotation développé sous l'influence du magnétisme terrestre est, en désignant par Z la composante verticale du magnétisme terrestre, par S la surface totale du cadre, par i l'intensité du courant,

$$ZSi\cos\gamma.$$

Si l'on amène le plan d'oscillation du cadre à se confondre avec le plan du méridien magnétique, au moment dû à la composante verticale, s'ajoute un autre moment dû à la composante horizontale H

$$\pm \mathrm{HS}i \sin\gamma,$$

et il faudra considérer ce dernier moment comme négatif si le pôle nord du cadre est dirigé vers le nord. Le moment résultant

$$\mathrm{S}i(\mathrm{Z}\cos\gamma - \mathrm{H}\sin\gamma)$$

sera différent de zéro, et l'inclinaison du cercle se modifiera par le passage du courant.

Enfin si le plan vertical d'oscillation du cadre fait un angle α avec le plan du méridien magnétique, le moment de rotation résultant aura pour valeur

$$\mathrm{R} = \mathrm{S}i(\mathrm{Z}\cos\gamma - \mathrm{H}\sin\gamma\cos\alpha),$$

et sera nul pour une valeur de α déterminée par l'équation

$$\mathrm{Z}\cos\gamma - \mathrm{H}\sin\gamma\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{H}} = \operatorname{tang}\mathrm{I} = \operatorname{tang}\gamma\cos\alpha.$$

La mesure de l'inclinaison est ramenée à celle de γ et de α; elle n'exige ni la connaissance d'aucune constante du cadre, ni l'invariabilité du courant. De plus, la méthode paraît aussi sensible qu'aucune de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

E. Bouty.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES;

Tome CXII, 1891.

H. RIGOLLOT. — Sur les spectres d'absorption des solutions d'iode, p. 38.

Dans divers dissolvants formés de composés organiques homologues, ou de chlorures, bromures, iodures d'un même radical, on introduit 0,05 d'une solution d'iode dans le sulfure de carbone, contenant $3^{mg},85$ d'iode par centimètre cube. On compare avec

le spectrophotomètre de M. Gouy les intensités des faisceaux traversant cette solution ou le dissolvant seul.

On constate que, dans une même série de dissolvants, quand le poids moléculaire augmente : 1° la bande d'absorption s'avance légèrement vers le violet; 2° le maximum de lumière transmise diminue.

Ch. GUILLAUME. — Solution pratique du problème de la colonne émergente d'un thermomètre, par l'emploi d'une tige correctrice, p. 87.

M. Guillaume propose pour corriger l'erreur due à l'émergence partielle de la tige thermométrique un artifice analogue à ceux qu'on a déjà appliqués à divers pyromètres, notamment à ceux de MM. Deville et Troost. Il consiste dans l'emploi d'une tige thermométrique graduée auxiliaire, sans réservoir, contenant un volume déterminé de mercure, et plongeant par le bas dans le bain qui contient le thermomètre, en sorte que les deux colonnes mercurielles émergent de la même quantité. On peut calculer la hauteur qu'atteindrait le mercure de la tige correctrice, si toute la colonne était à la température T_1 indiquée par le thermomètre. La différence entre cette hauteur et la hauteur réelle du mercure représente le déficit de hauteur dû à l'émergence de la tige, et ce déficit est le même pour le thermomètre, si l'on néglige dans la correction la différence entre la température réelle T et la température apparente T_1. En ajoutant cette hauteur à l'indication du thermomètre, on observe une température T_2 plus approchée que T_1. Une seconde approximation donnera la température T avec une exactitude suffisante.

M. Guillaume s'est assuré, par des expériences de comparaison, de l'efficacité de cette méthode.

A. COLLOT. — Appareil de projection lumineuse, applicable aux balances de précision, à l'effet d'obtenir des pesées rapides, p. 99.

Le centre de gravité de la balance se trouve placé de façon à obtenir une sensibilité médiocre et des oscillations rapides qu'on amplifie en les projetant sur un écran gradué et en les observant par transparence à l'aide d'un microscope. La source lumineuse formée d'un bec de gaz avec réflecteur est disposée de façon à

éviter tout échauffement de la cage de la balance. La pesée étant approchée à la manière ordinaire jusqu'au décigramme, l'observation des excursions de l'aiguille dans les deux sens permet de calculer immédiatement l'appoint à ajouter. On observe ensuite l'image au microscope pour déterminer la position à donner au cavalier.

CH. GUILLAUME. — Théorème relatif au calcul de la résistance d'une dérivation, p. 223.

Quand on emploie les caisses de résistance à double entrée pour obtenir des fractions de l'unité de résistance, en établissant des dérivations des bobines entre elles, on est conduit à intercaler un nombre de chevilles d'autant plus grand que la résistance est plus faible. La résistance des chevilles n'est pas négligeable dans ce cas. Pour calculer la correction correspondante, M. Guillaume propose une méthode qui consiste à imaginer que l'on remplace les parties du circuit donnant naissance à plusieurs dérivations par autant de branches qu'il y a de dérivations. Les résistances de ces branches fictives sont calculées de façon à être respectivement proportionnelles à celles des dérivations correspondantes, et à reproduire par leur ensemble la résistance primitive. Le circuit complexe se trouve ainsi ramené à une série de circuits parallèles, et la correction des chevilles se fait assez simplement, si l'on suppose leurs résistances égales entre elles. Toutefois cette condition est assez mal réalisée, à cause de la variabilité des contacts.

RENOU. — Correction de la tige émergente d'un thermomètre, p. 260.

Le procédé de correction proposé par M. Guillaume (1) est employé depuis 1881 à l'Observatoire de Saint-Maur. Il a été employé par H. Sainte-Claire Deville en 1868.

LIPPMANN. — La photographie des couleurs, p. 274.
Observations de M. Ed. Becquerel sur la Communication précédente, p. 275.

M. Lippmann a obtenu et fixé l'image du spectre solaire avec

(1) *Voir* ci-dessus, p. 563.

ses couleurs. L'expérience réussit avec toutes les substances sensibles, les développateurs et les fixatifs courants, pourvu : 1° que la couche sensible soit parfaitement continue, sans grains visibles même au microscope; 2° que cette couche soit adossée à une surface réfléchissante. Cette surface était fournie par un bain de mercure. Le cliché est négatif ou complémentaire par transparence, positif par réflexion.

La lumière incidente, en interférant avec la lumière réfléchie, produit, à des distances d'une demi-longueur d'onde, des maxima qui impressionnent la plaque et déterminent des dépôts d'argent réfléchissants. On obtient ainsi une série de lames minces qui ont l'épaisseur nécessaire pour reproduire par réflexion la couleur incidente primitive. Cette couleur sera d'autant plus pure que les lames superposées seront plus nombreuses; leur nombre atteint 200 pour une couche de $\frac{1}{20}$ de millimètre.

M. Ed. Becquerel a obtenu, en 1848, des images colorées du spectre et de divers objets, au moyen du sous-chlorure d'argent formé à la surface de lames d'argent. Mais ces images n'ont pu être fixées et ne se conservent que dans l'obscurité.

Dans la séance suivante, M. H. Becquerel a montré à l'Académie quelques-unes de ces photographies.

MÜLTZER. — Variabilité du nombre de vibrations des notes musicales selon leurs fonctions, p. 386.

MM. Cornu et Mercadier ont constaté que les notes musicales ne correspondent pas toujours aux mêmes nombres de vibrations, suivant la place qu'elles occupent dans la mélodie ou dans les accords. M. Mültzer propose de considérer un accord quelconque comme formé de sons pris dans une des séries de sons harmoniques des principales notes du ton. Il trouve que les accords ainsi formés gagnent en simplicité et en justesse.

U. LALA. — Sur la compressibilité des mélanges d'air et d'hydrogène, p. 426.

Au moyen d'un appareil qu'il a déjà fait connaître, M. Lala a étudié la compressibilité de mélanges d'air et d'hydrogène en diverses proportions. Quand la proportion d'hydrogène est faible, la compressibilité pour de faibles pressions est intermédiaire entre

celle de l'air et celle de l'hydrogène, mais s'écarte de la loi de Mariotte dans le même sens que celle de ce dernier gaz. La compressibilité diminue ensuite et finit par être plus faible que celle de l'hydrogène pour des pressions croissantes.

Quand on fait croître la proportion d'hydrogène, la compressibilité s'écarte d'abord et finalement se rapproche de celle de ce gaz.

MONNORY. — Sur la compression du quartz, p. 428.

M. Beaulard avait déjà établi (¹) que la compression du quartz suivant une direction perpendiculaire à l'axe optique détermine suivant l'axe une double réfraction, caractérisée par une différence de marche proportionnelle entre les composantes principales de la vibration incidente. Cette différence de marche se superpose aux effets de la polarisation rotatoire conformément à la théorie de M. Gouy.

M. Monnory constate que le grand axe de la vibration elliptique résultant de cette superposition prend des directions qui, pour une épaisseur donnée de quartz, se rapprochent ou s'éloignent de la direction primitive de la vibration, à mesure qu'on fait croître la compression, suivant les prévisions théoriques.

La théorie de ces rotations a été donnée sous forme géométrique par M. Wiener (²). M. Monnory en a fait une discussion analytique (³).

VIEILLE. — Influence du volume des gaz sur la vitesse de propagation des phénomènes explosifs, p. 43.

Pour les gaz à grande densité et à haute température qui résultent de la décomposition des explosifs, la formule de Clausius se réduit à

$$p = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta},$$

p étant la pression, Δ la densité et α le volume. On en déduit

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXI, 21 juillet 1890.

(²) *Wied. Ann.*, t. XXXV, p. 1; 1888.

(³) *Journal de Physique*, t. IX, p. 277; 1890.

pour la valeur de l'élasticité

$$E = \Delta \frac{dp}{d\Delta} = \frac{f\Delta}{(1 - \alpha\Delta)^2}.$$

E croît donc indéfiniment quand Δ se rapproche de $\frac{1}{\alpha}$. Il en résulte que, dans ces mêmes conditions, la vitesse de propagation d'un petit ébranlement croît sans limite. Pour la plupart des matières explosives puissantes, notamment pour le coton-poudre, cette densité limite est inférieure à celle de la matière explosive elle-même. Si la densité des produits de la décomposition atteignait celle de l'explosif, la pression et la vitesse de propagation croîtraient donc au delà de toute limite, et la résistance des enveloppes, quelque grande qu'elle soit, ne pourrait maintenir cette condition. Cette remarque concorde avec les résultats expérimentaux signalés par M. Berthelot.

M. BERTHELOT. — Sur l'onde explosive, sur les données caractéristiques de la détonation et sa vitesse de propagation dans les corps solides et liquides, et spécialement dans le nitrate de méthyle, p. 16.

M. Berthelot avait établi précédemment que les vitesses de détonation dans les systèmes gazeux peuvent atteindre jusqu'à 1800^m par seconde : elles dépendent de la chaleur développée et correspondent à l'utilisation totale de la force vive fournie par la réaction. Quand on fait éclater un explosif liquide homogène, les tubes sont au contraire brisés, lorsque la pression développée atteint une certaine valeur dépendant de leur résistance instantanée, les produits de l'explosion ne pouvant, d'après la théorie de M. Vieille, conserver le volume primitif. Le nitrate de méthyle a été choisi pour ces nouvelles expériences. On a constaté que les pressions et les vitesses d'explosion obtenues sont plus considérables que dans le cas des gaz, qu'elles croissent avec l'épaisseur de la paroi résistante, et que la rupture des tubes de caoutchouc et des tubes d'acier se fait par fentes longitudinales, suivant des plans diamétraux, tandis que les tubes de verre sont pulvérisés.

Le calcul montre que l'eau oxygénée, le fulminate de mercure, l'azotate d'ammoniaque, etc., auront encore des explosions brisantes, comme le nitrate de méthyle. Les matières solides com-

primées, comme le coton-poudre, ou pulvérulentes, comme la nitromannite, fournissent des vitesses de 6000^{m} à 8000^{m}, encore plus grandes que celles des liquides. Ces vitesses dépendent de la structure de la matière explosive. La nitroglycérine pure, corps visqueux, fournit des vitesses beaucoup moindres que la dynamite contenant de la silice dure, et surtout que la dynamite au mica, ce dernier corps étant moins défavorable que la silice amorphe.

POTIER. — Sur le principe d'Huygens, p. 220.

M. Potier généralise le principe d'Huygens, en l'étendant au cas d'ondes isolées non périodiques. Il démontre d'abord le lemme suivant :

Étant donnés une surface Σ, deux points A et B dont les distances à un élément $d\sigma$ de la surface sont r et ρ, dn un élément de la normale à la surface, F une fonction de $(r+\rho)$ ne devenant infinie pour aucune valeur de la variable, l'expression

$$\int \frac{d\sigma}{r\rho}\left[\left(\frac{\mathrm{F}}{r}-\mathrm{F}'\right)\frac{\partial r}{\partial n}-\left(\frac{\mathrm{F}}{\rho}-\mathrm{F}'\right)\frac{\partial \rho}{\partial n}\right]$$

est égale à o ou à $4\pi\frac{\mathrm{F(R)}}{\mathrm{R}}$, R désignant la distance AB, suivant que les deux points sont ou non du même côté de la surface Σ.

Cette relation peut être différentiée, soit par rapport aux coordonnées du point A, soit par rapport à celles du point B. On obtient ainsi deux nouvelles identités qui permettent de représenter une fonction de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\,\partial z^{\gamma}}\,\frac{\mathrm{F(R)}}{\mathrm{R}},$$

par des intégrales étendues à tous les éléments de la surface Σ.

Si le point A est un centre d'ébranlement dans un milieu où la vitesse de propagation est V, les composantes du déplacement sont des sommes de termes de la forme

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\,\partial z^{\gamma}}\,\frac{\varphi(\mathrm{R}+\mathrm{V}t)}{\mathrm{R}}.$$

En substituant dans les identités obtenues $\varphi(r+\rho-\mathrm{V}t)$ à $\mathrm{F}(r+\rho)$, on aura deux manières de représenter l'ébranlement

reçu au point B, en le considérant comme résultat de la superposition d'ébranlements ayant comme centres les éléments de la surface Σ. Quand la fonction F est sinusoïdale, on retrouve les formules de Helmholtz et Kirchhoff.

Quand la longueur d'onde est négligeable par rapport à r et ρ, le déplacement en B à l'époque t est complètement déterminé par les vitesses en chaque point de la surface Σ à l'époque $t - \frac{\rho}{V}$, au lieu de dépendre, comme dans le cas général, des vitesses et des déplacements.

MOUREAUX. — Variation magnétique pendant le tremblement du 15 janvier en Algérie, p. 259.

On a observé au parc Saint-Maur, au moment du tremblement de terre d'Algérie, une oscillation de l'aiguille aimantée atteignant 1',5 d'amplitude.

PROSPER HENRY. — Sur une méthode de mesure de la dispersion atmosphérique, p. 377.

On dispose un réseau à lignes verticales en avant de l'objectif d'une lunette. Si l'on observe un point lumineux non affecté par la réfraction atmosphérique, on obtient une double série de spectres linéaires horizontaux. Si l'on observe une étoile dont la distance zénithale est Z, les différentes radiations sont déviées verticalement d'une quantité A tg Z. Les mesures oculaires et photographiques montrent que A peut être représenté par la formule

$$A = C + \frac{D}{\lambda^{\frac{3}{2}}},$$

λ étant la longueur d'onde de la radiation considérée.

En appelant m l'angle que fait avec l'horizontale la tangente, à la courbe spectrale, en un point situé à la distance angulaire a, i étant l'intervalle de deux traits consécutifs, on trouve pour D

$$D = -\frac{2}{3} a^{\frac{5}{2}} (i \sin 1'')^{\frac{3}{2}} \operatorname{tang} m \cot Z.$$

On mesure *m* pour deux points symétriques par rapport à l'image centrale; on prend la moyenne et l'on calcule D.

On a opéré par observation directe et par photographie au moyen d'un réseau à mailles carrées, formé d'un bristol perforé de trous, disposés en files qui se croisent à angles droits et sont distantes de 1^{mm}. On a trouvé

$$D = 0'',726.$$

Les Tables de réfraction conduisent à $C = 56'',55$.

La valeur de A, fournie par les rayons chimiques les plus intenses, dépasse ainsi de $0'',91$ celle qui correspond aux rayons lumineux. Cet écart représente 0,0156 de la valeur totale de A, et si on le négligeait on commettrait une erreur de $5''$ pour $Z = 80°$.

D'après ces mesures, le rayon vert doit persister au coucher du Soleil une seconde après la disparition du rayon jaune.

G. Foussereau.

IL NUOVO CIMENTO.

3e série, t. XXIX et XXX; 1891.

C. CATTANEO. — Sur la dilatation des alliages fusibles à l'état liquide, t. XXIX, p. 13.

L'auteur a déterminé les coefficients de dilatation des divers alliages fusibles, à des températures plus élevées que leur point de fusion. Il a obtenu les résultats consignés dans le Tableau ci-dessous : D_t est la densité des alliages à $t°$.

Wood. $Bi^4Sn^2PbCd^2$.		Rose. $Bi^7Sn^6Pb^4$.		Lipowitz. $Bi^{15}Sn^4Pb^8Cd^4$.		Darcet. $Bi^{11}Sn^{16}Pb^8$.	
t.	D_t.	t.	D_t.	t.	D_t.	t.	D_t.
149°,4	9,2315	153°,1	9,3565	149°,7	9,4927	165°,6	9,4719
172,6	9,2028	196,3	9,3000	177,5	9,4596	205,1	9,4236
203,7	9,1675	242,9	9,2456	209,0	9,4192	244,3	9,3757
230,7	9,1281	296,5	9,1667	241,8	9,3725	293,5	9,3165
274,3	9,0798	323,2	9,1320	287,3	9,3152	323,3	9,2793
290,2	9,0558	»	»	313,4	9,2827	»	»
»	»	»	»	325,4	9,2688	»	»

D. MAZZOTTO. — Sur les cryohydrates des mélanges de deux sels, t. XXIX, p. 21.

L'auteur a étudié la composition et le point de solidification des cryohydrates formés avec les mélanges binaires des chlorures, nitrates et sulfates de sodium, de potassium et d'ammonium. On déduit de ses expériences que la température de fusion du cryohydrate d'un mélange est toujours plus basse que celle des cryohydrates des sels qui le composent, et sensiblement égale à la somme des diminutions de température que les deux sels produiraient sur toute la quantité d'eau du cryohydrate.

Ce fait est entièrement en désaccord avec les résultats des expériences de M. Guthrie.

E. VILLARI. — Observations sur plusieurs phénomènes de fluorescence et de phosphorescence, t. XXIX, p. 36.

L'auteur a étudié la fluorescence et la phosphorescence des corps, en employant la lumière du magnésium : pour la phosphorescence, il a trouvé que cette lumière donne des phénomènes plus brillants que la lumière Drummond.

La fluorescence est produite avec un grand éclat par la lumière du magnésium ; dans toutes les substances employées (verre d'uranium, solution de sulfate de quinine, de chlorophylle et de curcuma), son action est presque comparable à celle de la lumière solaire. En plaçant un verre bleu devant la lampe à magnésium, la fluorescence apparaît beaucoup plus brillante. La lumière qui a traversé une couche de 3^{cm} ou 4^{cm} de solution de curcuma, ou de chlorophylle, est inactive sur la solution de sulfate de quinine et sur le verre d'uranium, mais elle est active sur les autres solutions ; par contre, la lumière qui a traversé même une couche de 7^{cm} de sulfate de quinine est active sur toutes les substances.

Ce résultat peut s'expliquer en admettant que les rayons qui produisent la fluorescence ne sont pas toujours les mêmes ; en effet, l'expérience a démontré que le sulfate de quinine commence à donner de la fluorescence par les rayons indigo, le verre d'uranium et le curcuma par les rayons verts, et la chlorophylle par les rayons rouges. Ce fait, joint à la différence entre les rayons

absorbés par la solution de curcuma et la solution de sulfate de quinine explique l'expérience de l'auteur.

E. SALVIONI. — Sur le rapport entre l'unité britannique et l'unité de mercure, t. XXIX, p. 42.

Lors de sa construction de deux prototypes de l'ohm légal (¹), M. Salvioni avait comparé des unités de Siemens et Halske, de Strecker et d'Elliot et il avait trouvé des résultats différents de ceux obtenus en 1884 par M. le professeur Roiti. Il en déduit que les résistances avaient dû subir des variations. Il les renvoya alors pour la comparaison avec les étalons à MM. le Dr Kölich, le professeur Kohlrausch et R.-T. Glazebrook. Les mesures des deux premiers physiciens démontrent l'exactitude des prévisions de M. Salvioni, mais la comparaison de M. Glazebrook se trouve discordante et M. Salvioni fut contraint de grouper à part les déterminations faites avec l'unité Elliot. La cause de la discordance était une petite erreur échappée à M. Glazebrook dans la correction de la température. Après correction de cette erreur, les divergences furent beaucoup plus petites et l'approximation de $\frac{1}{10000}$ fut atteinte dans les résultats.

Le rapport définitif entre l'unité de mercure déduite de la construction de M. Salvioni et l'unité de l'Association britannique est 0,95354.

A. BARTOLI et E. STRACCIATI. — Mesures de la chaleur solaire exécutées en Italie depuis 1885, t. XXIX, p. 63.

Depuis 1885, les auteurs ont entrepris des mesures très étendues de la chaleur solaire. Ils ont exécuté plusieurs milliers de séries de mesures en neuf lieux différents et à des hauteurs au-dessus du niveau de la mer qui varient depuis 60^m jusqu'à 2942^m. Ils ont construit un pyrhéliomètre qui évite les inconvénients de celui de Pouillet et permet de faire de bonnes mesures, même avec un vent impétueux. Cet appareil est composé d'un calorimètre à boîte muni d'agitateur, dont une paroi est couverte d'une

(¹) *Journal de Physique*, t. X, p. 515; 1891.

couche très régulière de noir de fumée et d'une double enveloppe à circulation d'eau, munie d'une fente avec diaphragme.

L'appareil est soutenu par un pied parallactique. Les thermomètres sont divisés en $\frac{1}{50}$ ou en $\frac{1}{100}$ de degré et, avec une lunette, on peut apprécier le dixième d'une division : ils ont été étudiés avec grand soin. En réglant convenablement la circulation de l'eau dans l'enveloppe, on pouvait rendre inappréciable le refroidissement du calorimètre. De ces nombreuses mesures ils ont tiré les résultats que je vais résumer.

Lorsque l'épaisseur ε de l'atmosphère varie peu, la formule de Pouillet

$$Q = Ap^{\varepsilon}$$

est applicable. Les constantes A et p varient avec ε, mais en sens inverse; p croît avec ε tandis que A diminue. Un résultat semblable avait été publié par M. le professeur Rosseti. Toutes les observations des auteurs prouvent que, dans un même lieu, les constantes A et p augmentent lorsque la valeur absolue de la tension de la vapeur d'eau dans l'atmosphère diminue. On a le même résultat pour le produit AD^2, D indiquant la longueur du rayon vecteur qui va du Soleil à la Terre.

Par contre, l'état hygrométrique n'a pas d'influence sur les valeurs de A et de p, ce qui est d'accord avec les résultats de M. Violle. Des observations des auteurs on déduit, contrairement aux conclusions de M. Fröhlich, qu'il n'y a pas de dépendance entre les valeurs de A ou de AD^2 et le nombre et l'extension relative des taches solaires. MM. Bartoli et Stracciati se proposent de poursuivre leurs expériences pendant onze ans (durée de la période des taches solaires) et de publier une discussion détaillée des résultats.

Dans un deuxième Mémoire ([1]), les auteurs donnent une formule très simple qui représente très bien chaque série complète d'observations. La formule est

$$Q\varepsilon^{n} = C,$$

dans laquelle ε est l'épaisseur atmosphérique calculée au moyen

([1]) *Nuovo Cimento*, t. XXXI, p. 193; 1892.

de la formule de Laplace ou de la série de Bouguer et n et C sont deux constantes. Dans des séries de mesures faites en temps et lieux différents, N varie depuis la valeur 0,25 jusqu'à la valeur 0,70. Par un soleil ombragé, la formule donne des résultats moins bons.

A. BATTELLI. — Sur le crépuscule, t. XXIX, p. 97.

Description d'observations du crépuscule et de diverses expériences exécutées dans le but de les expliquer.

A. BARTOLI. — Sur la chaleur spécifique des laves du mont Etna et d'autres volcans, t. XXIX, p. 131; t. XXX, p. 231.

L'auteur a déterminé la chaleur spécifique d'un grand nombre de laves des monts Etna, Volcano et Kilauea jusqu'à la température de 800°. On employait la méthode des mélanges. Le liquide calorimétrique était l'eau, et une disposition spéciale en empêchait l'évaporation par le contact du corps chaud. La température initiale des laves était déterminée par la méthode de Pouillet-Violle, c'est-à-dire par une détermination calorimétrique faite sur du platine échauffé dans le même fourneau que la lave, et dont un couple thermo-électrique assurait la constance de température. Essayant son appareil avec le quartz, l'auteur a trouvé les mêmes résultats que M. Pionchon.

Ces expériences démontrent que la chaleur spécifique des laves croît d'abord rapidement avec la température, et tend ensuite vers une limite déterminée.

D. MAZZOTTO. — Modification au thermomètre à air, t. XXIX, p. 142.

Modifications peu importantes du thermomètre de Jolly.

C. CATTANEO. — Dilatation thermique du bismuth fondu près de la température de fusion, t. XXIX, p. 155.

Étude de la dilatation thermique entre 236° et 279° d'un amalgame de bismuth. La conséquence, déduite par l'auteur, *que le bismuth liquide ne présente pas de maximum de densité, ne nous semble pas justifiée.*

G. GUGLIELMO. — Description d'un électromètre à quadrants très sensible, t. XXIX, p. 161.

L'auteur propose d'employer dans la construction des électromètres un système multiple d'aiguilles superposées, alternées avec des quadrants en verre argenté. Il ne dit pas s'il a construit un tel appareil et s'il donne de bons résultats.

O. MURANI. — Sur les décharges électriques des condensateurs et l'application aux décharges atmosphériques, t. XXIX, p. 193.

Répétition des expériences bien connues de M. Lodge et discussion des résultats.

E. PADOA. — Nouvelle interprétation des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux, t. XXIX, p. 225.

En partant de l'hypothèse que l'éther jouit de la propriété de faire un travail quand on fait tourner ses parties infiniment petites, l'auteur arrive par le calcul à une explication simple des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux. Il n'est pas possible de faire un résumé détaillé de ce Mémoire de Physique mathématique.

G. SCHIAPARELLI. — Sur la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques, t. XXX, p. 5.

Voilà les conclusions auxquelles arrive le savant astronome de Milan, dans ce travail très intéressant qui a été publié à l'occasion du cinquantième anniversaire de l'Observatoire de Pulkowa.

La stabilité des *pôles géographiques* de la Terre dans un même endroit ne peut pas être considérée comme incontestablement établie par des arguments astronomiques ou mécaniques. Une telle stabilité n'est pas prouvée pour les âges antérieurs à l'histoire du globe. Un tel état de stabilité est seulement possible dans certaines conditions [1] pour un sphéroïde suffisamment rigide. Des actions

---

[1] Pour plus de détails, consulter le Mémoire original, qui est peu susceptible d'être résumé.

géologiques peu sensibles, prolongées pendant un temps suffisamment long, peuvent détruire ces conditions et, si le sphéroïde n'est pas d'une rigidité absolue, donner lieu à de grands mouvements du pôle de rotation.

P. CARDANI. — Sur les températures des fils parcourus par des courants électriques et sur leurs coefficients de conductibilité extérieure, t. XXX, p. 33.

Étude expérimentale des températures atteintes par des fils parcourus par des courants électriques, exécutée au moyen d'une méthode acoustique imaginée par l'auteur.

C. CHISTONI. — Action déviatrice d'un aimant fixe sur un aimant libre de se déplacer autour d'un axe vertical, t. XXX, p. 97.

Mémoire théorique qui contient une généralisation des formules des magnétomètres.

G.-P. GRIMALDI. — Sur la mesure de la chaleur spécifique des liquides à des températures élevées, t. XXX, p. 114.

J'ai donné dans cette Note préliminaire la description d'une méthode qui permet de déterminer par voie directe la chaleur spécifique des liquides à des températures supérieures à celle de leur ébullition sous la pression normale et qui donne de bons résultats malgré la difficulté des expériences : ces déterminations sont en cours d'exécution.

G. GRASSI. — Galvanomètres compensés à sensibilité constante, t. XXX, p. 120.

Dans les galvanomètres ordinaires, la sensibilité diminue à partir d'une certaine limite, à mesure que la déviation augmente. Pour obtenir une sensibilité à peu près constante dans de larges limites, M. Grassi propose de joindre au circuit ordinaire du galvanomètre, qui est vertical et dans le plan du méridien magnétique, un deuxième circuit vertical situé dans un plan perpendiculaire au méridien. Les deux circuits ont leurs axes qui passent par le centre de l'aiguille ; ils sont parcourus successivement par le même courant à mesurer, qui est dirigé dans le deuxième circuit de manière à affaiblir le champ magnétique terrestre.

En appelant l la demi-longueur de l'aiguille, r et r' les rayons du premier et du deuxième circuit, i l'intensité du courant en mesure électromagnétique absolue, n et n' le nombre de tours des deux circuits, on a la formule

$$i = \frac{Hr}{2\pi n} \cdot \frac{\tang \alpha}{1 + \frac{n_1 r}{n r_1} \tang \alpha}.$$

H est la composante horizontale du magnétisme terrestre, et α l'angle de déviation.

Cette équation s'applique dans le cas où les centres des deux circuits coïncident avec le centre de l'aiguille, et où $\frac{l^2}{r^2}$ et $\frac{l^2}{r_1^2}$ sont des quantités négligeables. Elle diffère de la formule ordinaire de la boussole des tangentes pour le terme de compensation $\frac{n_1 r}{n r_1} \tang \alpha$; l'auteur démontre qu'en faisant $\frac{n_1 r}{n r_1} = 1$, la sensibilité reste à peu près constante pour les valeurs de α comprises entre $0°$ et $90°$.

Il serait intéressant de faire une étude expérimentale d'un tel appareil.

G.-P. GRIMALDI. — Recherches sur les oscillations électriques hertziennes, t. XXX, p. 137.

L'appareil employé pour cette étude était semblable à celui de MM. Arons et Rubens [1] : il en différait seulement par le moyen employé pour constater les ondes électriques. J'ai fait diverses expériences en faisant varier la capacité et la forme d'un des côtés du système des rectangles ou le diélectrique qui l'enveloppe. Pour la description détaillée de ces expériences, je dois renvoyer au Mémoire original.

A. RIGHI. — Résumé de publications nouvelles, t. XXX, p. 193.

Nouvelles figures électriques. — Une plaque horizontale de cuivre argenté, très bien polie, est mise en communication avec l'électrode négative d'une machine électrique. Une aiguille à coudre

(1) *Journal de Physique*, t. X, p. 379; 1891.

est placée à peu de distance sur la plaque. L'extrémité supérieure de l'aiguille porte une boule de cuivre à petite distance d'une deuxième boule en communication avec l'électrode positive de la machine électrique. Lorsque cet appareil est mis en action et que de l'électricité positive s'écoule par la pointe, il se forme dans la plaque, autour de la pointe, une région circulaire dépourvue de gaz adhérent au métal. L'auteur a pu constater ce fait par diverses expériences.

Expériences exécutées en déchargeant une grande batterie. — Avec six condensateurs disposés en cascade, chacun formé de dix-huit grandes bouteilles de Leyde, et qui étaient actionnés par une grande machine de Holtz à quatre plateaux, l'auteur a pu fondre un fil de platine de 3^m de longueur et de $\frac{1}{20}$ de millimètre de diamètre. Par la décharge, ce fil se transforme en une brillante couronne de globules incandescents. Si le fil est long de $1^m,50$ environ, on ne voit pas, dans l'instant de la décharge, les globules incandescents, mais on observe une étincelle très brillante, qui occupe la position du fil. L'auteur démontre par une expérience ingénieuse que le fil est réduit en vapeur avant que la décharge soit terminée et que la décharge résiduelle traverse les vapeurs sous forme d'étincelle.

Sur un appareil stéréoscopique. — C'est la modification d'un appareil jadis inventé par l'auteur.

Sur l'électricité de contact dans différents gaz. — L'auteur avait fait, lors de ses études sur les phénomènes photo-électriques, une observation importante. Si l'on forme une espèce de condensateur avec une plaque métallique A en communication avec un électromètre, et une toile métallique B en communication avec le sol, et si l'on fait tomber sur A, à travers B, pendant un temps suffisant, des radiations ultra-violettes, on observe dans l'électromètre une déviation qui mesure la différence de potentiel de contact entre A et B. Deux circonstances sont nécessaires à l'exactitude de la mesure : A et B doivent être très rapprochés, et le gaz qui les environne ne doit pas être trop raréfié.

L'auteur s'est servi de cette méthode très simple pour mesurer

la différence de potentiel au contact de ces métaux dans les différents gaz. Il a trouvé que la différence de potentiel de contact ne varie pas, quels que soient les métaux ou corps employés (cuivre, platine, fer, bismuth, nickel, zinc, étain, charbon de cornue) si l'on opère dans une atmosphère d'anhydride carbonique ou d'air humide, même si l'on diminue la pression de plusieurs centimètres. Dans l'hydrogène, le potentiel de contact varie, avec le platine, le palladium, le fer et le nickel. Ces métaux sont plus électropositifs dans l'hydrogène que dans l'air. Dans le gaz d'éclairage, on obtient le même résultat que dans l'hydrogène; dans le gaz ammoniac, des résultats opposés.

Sur les forces élémentaires électromagnétiques et électrodynamiques. — Étude théorique de laquelle il n'est pas possible de donner un bref résumé.

G. MORERA. — Sur les équations fondamentales de la Thermodynamique, t. XXX, p. 208.

Sur les capacités thermiques des vapeurs, t. XXX, p. 213.

Dans les formules ordinaires de la Thermodynamique, on prend pour variables indépendantes deux des trois quantités p, v, t. M. Morera donne des formules établies en prenant pour base du calcul deux variables quelconques.

Ces formules, quoique un peu plus compliquées que les équations ordinaires, sont plus générales et peuvent s'appliquer avec facilité à tous les cas. L'auteur les emploie pour étudier les capacités thermiques des vapeurs.

A. STEFANINI. — Sur la période variable du courant électrique, t. XXX, p. 275.

L'auteur établit une équation théorique qu'il se propose de soumettre à une vérification expérimentale. G.-P. Grimaldi.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annales de Chimie et de Physique.

6e série, t. XXVII; novembre 1892.

HEILBORN. — *A propos du coefficient critique*, p. 352.

CHASSAGNY et H. ABRAHAM. — *Sur le mode d'emploi des couples thermo-électriques*, p, 355.

G. MESLIN. — *Sur la photographie des couleurs*, p. 369.

Wiedemann's Annalen.

T. XLVII, n° 11; 1892.

A. OBERBECK. — *Action du courant électrique sur l'argent allotropique*, p. 353.

W. HALLWACH. — *Sur les indices de réfraction des dissolutions très étendues*, p. 380.

M. CANTOR. — *Sur les constantes capillaires*, p. 399.

M. CANTOR. — *Sur la chimie des accumulateurs*, p. 424.

O. LEHMANN. — *Chute de potentiel correspondant à la décharge*, p. 426.

K. SKEEL. — *Dilatation de l'eau avec la température*, p. 440.

B. GALITZINE. — *Méthode pour évaluer la densité des vapeurs saturées et la dilatation des liquides aux températures élevées*, p. 466.

B. GALITZINE. — *Sur l'énergie rayonnante*, p. 479.

J. ELSTER et H. GEITEL. — *Note sur la production d'électricité par une chute d'eau*, p. 496.

A. OBERBECK. — *Appareil pour la démonstration de la disposition du port de Wheatstone*, p. 498.

O. TROJE. — *Mesure des coefficients de self-induction à l'aide de l'électrodynamomètre*, p. 501.

ERRATA.

NOTE DU BAS DE LA DEUXIÈME PAGE DU MÉMOIRE DE FÉVRIER 1892 :

Ligne 7, ... et l'on retrouve l'équation caractéristique déduite (1) ..., *ajoutez* : à peine changée.

Ligne 13, ... qui donne l'équation réduite (1) avec ..., *remplacez* (1) *par* : contenant le facteur $3n - 1$.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS

DES MATIÈRES CONTENUES DANS LE TOME Ier

DE LA 3e SÉRIE.

Les titres des Mémoires sont donnés en abrégé. Le premier nombre inscrit à la suite de chaque Mémoire désigne le volume; le second désigne la page.

FIN DE LA TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

DU TOME Ier DE LA 3e SÉRIE.

Généralités, Mécanique et Pesanteur.

Actions moléculaires. Phénomènes physico-chimiques.

Acoustique.

Chaleur.

Optique. Radiations.

Électricité et magnétisme.

Météorologie. Physique du globe.

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

18117 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins 55.



OCT 4 - 1939

